

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**CONTROLE FUZZY PARA SISTEMAS TAKAGI-SUGENO:
CONDIÇÕES APRIMORADAS E APLICAÇÕES**

Belo Horizonte
03 de outubro de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**CONTROLE FUZZY PARA SISTEMAS TAKAGI-SUGENO:
CONDIÇÕES APRIMORADAS E APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

LEONARDO AMARAL MOZELLI
ORIENTADOR: REINALDO MARTINEZ PALHARES

Belo Horizonte
03 de outubro de 2008

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a minha família. Em especial, aos meus pais Fátima e Paulo por sempre me guiarem por caminhos corretos, mesmo quando não foi possível percorrê-los comigo. Sem vocês nada disso seria possível.

Sou muito grato também ao professor Reinaldo por me acolher sob sua valorosa orientação, compartilhando seus conhecimentos na área de controle que decididamente foram importantes para minha trajetória.

Registro meu agradecimento aos docentes e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE). Em especial, meu obrigado aos professores Leonardo Tôres e Eduardo Mendes, cujos conhecimentos contribuíram para este trabalho. Agradeço à banca examinadora pelas fecundas discussões e sugestões que aprimoraram esta dissertação.

Agradeço também aos vários colegas do PPGEE. Muito obrigado aos companheiros de pesquisa também orientados pelo professor Reinaldo: Cláudio, Fernando, Gustavo e Marcos Flávio. Aos colegas do Grupo de Otimização e Projeto Assistido por Computador (GOPAC) e do grupo de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares (MACSIN) agradeço pelo companheirismo e por tornarem a pesquisa bem mais divertida. Em especial: Alexandre, Dalmy, Felipe e Miguel. Aos amigos de outros grupos de pesquisa: Manoel e Francisco.

Obrigado ao PPGEE e à UFMG pela infra-estrutura oferecida tanto na minha graduação quanto no mestrado. Presto reconhecimento ao fomento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Aos meus amigos, aos meus pais, à Débora e, especialmente, à Letícia devo gratidão pelo incentivo, paciência, confiança e carinho. Muito obrigado por compreenderem a importância deste projeto para mim, mesmo sem entender muito quando eu falava sobre ele.

Resumo

Neste trabalho, são propostas novas condições, rigorosas e sistemáticas, para análise e projeto de sistemas de controle fuzzy baseados em modelos Takagi-Sugeno, levando em consideração não apenas garantia de estabilidade como também desempenho em malha fechada.

Não-linearidades, incertezas paramétricas e distúrbios são desafios presentes, em maior ou menor grau, na grande maioria de processos a serem controlados. Quando tais questões se tornam relevantes, sistemas fuzzy Takagi-Sugeno são muito úteis devido a sua capacidade de modelar, aproximadamente ou com exatidão, dinâmicas não-lineares sobre domínios compactos por meio da combinação de modelos lineares, localmente válidos.

A metodologia de projeto é baseada no controle em espaço de estados, estruturada segundo os princípios de estabilidade no sentido de Lyapunov, a teoria de sistemas fuzzy e os fundamentos de controle robusto. Tais critérios podem ser formulados como desigualdades matriciais lineares, cuja solução é obtida de forma eficiente por meio de diversos pacotes computacionais. Os resultados são comparados com a literatura atual em exemplos computacionais. Finalmente, o uso efetivo dos resultados é testado em um experimento de bancada baseado no oscilador caótico de Chua.

Abstract

In this work, new rigorous and systematic conditions for analysis and design of fuzzy control systems based in Takagi-Sugeno models are proposed, that guarantee not only stability but also performance in closed-loop.

Nonlinearities, parametric uncertainties and disturbances are challenges, in one degree or another, to almost every control system design nowadays. When such issues start to matter, Takagi-Sugeno fuzzy systems are very useful due to its ability to represent, precisely or approximately, any nonlinear dynamics over a compact domain by resorting to a combination of several local linear models.

The project methodology is based on state-space control, aggregating stability in the Lyapunov sense, fuzzy systems theory, and fundamentals of robust control. Such criteria are recast as Linear Matrix Inequalities, which can be efficiently solved by means of several computational toolboxes. The results are compared with the current literature in some numeric examples. Finally, the effectiveness is tested in a practical experiment based on Chua's chaotic oscillator.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Organização do Texto	2
2	Fundamentos Fuzzy	3
2.1	Conjuntos Fuzzy	3
2.1.1	Pertinência	4
2.1.2	Operações	5
2.1.3	Terminologia	7
2.2	Variáveis Lingüísticas	7
2.3	Lógica Fuzzy	8
2.3.1	Regras Se-Então	9
2.4	Sistemas de Inferência	10
2.4.1	Etapas de Inferência	11
2.5	Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno	12
2.5.1	Aspectos de Modelagem	14
3	Desigualdades Matriciais Lineares	16
3.1	Conceitos Preliminares	16
3.1.1	Conjuntos Convexos	16
3.1.2	Funções Convexas	17
3.1.3	Problemas de Otimização	17
3.1.4	Otimização Convexa	19
3.2	Forma Geral das LMIs	20
4	Estabilidade e Controle de Sistemas Fuzzy	22
4.1	Estabilidade de Sistemas Dinâmicos	22
4.1.1	Estabilidade no Sentido de Lyapunov	23
4.1.2	Método Direto de Lyapunov	24
4.2	Estabilidade de Sistemas TS	25
4.2.1	Projeto de Controle Fuzzy Baseado em LMIs	27
4.3	Critérios de Desempenho	30
4.3.1	Critério de Desempenho \mathcal{H}_∞	31
4.3.2	Controle \mathcal{H}_∞ no Domínio do Tempo	32

5	Crêterios de Estabilidade e de Estabiliza�o Quadráticos	35
5.1	Conservadorismo da Abordagem Quadrática Tradicional	35
5.2	Condi�es \mathcal{H}_∞ Aprimoradas: Caso Quadrático	36
5.2.1	Análise da Norma \mathcal{H}_∞	36
5.2.2	Síntese de Controladores \mathcal{H}_∞	40
5.3	Resultados	41
5.3.1	Exemplo 1	42
5.3.2	Exemplo 2	42
5.3.3	Discussão	43
6	Cráterios de Estabilidade e de Estabiliza�o Não-Quadráticos	44
6.1	Exist�ncia de Fun�es de Lyapunov Quadráticas	44
6.1.1	Alternativas	45
6.2	Condi�es \mathcal{H}_∞ Aprimoradas: Caso Não-Quadrático	47
6.2.1	Análise da Norma \mathcal{H}_∞	47
6.2.2	Síntese de Controladores \mathcal{H}_∞	51
6.3	Resultados	53
6.3.1	Exemplo 1	53
6.3.2	Exemplo 2	53
6.3.3	Exemplo 3	53
6.3.4	Exemplo 4	54
7	Resultados Práticos	55
7.1	Problema de Sincronismo e Transmissão de Informa�es	55
7.2	Plataforma PCCHUA	57
7.2.1	Modelagem Fuzzy	59
7.3	Procedimento da Síntese	61
7.4	Experimentos	64
7.4.1	Metodologia	64
7.4.2	Sinal Senoidal Puro	65
7.4.3	Sinal de Baixa Freq�ncia combinado com Sinais de Alta Freq�ncia	67
7.4.4	Sinais com Freq�ncias e com Amplitudes Próximas	67
8	Considera�es Finais	71
8.1	Propostas de Continuidade	72
A	Lemas	74
B	Complemento de Schur	76
C	Produ�o Bibliográfica	77
	Referências Bibliográficas	78

Lista de Figuras

2.1	Pertinência de indivíduos com relação à estatura.	5
2.2	Operações com conjuntos fuzzy.	6
2.3	Exemplos de valores lingüísticos.	8
2.4	Diagrama esquemático do sistema de inferência.	11
2.5	Diagrama esquemático da etapa de inferência.	12
3.1	Conjuntos no \mathbb{R}^2	17
3.2	Exemplos de funções tais que $C \subset \mathbb{R}$	18
4.1	Interpretação geométrica de estabilidade	24
4.2	Diagrama de blocos do controle \mathcal{H}_∞	31
4.3	Interpretações da norma \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares SISO.	32
7.1	Diagrama esquemático do circuito de Chua.	57
7.2	Característica da condutância do diodo de Chua.	58
7.3	Diagrama esquemático do experimento de transmissão de informações.	59
7.4	Funções de pertinência: regra 1 (linha cheia); regra 2 (linha pontilhada).	61
7.5	Comparação entre a curva real do diodo e a curva segundo o modelo fuzzy.	61
7.6	Séries do mestre e do escravo no estado v_{c_1}	65
7.7	Erro de sincronismo no estado v_{c_1} durante o primeiro experimento.	66
7.8	Primeiro experimento: sinais transmitido e recuperado.	66
7.9	Primeiro experimento: sinal transmitido (pontilhado) e filtrado (cheio).	67
7.10	Erro de sincronismo no estado v_{c_1} durante o segundo experimento.	67
7.11	Segundo experimento: sinais transmitido e recuperado.	68
7.12	Segundo experimento: sinal transmitido (pontilhado) e filtrado (cheio).	68
7.13	Erro de sincronismo no estado v_{c_1} durante o terceiro experimento.	69
7.14	Terceiro experimento: sinais transmitido e recuperado.	70
7.15	Terceiro experimento: sinal transmitido (pontilhado) e filtrado (cheio).	70

Lista de Tabelas

5.1	Ganhos do controlador PDC	42
5.2	Valores de γ_{\min} para diferentes parâmetros: abordagens quadráticas	43
6.1	Valor ótimo γ_{\min} da norma \mathcal{H}_{∞}	53
6.2	Valores de γ_{\min} para diferentes parâmetros: abordagens não-quadráticas	53
6.3	γ_{\min} calculado de acordo com β	54
7.1	Parâmetros do circuito de Chua.	62
7.2	Ganhos de sincronização obtidos com o uso do Teorema 14	64

Lista de Símbolos

$:=$	igual por definição
\exists	existe
\forall	para todo
\in	pertence a
\subset	está contido em; subconjunto de
\cup	união
\cap	intersecção
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{C}	conjunto dos números complexos
\mathbb{R}^n	espaço vetorial de dimensão n
$\Re\{\cdot\}$	parte real do argumento
$\Im\{\cdot\}$	parte imaginária do argumento
X_-	subconjunto formado por elementos de X com parte real negativa
X_+	subconjunto formado por elementos de X com parte real positiva
X_-^0	subconjunto formado por $X - X_+$
X_+^0	subconjunto formado por $X - X_-$
\mathcal{R}	conjunto formado por $\{1, 2, \dots, r\} \subset \mathbb{Z}_+$
\mathcal{S}	conjunto formado por $\{1, 2, \dots, s\} \subset \mathbb{Z}_+$
Φ	conjunto fuzzy
Φ_j^i	j -ésimo conjunto fuzzy da regra i
$\lambda(A)$	espectro de A ; conjunto dos autovalores de A
$\lambda_i(A)$	i -ésimo autovalor de A
$\sigma(A)$	conjunto dos valores singulares de A
$\sigma_{\max}(A)$	maior valor singular de A
A^{-1}	inversa de A
A'	transposta de A
$A \prec 0$	A é definida negativa; $\lambda(A) \in \mathbb{C}_-$
$A \preceq 0$	A é semidefinida negativa; $\lambda(A) \in \mathbb{C}_-^0$
I, I_n	matriz identidade, matriz identidade de ordem $n \times n$
k	variável tempo discreto; $k \in \mathbb{Z}_+^0$
q_k^i	i -ésima variável premissa

q_k	vetor com as variáveis premissas
$\mu_j^i(q_k^i)$	grau de pertinência de q_k^i em Φ_j^i
$w_i[q_k]$	grau de ativação da regra i
$h_i[q_k]$	função de pertinência normalizada da regra i
h_i	abreviação para $h_i[q_k]$
h_i^+	abreviação para $h_i[q_{k+1}]$
$l_2[0, \infty)$	espaço de Lebesgue discreto
$\ \cdot\ $	norma euclidiana do argumento
$\ \cdot\ _2$	norma l_2 do argumento
$\ T(s)\ _\infty$	norma \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência $T(s)$
diag { \cdot }	matriz bloco diagonal, cujos blocos são dados pelo argumento
co { \cdot }	envelope ou casca convexa do argumento
*	termos transpostos em matrizes simétricas
γ, γ_{\min}	custo garantido \mathcal{H}_∞ , valor ótimo do custo garantido \mathcal{H}_∞

Acrônimos

TS	Takagi-Sugeno
LMI	Desigualdade Matricial Linear, <i>Linear Matrix Inequality</i>
BMI	Desigualdade Matricial Bilinear, <i>Bilinear Matrix Inequality</i>
SISO	Uma Entrada, Uma Saída, <i>Single Input Single Output</i>
MIMO	Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas, <i>Multiple Input Multiple Output</i>
PCCHUA	Protótipo de Controle do circuito de Chua
ITVC	Transmissão de Informação Via Controle, <i>Information Transmission Via Control</i>

Capítulo 1

Introdução

Após décadas de desenvolvimento e de questionamentos (Zadeh, 2008), os sistemas fuzzy são hoje uma realidade que abrange diversos campos do conhecimento: sistemas de energia (Bhende et al., 2006); telecomunicações (Aoul et al., 2004); robótica (Hagras, 2004); sistemas automotivos (Khiar et al., 2007); processos químicos e industriais (Horiuchi e Kishimoto, 2002; Bonissone et al., 1995); medicina (Seker et al., 2003; Teodorescu et al., 1998).

Uma das linhas de aplicação que se beneficiou desta teoria desde o princípio foi o campo de controle (Mamdani, 1974). Isto se deve, em grande parte, ao fato de que, em maior ou menor extensão, os sistemas reais e as plantas industriais possuem não-linearidades, parâmetros variantes no tempo e erros de modelagem, sofrendo muitas vezes com perturbações sobre as quais não há muita informação.

Com o aumento da complexidade dos sistemas e a exigência de critérios de projeto cada vez mais restritivos as técnicas de controle tradicional podem não ser suficientes. Neste cenário, o controle fuzzy baseado em modelos Takagi-Sugeno é uma alternativa muito interessante.

Sistemas TS são capazes de representar, de forma aproximada ou exata, dinâmicas não-lineares quaisquer como a combinação de modelos lineares válidos localmente. Em geral, são menos complexos do que outras classes de modelos fuzzy (Johansen et al., 2000), facilitando aspectos de identificação e modelagem.

Ao contrário das estratégias originais, baseadas em heurística e no conhecimento do projetista (Mamdani, 1974), trabalhos pioneiros como de Tanaka e Sugeno (1990) mostraram que o controle fuzzy de modelos TS pode ser feito de maneira rigorosa, seguindo metodologias que podem ser reproduzidas de forma sistemática, garantindo além da estabilidade diversos critérios de desempenho em malha fechada.

Ademais, como ocorreu em diversas áreas de controle a partir dos anos 90 (Boyd et al., 1994; Palhares e Gonçalves, 2007), a teoria de controle fuzzy foi influenciada pela busca por metodologias de projetos que pudessem ser tratadas por meio de desigualdades matriciais lineares, como pode ser visto em (Wang et al., 1996). Tais condições podem ser resolvidas de forma eficiente por meio de diversos pacotes computacionais disponíveis e permitem tratar de maneira bastante elegante diversos critérios de desempenho.

Devido a essas razões, o controle baseado em modelos TS predomina no contexto das

pesquisas com controle fuzzy, embora sejam bastante estudadas abordagens neuro-fuzzy e o controle fuzzy adaptativo (Feng, 2006).

Progressivamente, as condições LMI propostas em (Wang et al., 1996) foram aprimoradas, motivadas por diversos objetivos: ampliar a gama de sistemas aos quais podem ser aplicadas (Teixeira et al., 2003; Johansson et al., 1999; Tanaka et al., 2003); produzir controladores com melhor desempenho em malha-fechada (Nguang e Shi, 2006); reduzir custo computacional das LMIs (Delmotte et al., 2007).

Esta dissertação se insere no contexto de promover condições LMI de análise e síntese segundo o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ que sejam menos conservadoras. Almeja-se obter condições abrangentes (ou seja, que possam ser aplicadas aos mais diversos sistemas TS), mas que ao mesmo tempo estabeleçam resultados aprimorados, garantindo melhor índice de desempenho.

Os resultados são aplicados ao problema de sincronização de osciladores acoplados. Embora o estudo desse problema tenha desdobramentos importantes no campo das comunicações (Tse et al., 2005) (mais recentemente também tem sido discutida sua aplicação na modelagem de sistemas dinâmicos, veja (Tôrres, 2007)), aqui o interesse se dá por testar na prática as estratégias de controle desenvolvidas. Como em outros trabalhos (Liao e Huang, 1999; Millerioux e Daafouz, 2001; Morgül e Solak, 1996), a sincronização é obtida em uma estrutura semelhante ao projeto de um observador de estados robusto. Todavia, enquanto tais estratégias se limitam a sistemas lineares por partes, os resultados obtidos aqui, como em (Lian et al., 2001a,b; Tanaka et al., 1998b), são mais genéricos pois baseiam-se na abordagem TS. Resultados práticos foram obtidos, merecendo destaque pois outros trabalhos de sincronismo de sistemas caóticos via abordagem fuzzy, como (Lian et al., 2001a), se limitam a simulações numéricas.

1.1 Organização do Texto

O texto é dividido em 3 blocos. A primeira parte faz uma revisão de literatura e reúne os conhecimentos básicos que servem como suporte para esta dissertação, buscando tornar a leitura encerrada em si mesma. O Capítulo 2 apresenta uma breve introdução aos sistemas fuzzy, desde a teoria de conjuntos até a modelagem Takagi-Sugeno. O Capítulo 3 trata de aspectos de otimização e apresenta também as chamadas Desigualdade Matriciais Lineares, importantes ferramentas de projeto. Encerrando esse primeiro bloco, o Capítulo 4 apresenta os conceitos de estabilidade de sistemas dinâmicos e os resultados tradicionais para o projeto rigoroso de sistemas de controle fuzzy baseados em modelos TS.

Os resultados propostos para o projeto de controladores fuzzy formam o segundo bloco. As condições de projeto baseadas em LMIs dividem-se em dois capítulos: no Capítulo 5 estão as condições quadráticas e no capítulo 6 as chamadas condições não-quadráticas.

Finalmente, os resultados experimentais são mostrados no capítulo 7. Alguns testes de transmissão de informações são mostrados para comprovar a eficiência das estratégias propostas. As conclusões vêm no Capítulo 8, junto com propostas de continuidade da pesquisa.

Capítulo 2

Fundamentos Fuzzy

A teoria de sistemas fuzzy é uma abordagem para a resolução de problemas complexos nos quais existe a necessidade de mecanismos que tratem informações imprecisas por meio de raciocínio aproximado. Ao longo das últimas décadas, houve um desenvolvimento substancial dos conjuntos e sistemas fuzzy, sendo aplicados em sistemas de controle, modelagem de sistemas dinâmicos, previsão de séries temporais, reconhecimento de padrões, inteligência artificial, até mesmo em medicina, logística de transportes ou economia. Neste capítulo, as noções básicas desta teoria serão brevemente apresentadas enfatizando a modelagem fuzzy Takagi-Sugeno, foco principal das ferramentas de controle desenvolvidas nesta dissertação.

2.1 Conjuntos Fuzzy

A noção de conjuntos fuzzy foi introduzida por [Zadeh \(1965\)](#) como uma alternativa para tratar, de maneira formal, problemas de caráter subjetivo que tipicamente envolvam informações vagas e imprecisas, que necessitem de um raciocínio aproximado, ou ainda para lidar com problemas nos quais há tanto dados numéricos quanto conhecimento na forma lingüística.

Seja X determinado universo de discurso, no qual representa-se um elemento genérico por x , e um determinado conjunto é designado por A . Na teoria clássica de conjuntos, um dado elemento tem caráter binário: o elemento pertence ($x \in A$) ou não pertence ($x \notin A$) ao conjunto.

Através de uma função característica f_A é possível definir esta propriedade, fazendo o mapeamento dos elementos do universo de discurso no conjunto binário $\{0, 1\}$:

$$f_A(x) : X \rightarrow \{0, 1\} \quad f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se } x \in A \\ 0 & \text{se e somente se } x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

Caso o problema em questão seja discriminar no universo \mathbb{Z} quais são os números primos, o conceito clássico é suficiente, pois existe uma definição bastante rigorosa de numerais primos. Contudo, no caso em que X é definido como \mathbb{R} e A representa o conjunto dos números muito maiores que a , o problema se torna muito subjetivo.

Por um lado, essa subjetividade está ligada ao fato de que, dependendo do contexto, o

critério que define quais são os números muito maiores que a pode mudar. Os exemplos a seguir tentam ilustrar essa questão.

Seja um sistema dinâmico linear, estável e de 3ª ordem com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + 1)(\gamma s + 1)}, \quad (2.2)$$

onde se verifica a existência de um pólo real e outro par de pólos, que podem ser complexos conjugados ou reais dependendo do valor de $\zeta\omega_n$.

Na prática, verifica-se que quando

$$|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n| \quad (2.3)$$

o desempenho do sistema pode ser aproximado pelo desempenho de um sistema de segunda ordem (Dorf e Bishop, 1998). Neste caso específico, é possível considerar uma relação de dez vezes como muito maior.

Em contrapartida, considere um transistor de junção bipolar. A relação entre as correntes de coletor i_c e emissor i_e é dada segundo (Sedra e Smith, 1998, cap. 4):

$$i_c = \frac{\beta}{\beta + 1} i_e,$$

onde β é o ganho de corrente de emissor comum. Valores típicos de β nesses componentes são $\beta \geq 100$. De acordo com a aplicação, considerar um ganho 10β não será significativo na relação das correntes, i.e., uma ordem de grandeza a mais não será considerada muito maior.

Além da subjetividade imposta pelo contexto, outra dificuldade com a noção tradicional de conjuntos é a necessidade de se definir um limiar rigoroso para separar elementos em conjuntos.

Retomando o exemplo do sistema dinâmico mostrado em (2.2), seja A o conjunto dos sistemas dinâmicos onde há dominância de pólos, ou seja, cujos elementos satisfazem (2.3). Somente quando há uma relação de dez vezes entre módulo do pólo dominado e do produto entre coeficiente de amortecimento e frequência natural tem-se que $x \in A$. Contudo, em um sistema onde a relação é de 9,9 vezes não se considerará dominância dos pólos, mesmo que a resposta dinâmica se assemelhe muito a de um sistema no qual há relação de 10 vezes.

Os exemplos acima servem para ilustrar as limitações da noção clássica de conjuntos, justificando a necessidade de um conceito mais abrangente. Vários são os exemplos que motivam o uso de sistemas fuzzy, sendo que muitos podem ser vistos em (Tsoukalas e Uhrig, 1997; Jang et al., 1997; Tanscheit et al., 2007). Na sequência os fundamentos dos conjuntos fuzzy serão apresentados formalmente.

2.1.1 Pertinência

Um conjunto fuzzy F é caracterizado por uma função de pertinência (função característica ou função de compatibilidade) $f_F(x)$ que associa a cada elemento do universo de discurso X um

número no intervalo real $[0, 1]$. Sua representação é feita por meio de um conjunto de pares ordenados (Tsoukalas e Uhrig, 1997)

$$F = \{(x, f_F(x))\}, \quad x \in X.$$

Desta forma, a dicotomia da concepção clássica, na qual um elemento x pertence ou não pertence a um conjunto é abandonada, cedendo lugar ao conceito de pertinência. O valor atribuído pela função característica $f_F(x)$ indica o grau de pertinência de x ao conjunto F . Aproximando-se da unidade, maior é o grau de pertinência de x em F .

Considere a tarefa de classificar um grupo de indivíduos em relação a altura (Jang et al., 1997). Segundo a concepção clássica, é possível adotar como métrica que indivíduos altos são aqueles cuja estatura é superior ou igual a 2 m. A função característica teria o padrão mostrado na Figura 2.1.a. Segundo essa classificação, um indivíduo com 2,01 m é alto ao passo que um indivíduo medindo 2 cm a menos não faz parte do mesmo conjunto. Tal critério não parece razoável.

Contudo, segundo a concepção de grau de pertinência, pode-se atribuir valores decrescentes de pertinência à medida em que a estatura reduz: $f_F(2) = 1$, $f_F(1,9) = 0,9$, $f_F(1,65) = 0,5$, $f_F(1) = 0$, como ilustrado pela Figura 2.1.b. Neste caso, indivíduos com 1,99 m possuem um alto grau de pertinência ao conjunto de indivíduos altos.

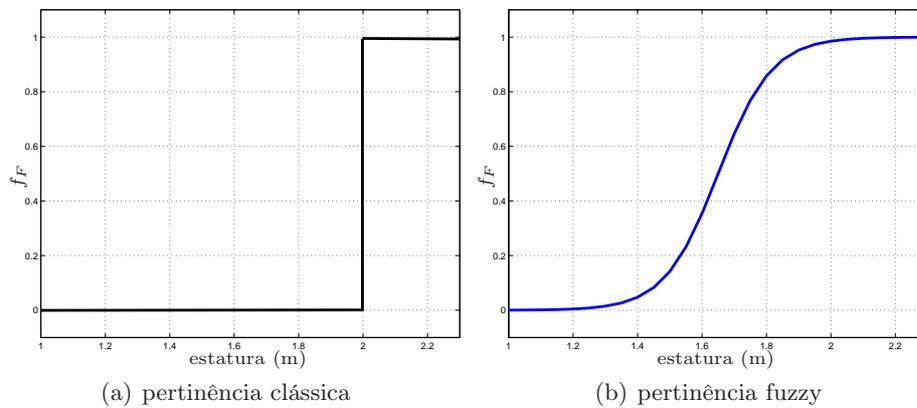


Figura 2.1: Pertinência de indivíduos com relação à estatura.

2.1.2 Operações

Com base nessa concepção de conjuntos, Zadeh (1965) definiu também em seu trabalho seminal algumas propriedades e operações com conjuntos fuzzy. Tais resultados buscam estender os conceitos da teoria ordinária de conjuntos, incluindo-a como caso particular.

União: o conjunto U é a união de F e S ($U = F \cup S$) caso

$$f_U(x) = \max(f_F(x), f_S(x)) = f_F(x) \vee f_S(x).$$

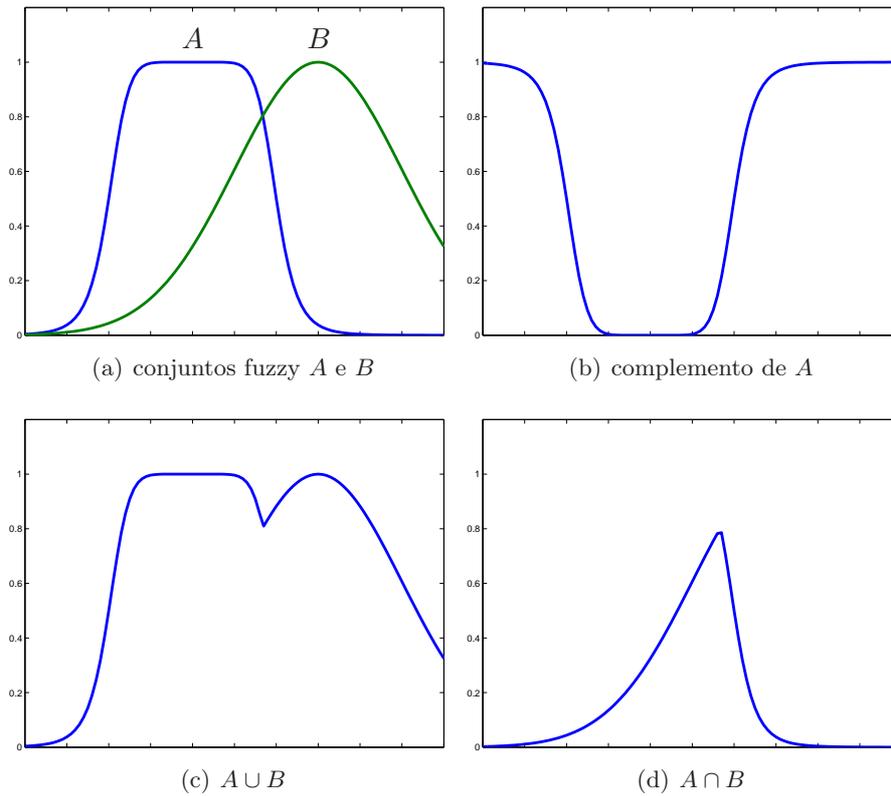


Figura 2.2: Operações com conjuntos fuzzy.

O conjunto U representa o menor conjunto fuzzy que contém F e S . Se um conjunto D contém F e S então também contém a união de ambos.

Intersecção: o conjunto I é a intersecção de F e S ($I = F \cap S$)

$$f_I(x) = \min(f_F(x), f_S(x)) = f_F(x) \wedge f_S(x).$$

Logo, I é o maior conjunto fuzzy que está contido em F e S . Como no caso dos conjuntos clássicos, A e B serão disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.

Complemento: o complemento de um conjunto F denotado por F' é definido por

$$f_{F'}(x) = 1 - f_F(x).$$

Note que estes operadores funcionam exatamente como seus correspondentes da teoria de conjuntos ordinária, quando a função característica é dada por (2.1). É interessante ressaltar que propriedades dos conjuntos ordinários como distributividade, associatividade, comutatividade, involução, leis transitiva e de De Morgan também valem para as operações com conjuntos fuzzy (Jang et al., 1997; Tanscheit et al., 2007).

A Figura 2.2 ilustra os operadores apresentados até aqui. Tais operadores foram apresentados da mesma forma que Zadeh (1965) propôs originalmente. Existem outros operadores adotados para conjuntos fuzzy, denominados norma triangular (normas-t) e co-norma

triangular (co-normas-t ou normas-s) (Jang et al., 1997, cap. 2)(Tsoukalas e Uhrig, 1997, cap. 3)(Tanscheit et al., 2007). É interessante notar que dependendo da norma escolhida, algumas propriedades dos conjuntos ordinários não são válidas para conjuntos fuzzy.

2.1.3 Terminologia

A seguir enuncia-se parte da terminologia de conjuntos fuzzy que será utilizada ao longo do texto. Consulte (Jang et al., 1997; Tsoukalas e Uhrig, 1997; Pedrycz e Gomide, 1998) para uma lista completa.

Conjunto Vazio: um conjunto fuzzy é vazio ($F = \emptyset$) sse¹ sua função de pertinência é nula em X .

Igualdade: dois conjuntos fuzzy F e S são iguais ($F = S$) sse $f_F(x) = f_S(x) \forall x \in X$.

Subconjunto: F é um subconjunto de S sse $f_F \leq f_S$. Assim $F \subset S$ indica que F está contido em S (F é um subconjunto de S).

Suporte²: subconjunto de X para o qual $f_F(x) > 0$.

Normalidade: Um conjunto fuzzy é dito normal caso seu suporte não seja vazio.

Ponto de Cruzamento³: Um ponto x_c de A para o qual a função de pertinência é 0,5 é chamado ponto de cruzamento. Ou seja, $x_c \in \{x | f_A(x) = 0,5\}$.

Partição: Segundo (Nguyen et al., 2003), partições são conjuntos fuzzy que juntos definem um universo de discurso. Para definir formalmente o conceito de partição, considere $\{F_0, F_1, \dots, F_n\}$ conjuntos fuzzy normais definidos em um universo de discurso X , sendo $f_{F_0}, f_{F_1}, \dots, f_{F_n}$ suas respectivas funções de pertinência. Esses conjuntos serão partições de X se $\forall x \in X \sum_{i=1}^n f_{F_i}(x) = 1$.

2.2 Variáveis Lingüísticas

Por variável lingüística, entende-se uma variável cujos valores são nomes ou sentenças (Zadeh, 1975), ao invés de assumirem apenas valores específicos como ocorre com variáveis numéricas. Os nomes e sentenças, por sua vez, são conjuntos fuzzy.

Por exemplo, a temperatura de uma sala é uma variável lingüística. Se por um lado é possível expressá-la com precisão em termos de um valor na escala Celsius, caso seja medida por meio de um termômetro, também é viável informá-la de maneira menos precisa, expressando-a por meio de palavras (quente, fria, muito fria) que traduzem uma percepção particular, subjetiva.

O valor de uma variável lingüística (denominado valor lingüístico ou valor fuzzy) é uma sentença composta por termos primários (no exemplo da temperatura: *alta, baixa, média*); por conectivos lógicos (*e, ou, não*); e de modificadores (*muito, pouco, extremamente*). Utilizando conectivos e modificadores, novos valores lingüísticos são obtidos a partir dos termos primários. Por exemplo, pode-se dizer que a temperatura da sala é “não muito fria”. Cada valor lingüístico

¹Abreviação para se e somente se

²Um conjunto fuzzy cujo suporte é um único elemento é chamado de conjunto “singleton”

³Em inglês, “crossover points”

por sua vez é representado por meio de um conjunto fuzzy, com sua respectiva função de pertinência.

Quando um valor lingüístico é formado apenas por termos primários, denomina-se valor primário. Quando o valor lingüístico é formado por termos primários mais conectivos ou modificadores, denomina-se valor composto (Tsoukalas e Uhrig, 1997, cap. 5).

Na Figura 2.3a são mostrados dois valores fuzzy primários para a variável temperatura. Já na Figura 2.3b outro valor lingüístico para temperatura é mostrado, um valor composto.

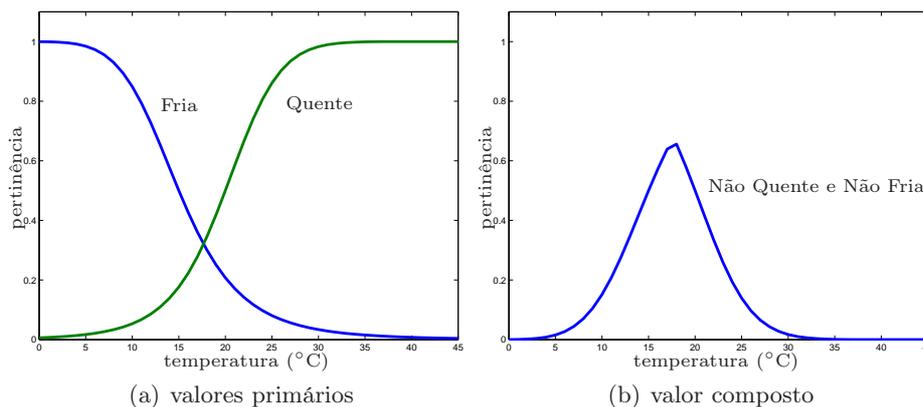


Figura 2.3: Exemplos de valores lingüísticos.

Segundo (Tsoukalas e Uhrig, 1997, cap. 5), uma variável lingüística é composta pelo seu *nome* (no exemplo anterior temperatura); pelos possíveis *valores fuzzy (lingüísticos)* que pode assumir (exemplo: alta, baixa, muito alta, etc.), os quais são nomes (rótulos) de conjuntos fuzzy; pelo *universo de discurso*; e, finalmente, pelas *funções de pertinência* que associam um grau de pertinência a cada elemento do universo de discurso.

Variáveis lingüísticas servem tanto para caracterizar fenômenos complexos via uma abordagem vaga, quando são identificadas através de seus valores fuzzy, ou servem para uma caracterização quantitativa e precisa, quando se utiliza as funções de pertinência. Esta característica dual das variáveis lingüísticas as tornam convenientes para abordar problemas de forma quantitativa ou qualitativa (Tsoukalas e Uhrig, 1997).

2.3 Lógica Fuzzy

O desenvolvimento da lógica fuzzy seguiu passos semelhantes aos da teoria de conjuntos fuzzy, na medida em que se buscou fazer com ambos uma extensão dos conceitos clássicos.

Na lógica tradicional, a forma básica de se chegar a uma conclusão é através de silogismos. Em um silogismo, existem duas premissas a partir das quais se pode deduzir uma conclusão. Tradicionalmente, a lógica segue o *modus ponendo ponens*⁴, no qual o fato de se constatar a veracidade da premissa A implica na veracidade de B , pois há uma outra premissa que estabelece que A implica em B ($A \rightarrow B$).

⁴Do Latim: modo que afirma afirmando. Também é chamado de *modus ponens*

Por exemplo, considere que a premissa A significa que “a temperatura da água é 100°C” e que B indica que “a água está fervendo”. Então caso seja verdade que “a temperatura da água é 100°C” também será verdade que “a água está fervendo”. O conceito segue a estrutura a seguir:

- premissa (regra): se x é A , então y é B ($A \rightarrow B$)
- premissa (fato): x é A
- conclusão: y é B

Todavia, em diversas situações práticas a lógica é adotada de forma aproximada. Considere a implicação (Jang et al., 1997) “se o tomate está vermelho, então ele está maduro”. Se na premissa é estabelecido que “o tomate está quase todo vermelho” então é plausível inferir que “o tomate está quase maduro”. Contudo, a estrutura da lógica tradicional não permite essa conclusão.

Esta forma de raciocínio aproximado é sumarizada da forma a seguir:

- premissa (regra): se x é A , então y é B ($A \rightarrow B$)
- premissa (fato): x é A'
- conclusão: y é B'

sendo que A' e B' são próximos a A e B , respectivamente. Logo, a regra “se x é A , então y é B ” associa uma função de pertinência $f_{A \rightarrow B}(x, y)$ que mensura o grau de veracidade (similaridade) da implicação. No exemplo ilustrativo do tomate, quanto mais vermelho ele for, será considerado mais maduro. Este procedimento de dedução lógica é conhecido como raciocínio fuzzy, raciocínio aproximado ou *modus ponens* generalizado (Jang et al., 1997).

2.3.1 Regras Se-Então

Regras Se-Então e o raciocínio fuzzy formam o cerne da vasta gama de sistemas fuzzy encontrados na literatura (Jang et al., 1997). Uma regra Se-Então (também conhecida como regra fuzzy, implicação fuzzy ou proposição condicional fuzzy) tem a seguinte forma

$$R : \begin{cases} \text{SE} & x \text{ É } A \\ \text{ENTÃO} & y \text{ É } B \end{cases} \quad (2.4)$$

onde R identifica a regra; A e B são variáveis lingüísticas; x , y são elementos dos universos de discurso X , Y , respectivamente. Normalmente, denomina-se a proposição $x \text{ É } A$ como antecedente, enquanto $y \text{ É } B$ é chamado conseqüente (ou conclusão); x é chamada de variável premissa.

Na concepção tradicional, ativa-se (dispara-se) uma regra Se-Então somente quando a variável premissa x é exatamente igual ao antecedente. Neste caso, a inferência produzida será: y é exatamente igual ao conseqüente.

Na concepção fuzzy, a regra Se-Então é disparada quando houver um grau de similaridade não nulo entre a variável premissa e o antecedente. Como resultado, infere-se uma conclusão que mantenha algum grau de similaridade com o conseqüente da regra. Nota-se, mais uma vez, que os conceitos tradicionais estão embutidos na teoria fuzzy. Se a variável premissa x possui total similaridade com o antecedente A então a conclusão será que y é o próprio B .

Uma regra fuzzy pode possuir mais de um antecedente. Um exemplo simples é dado a seguir:

$$R : \begin{cases} \text{SE} & x \text{ É } A \text{ E } z \text{ É } C \\ \text{ENTÃO} & y \text{ É } B \end{cases} \quad (2.5)$$

Neste caso, a maneira de inferir uma conclusão é bem mais elaborada. A conclusão depende tanto da similaridade de x em A , quanto da similaridade de z em C . Além disso, depende da relação entre ambos antecedentes, bem como da relação deles com o conseqüente.

Por exemplo, considere um veículo trafegando em uma estrada. Uma regra com múltiplos antecedentes para inferir sobre a velocidade adequada do carro pode ser: “se a curva é fechada ou a pista está molhada, então dirija em baixa velocidade”.

No caso de pista seca, quanto mais fechada for a curva, menor deve ser a velocidade. Em outras palavras, quanto maior for a pertinência da variável “curva” no conjunto fuzzy “fechada”, maior deverá ser a pertinência da “velocidade” no conjunto “baixa”.

Se o carro viaja pela mesma curva porém com pista molhada, por questão de segurança, a velocidade deverá ser ainda menor. Neste caso a pertinência da “velocidade” no conjunto “baixa” será afetada também pelo valor lingüístico da variável “pista”.

Existem diversas configurações que definem como os antecedentes interagem entre si e com o conseqüente da regra para produzir uma conclusão. Tais configurações são chamadas mecanismos de inferência e podem ser vistos com maiores detalhes em (Jang et al., 1997; Tsoukalas e Uhrig, 1997; Pedrycz e Gomide, 1998).

2.4 Sistemas de Inferência

Sistemas de inferência são ferramentas computacionais utilizadas nas mais diversas áreas da Engenharia e agregam os conceitos de conjuntos fuzzy, variáveis lingüísticas e raciocínio aproximado, processando dados por meio de mecanismo de inferência. A estrutura básica de um sistema de inferência é mostrada na Figura 2.4.

Sistemas de inferência normalmente, embora não seja obrigatório, recebem como entrada valores precisos⁵. Isto ocorre pois, na prática, os dados de entrada são obtidos por meio de medições ou observações. É necessário portanto a etapa chamada fuzzificação, que transforma entradas precisas em conjuntos fuzzy.

Após a interpretação das entradas pelo mecanismo de inferência, etapa identificada como inferência na Figura 2.4, é necessário fornecer uma informação precisa. No caso de um sistema

⁵Também chamadas entradas “crisp”

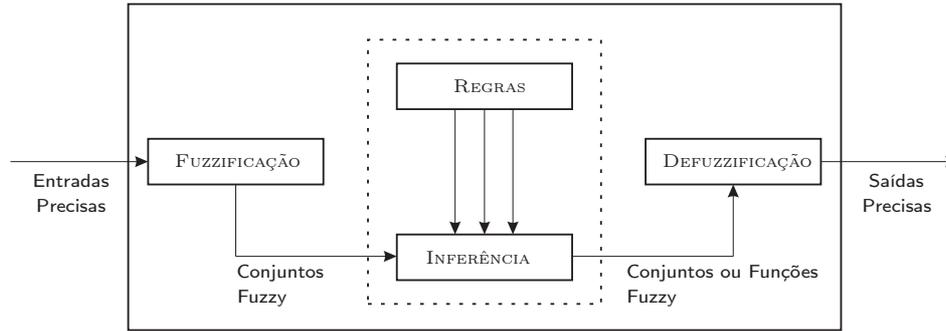


Figura 2.4: Diagrama esquemático do sistema de inferência.

de controle, por exemplo, o sistema de inferência deve fornecer à planta dados ou sinais numéricos precisos. O estágio de defuzzificação extrai de um conjunto fuzzy um valor significativo da informação produzida na etapa de inferência (Tanscheit et al., 2007).

2.4.1 Etapa de Inferência

No estágio de inferência ocorrem as operações com conjuntos fuzzy ao longo de regras Se-Então para processar, por meio de um mecanismo de inferência, as informações da entrada e produzir uma conclusão.

A inferência pode ser resumida em quatro etapas (Jang et al., 1997). Em uma primeira instância, são avaliados os graus de compatibilidade das variáveis premissas com seus respectivos antecedentes nas regras Se-Então. Considerando o caso da regra (2.4), isto significa atribuir uma pertinência da variável x no conjunto A .

Em seguida, é necessário determinar a força (grau) de ativação de uma regra. O grau de ativação da regra é dado pela combinação dos graus de compatibilidade das variáveis premissas com seus antecedentes. Na regra (2.5) cada antecedente (x é A), (z é C), produz um grau de compatibilidade, $f_A(x)$, $f_C(z)$. De acordo com os conectivos lógicos presente na premissa da regra e do tipo de norma adotada, obtém-se um grau de ativação para a regra R , veja na Figura 2.5 denotado por ω_r . Caso em (2.5), por exemplo, fosse utilizado o conectivo “ou” o resultado produzido seria diferente.

Com base no grau de ativação determina-se o conseqüente produzido por uma determinada regra, chamado conseqüente induzido. Considere novamente a regra (2.5). Se o grau de ativação desta regra é 1, significa que o conseqüente produzido é o próprio B . Ademais, de acordo com o grau de ativação, o conseqüente terá um grau de pertinência em B , i.e, y é B' .

Não raro um sistema de inferência possui mais de uma regra. Cada regra produz um conseqüente e o resultado global da etapa inferência dependerá da combinação desses conseqüentes. Esta etapa é chamada de agregação, a qual tem por resultado um conjunto fuzzy (função de pertinência) ou uma função.

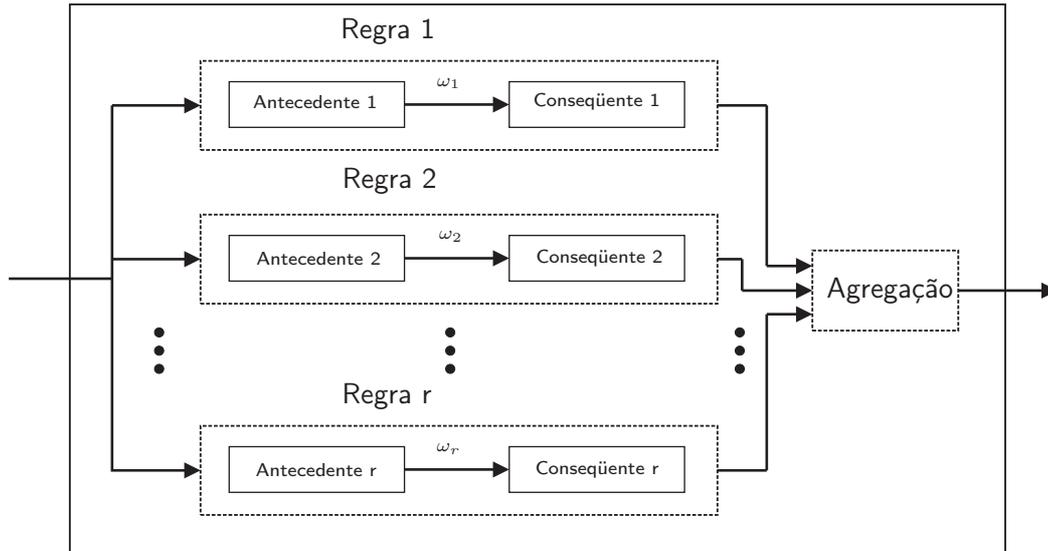


Figura 2.5: Diagrama esquemático da etapa de inferência.

2.5 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

O modelo fuzzy Takagi-Sugeno (TS) consiste em um sistema de inferência capaz de descrever, de forma exata ou aproximada, sistemas dinâmicos não-lineares por meio de um conjunto de sistemas dinâmicos lineares, localmente válidos, interpolados de forma suave, não-linear e convexa. Embora originalmente proposto por [Takagi e Sugeno \(1985\)](#), o modelo TS também é conhecido na literatura como modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK). Isto se deve aos trabalhos subsequentes de [Sugeno e Kang \(1986\)](#) relacionados a metodologias desenvolvidas para identificação desse tipo de modelo. Pela primazia histórica, adotar-se-á nesta dissertação a nomenclatura modelo TS.

Em termos de modelagem, sabe-se que os modelos TS têm a capacidade de aproximar uniformemente funções quaisquer em um domínio compacto ([Zeng et al., 2000](#); [Tanscheit et al., 2007](#); [Tanaka e Wang, 2001](#); [Ying, 2000](#)). Em outras palavras, modelos TS têm a capacidade de aproximação universal.

Além disso, uma vantagem sobre outros modelos fuzzy é o fato dos consequentes serem sistemas dinâmicos, demandando uma menor quantidade de regras Se-Então, o que facilita substancialmente a tarefa de identificação de modelos ([Johansen et al., 2000](#)). Sob o ponto de vista de controle, modelos TS permitem conciliar técnicas de controle não-linear e, ao mesmo tempo, estender de forma rigorosa resultados da teoria de controle de sistemas lineares ([Teixeira e Assunção, 2007](#)).

Considere um sistema dinâmico não-linear a tempo discreto, descrito pelas equações a seguir:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) + g(u_k) \\ y_k &= h(x_k) \end{aligned} \tag{2.6}$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados; $u_k \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entradas; $y_k \in \mathbb{R}^q$ a saída medida; o período de amostragem entre x_{k+1} e x_k é dado por Δt .

O modelo TS é dado por um conjunto de r regras Se-Então:

$$R_i : \begin{cases} \text{SE} & q_k^1 \text{ É } \Phi_1^i \text{ E } q_k^2 \text{ É } \Phi_2^i \text{ E } \dots \text{ E } q_k^s \text{ É } \Phi_s^i \\ \text{ENTÃO} & \begin{aligned} x_{k+1} &= A_i x_k + B_i u_k \\ y_k &= C_i x_k \end{aligned} \end{cases} \quad (2.7)$$

tal que R_i , $i \in \mathcal{R}$, denota a i -ésima regra fuzzy. Na regra R_i as variáveis lingüísticas são representadas por Φ_j^i , $j \in \mathcal{S}$; $q_k^j \in Q$, $j \in \mathcal{S}$, denotam as variáveis premissas avaliadas no instante k ; Q é o universo de discurso; A_i , B_i e C_i são matrizes reais de dimensão apropriada, representando o modelo local da regra R_i .

As variáveis premissas podem ser funções dos estados, distúrbios externos ou condições de operação. Em geral, as variáveis premissas não são funções do vetor de entradas para evitar um processo complicado para defuzzificação de controladores fuzzy (Tanaka e Wang, 2001). Para simplificar a notação, as variáveis premissas são agrupadas no vetor

$$q_k = [q_k^1 \quad q_k^2 \quad \dots \quad q_k^s]. \quad (2.8)$$

Na premissa das regras, avalia-se o grau de compatibilidade de q_k^j aos respectivos conjuntos fuzzy das variáveis lingüísticas Φ_j^i , obtendo-se graus de pertinência $\mu_j^i(q_k^j)$.

O grau de ativação do antecedente da regra R_i é dado por

$$w_i[q_k] = \prod_{j=1}^s \mu_j^i(q_k^j). \quad (2.9)$$

Portanto, a norma-t adotada para determinar o grau de ativação do antecedente é o produto algébrico das pertinências. Vale ressaltar que é necessário que ao menos uma regra do modelo esteja ativa, garantindo as seguintes propriedades

$$w_i[q_k] \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r w_i[q_k] > 0. \quad (2.10)$$

O conseqüente induzido por cada regra R_i é uma ponderação do modelo local

$$\text{conseqüente induzido } i \begin{cases} w_i[q_k] (A_i x_k + B_i u_k) \\ w_i[q_k] C_i x_k \end{cases} \quad (2.11)$$

A etapa de agregação é simplesmente dada pela média ponderada das regras. Assim o modelo TS final é dado por

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \sum_{i=1}^r h_i[q_k] (A_i x_k + B_i u_k) \\
y_k &= \sum_{i=1}^r h_i[q_k] C_i x_k,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

sendo que a ponderação normalizada de cada regra é dada por:

$$h_i[q_k] = \frac{w_i[q_k]}{\sum_{i=1}^r w_i[q_k]}, \tag{2.13}$$

que satisfaz a propriedade de combinação convexa

$$\sum_{i=1}^r h_i[q_k] = 1, \quad h_i(q_k) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{R}. \tag{2.14}$$

Portanto, o modelo TS busca modelar a dinâmica não-linear em (2.6) por meio da interpolação de modelos dinâmicos lineares. Como as funções de pertinência, geralmente, são não-lineares e possuem derivadas contínuas (Tanaka e Wang, 2001), o modelo resultante é uma combinação convexa de modelos locais que é suave e não-linear.

2.5.1 Aspectos de Modelagem

Em modelagem matemática, é possível obter modelos tanto a partir de dados coletados de entrada e saída, quanto a partir da física do processo (Aguirre, 2004). Com modelos TS não é diferente.

Desde os trabalhos pioneiros na área de identificação de modelos TS, realizados por Sugeno e Kang (1986), muitas metodologias foram desenvolvidas para identificação de sistemas TS. Na seqüência uma pequena revisão bibliográfica dentro deste vasto universo é apresentada.

Basicamente, as etapas necessárias para identificar um modelo TS são: seleção de entradas relevantes; escolha da estrutura do modelo, que envolve determinar quantidade de regras, tipo de funções de pertinência e tipo de conseqüente; e estimação de parâmetros, das funções de pertinência e dos conseqüentes.

Em (Saez e Zufiga, 2005; Hadjili e Wertz, 2000) a questão da seleção de entradas relevantes na modelagem é abordada. Em (Saez e Zufiga, 2005) é utilizada análise de sensibilidade para eliminar alguns desses descritores. Já em (Hadjili e Wertz, 2000) a relação das entradas com as partições fuzzy é usada como critério de eliminação.

Para escolha de estrutura, Nounou e Nounou (2005) utilizam uma abordagem com múltiplos modelos TS baseados na representação dos dados em diferentes escalas de tempo. Em (Casillas et al., 2005), uma abordagem via algoritmos genéticos é usada para obter uma estrutura de modelo TS que mantenha um compromisso entre requisitos conflitantes: desempenho de predição e capacidade de interpretação do modelo.

Com relação ao ajuste de parâmetros, [Teixeira e Assunção \(2007\)](#) apresentam um método para obter sistemas lineares locais em pontos que não são a origem. No trabalho de [Machado \(2003\)](#), técnicas de otimização são empregadas para ajustar funções de pertinência, de modo a minimizar o erro de modelagem entre a planta e o modelo TS. Em [\(Johansen et al., 2000\)](#) discute-se a questão de modelos locais que não possuem pontos de equilíbrio nas partições onde são válidos, dando enfoque em métodos de regressão para ajuste. Em [\(Du e Zhang, 2008\)](#), adota-se uma abordagem generalizada, buscando realizar o ajuste simultâneo das três etapas de identificação: descritores de entrada, estrutura das regras e parâmetros das funções de pertinência.

Uma outra abordagem para modelagem, bastante sistemática, que permite a representação exata, local ou global, de sistemas não-lineares em um domínio compacto é proposta por [Taniguchi et al. \(2001\)](#), conhecida como abordagem de não-linearidade setorial⁶. Nesse método, 2^N modelos são gerados para representar N não-linearidades do sistema.

⁶Do inglês “sector nonlinearity approach”

Capítulo 3

Desigualdades Matriciais Lineares

Embora a história da relação entre LMIs e análise de sistemas dinâmicos remonte mais de um século (Boyd et al., 1994), foi a partir dos anos 90 que descrições LMIs despontaram como ferramentas poderosas para resolver problemas de controle (Palhares e Gonçalves, 2007), inclusive para sistemas fuzzy, impulsionadas pelo desenvolvimento de algoritmos eficientes de otimização convexa. Neste capítulo alguns conceitos de otimização, LMIs e sua aplicação em controle serão discutidos¹.

3.1 Conceitos Preliminares

O objetivo desta seção é apresentar alguns conceitos de análise convexa que serão úteis para a discussão sobre LMIs. Tais conceitos podem ser vistos com maiores detalhes em (Scherer e Weiland, 2005). Uma referência completa sobre o tema é o livro de Boyd e Vandenberghe (2004).

3.1.1 Conjuntos Convexos

Um conjunto C é convexo se um segmento de reta entre dois pontos quaisquer de C está inteiramente em C . Formalmente, C é convexo se dados quaisquer $x_1, x_2 \in C$ (Scherer e Weiland, 2005):

$$x := \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (3.1)$$

A Figura 3.1 ilustra conjuntos convexo e não-convexo no \mathbb{R}^2 .

Um ponto x que satisfaça (3.1) é chamado de combinação convexa de x_1 e x_2 . De forma genérica

$$x := \sum_{j=1}^p \alpha_j x_j, \quad \sum_{j=1}^p \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad (3.2)$$

¹Este breve capítulo apenas coleta resultados básicos sobre análise convexa, de forma a tornar a leitura encerrada em si mesma. Leitores familiares com esse assunto podem deixar de lê-lo

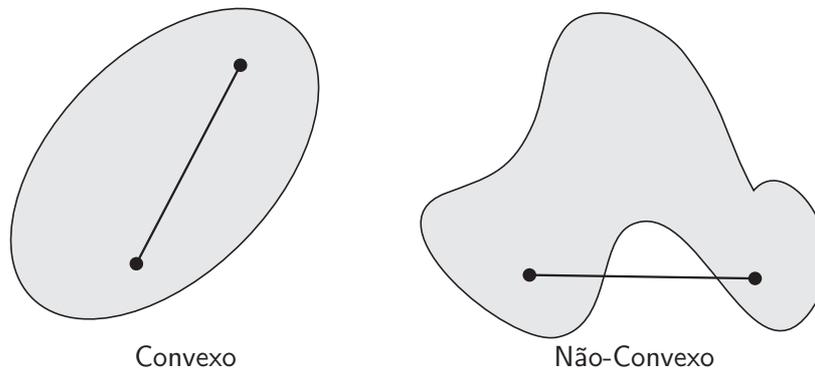


Figura 3.1: Conjuntos no \mathbb{R}^2 .

é uma combinação convexa de x_1, x_2, \dots, x_p .

Portanto, um conjunto é convexo sse contém todas as combinações convexas de seus pontos (Boyd e Vandenberghe, 2004).

A casca convexa de um conjunto C , representada por $\text{co}\{C\}$, é o menor conjunto convexo que contém C . Isto significa que $\text{co}\{C\}$ é o conjunto de todas as combinações convexas dos pontos de C .

3.1.2 Funções Convexas

Uma função $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se o domínio de f é um conjunto convexo C , tal que para quaisquer $x, y \in C$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \quad (3.3)$$

A Figura 3.2a mostra uma função convexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Note que nesse caso uma função convexa sempre encontra-se abaixo do segmento que une dois pontos x e y . Uma função g é côncava se $-g$ é convexa.

Uma outra interpretação para convexidade é dada a seguir. Considere um intervalo arbitrário $[\epsilon^-, \epsilon^+] \subset C$, sendo ϵ_m seu ponto médio. Uma função é convexa caso

$$f(\epsilon_m) \leq \frac{f(\epsilon^-) + f(\epsilon^+)}{2},$$

para todo ϵ_m e $[\epsilon^-, \epsilon^+]$.

3.1.3 Problemas de Otimização

Um problema de otimização tem a estrutura a seguir (Boyd e Vandenberghe, 2004):

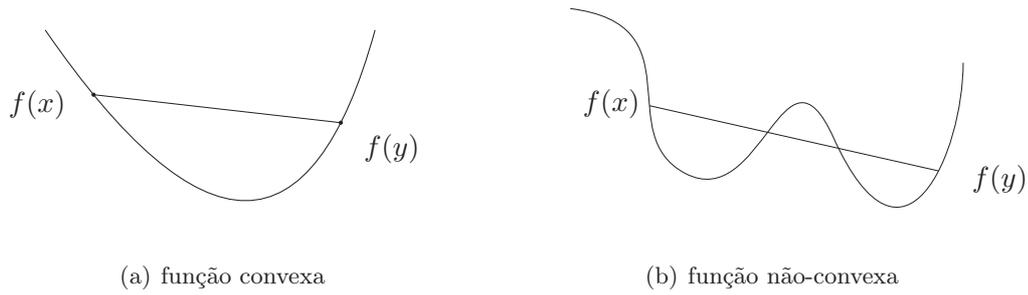


Figura 3.2: Exemplos de funções tais que $C \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && f_0(x), \\
 & \text{sujeito a} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & && h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ a variável a ser otimizada; $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo; f_i são as restrições de desigualdade, enquanto h_i são restrições de igualdade.

O conjunto $S = \{y \mid f_i(y) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } h_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p\}$ é chamado conjunto factível. Um ponto x é chamado solução factível se $x \in S$, ao passo que o ponto x^* é chamado solução ótima quando $f_0(x^*)$ é o menor valor da função objetivo no conjunto S .

Caso não houver função objetivo, o problema de otimização torna-se um problema de factibilidade:

$$\begin{aligned}
 & \text{encontre} && x, \\
 & \text{sujeito a} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & && h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

O problema de factibilidade busca determinar se as restrições são consistentes. A resposta, caso o problema seja factível, é um ponto qualquer do conjunto factível.

Um mínimo local é uma solução factível x_0 que minimiza f_0 para pontos em uma vizinhança no conjunto factível. Isto é, se existir $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \{\forall x \in S \mid \|x - x_0\| < \epsilon\},$$

então x_0 é um mínimo local de f_0 .

Formalmente, o mínimo local é a solução do seguinte problema na variável z ²

$$\begin{aligned}
 & \min && f_0(z), \\
 & \text{s.a} && f_i(z) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & && h_i(z) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\
 & && \|z - x_0\| \leq \epsilon.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

²Note que para simplificar a notação, abrevia-se “minimize” por “min” e “sujeito a” por “s.a”

A seguir os problemas de otimização convexa serão considerados, cujas propriedades os tornam bastante especiais dentro do panorama geral de otimização.

3.1.4 Otimização Convexa

Um problema de otimização convexa tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x), \\ \text{s.a} \quad & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & c_i'x = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Um problema de otimização convexa tem como função objetivo e restrições de desigualdade funções convexas. Além disso, as restrições de igualdade são afins. Uma propriedade fundamental de otimização convexa é a relação entre otimalidade local e global, enunciada a seguir.

Lema 1 (Boyd e Vandenberghe (2004)) *Considere um conjunto convexo não-vazio C e $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então:*

- *O conjunto $\bar{C} \subset C$ no qual f atinge seu mínimo é convexo*
- *Qualquer mínimo local também é um mínimo global de f*

Essa propriedade, ausência de mínimos locais, é um dos atrativos de otimização convexa. Outra característica muito interessante, estabelecida pelo seguinte lema, é o fato de que limitantes superiores para funções convexas podem ser determinados a partir de subconjuntos de seu domínio.

Lema 2 (Scherer e Weiland (2005)) *Seja S_0 um conjunto qualquer e considere $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, cujo domínio $S := \text{co}\{S_0\}$. Assim, $f(x) \leq \beta \forall x \in S$ se e somente se $f(x) \leq \beta \forall x \in S_0$.*

Esse lema estabelece uma maneira para se determinar um limitante para f . Ao se verificar que $f(x) \leq \beta$ nos elementos de S_0 garante-se que β majora f em todo seu domínio. No caso em que S_0 é um conjunto finito, esse lema tem grande apelo prático, pois basta realizar um conjunto finito de testes para se verificar que $f(x) \leq \beta, \forall x \in S$. Assim

$$\beta_0 := \sup_{x \in S} f(x) = \max_{x \in S_0} f(x).$$

Mais adiante, será visto que estas características peculiares da otimização convexa são muito úteis para formular diversos problemas de controle baseados em LMIs, inclusive para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno.

3.2 Forma Geral das LMIs

Uma LMI é uma desigualdade na forma a seguir (Boyd et al., 1994; Palhares e Gonçalves, 2007):

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succeq 0, \quad (3.8)$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^n$ é uma variável e as matrizes $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$ são dadas. A desigualdade pode ser estrita também. A grosso modo, uma LMI é uma desigualdade com elementos matriciais e simétrica. Um conjunto de LMIs pode ser interpretado como uma única LMI

$$\text{diag}\{F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)\} \succeq 0 := \begin{cases} F_1(x) & \succeq 0, \\ F_2(x) & \succeq 0, \\ & \vdots \\ F_k(x) & \succeq 0 \end{cases}. \quad (3.9)$$

Normalmente, LMIs não são apresentadas na forma canônica (3.8). Considere o seguinte exemplo (Palhares e Gonçalves, 2007)

$$X = X' \succeq \epsilon I, \quad \epsilon > 0. \quad (3.10)$$

Neste caso $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma variável matricial, simétrica, que deve ser definida positiva e ainda $\lambda(X) \geq \epsilon$. A desigualdade (3.10) pode ser colocada na forma (3.8) adotando-se o vetor $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]'$ como variável

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_3 = \sum_{i=1}^3 F_i x_i \succeq \epsilon I.$$

Tradicionalmente, a notação mais compacta como em (3.10) é adotada para expressar uma LMI. Neste caso, indica-se que (3.10) é uma LMI na variável matricial X .

Ao longo desta dissertação, LMIs irão surgir em dois problemas de otimização convexa. No primeiro, busca-se determinar a factibilidade de um conjunto de LMIs

$$\begin{aligned} &\text{encontre } x, \\ &\text{s.a } F(x) \succeq 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aqui $F(x)$ indica um conjunto de LMIs, pois, como visto em (3.9), podem ser agrupadas como uma única LMI. Neste caso, busca-se determinar uma solução \hat{x} que torne $F(\hat{x})$ verdadeira, i.e., uma solução factível.

Outro problema de otimização consiste em minimizar uma função objetivo linear, sujeita a restrições do tipo LMI

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x, \\ \text{s.a} \quad & F(x) \succeq 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Tais problemas de otimização envolvendo LMIs são tratáveis tanto do ponto de vista teórico quanto prático. Embora não haja uma solução analítica geral, como ocorre com a maioria de problemas de otimização convexa, eles podem ser resolvidos numericamente com garantia de se obter uma solução, caso esta exista. Além disso, consegue-se obter um valor para a função objetivo cuja distância até o valor ótimo pode ser pré-determinada (Boyd et al., 1994).

Atualmente, existem diversos pacotes de otimização disponíveis para resolver LMIs (Palhares e Gonçalves, 2007). O LMI Control Toolbox, pacote desenvolvido por Gahinet et al. (1995) para uso exclusivo no programa computacional de cálculo numérico MATLAB, é dedicado para a resolução de problemas de controle que envolvam LMIs. Outro pacote para MATLAB, voltado para a resolução de problemas de otimização restritos a cones de matrizes simétricas, chama-se SeDuMi, cuja implementação se deve a Strum (1999). Existem diversos pacotes auxiliares que fazem a interface do SeDuMi para a resolução de LMIs, dentre os quais um dos mais populares é o Yalmip (Löfberg, 2004).

Capítulo 4

Estabilidade e Controle de Sistemas Fuzzy

O controle fuzzy surgiu como uma abordagem independente de modelos e baseada em heurísticas, obtendo bastante sucesso após os trabalhos pioneiros de Mamdani e Assilian (1975). Atualmente, destaca-se o controle fuzzy baseado em modelos, no qual os modelos TS têm papel fundamental. Neste escopo, é possível projetar, de forma sistemática, sistemas de controle que garantem não só estabilidade mas também restrições de desempenho em malha-fechada. Neste capítulo apresenta-se essa abordagem mais rigorosa de controle fuzzy.

4.1 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

Na primeira parte deste capítulo, o objetivo é apresentar alguns conceitos fundamentais que embasam a análise de estabilidade e o projeto de controladores de sistemas TS.

Sistemas dinâmicos podem ser representados por um conjunto de n equações diferenciais (ou equações de diferenças, no caso de tempo discreto)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_c(x, t) && \text{contínuo,} \\ x_{k+1} &= f_d(x_k, k) && \text{discreto,} \end{aligned} \tag{4.1}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados; $f_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções não-lineares, chamadas também de campos vetoriais. Uma trajetória do sistema é uma seqüência de valores $x(t)$ ou x_k , que o mesmo descreve partindo da condição inicial $x(0)$ ou x_0 .

Nesta parte do capítulo a discussão irá se restringir a sistemas contínuos, mas os conceitos também são válidos para tempo discreto. Para simplificar a notação, f indicará tanto f_c quanto f_d , que ficará claro pelo contexto.

Esse sistema é dito autônomo quando a equação (4.1) não depende do tempo, i.e.,

$$\dot{x} = f(x). \tag{4.2}$$

Do contrário o sistema é chamado não-autônomo.

Uma classe de pontos especiais no campo vetorial f são chamados pontos de

equilíbrio. O estado x_e é um ponto de equilíbrio (ou ponto fixo, no caso discreto) se uma vez que se tem $x(t) = x_e$, a trajetória permanece indefinidamente em x_e (Slotine e Li, 1991). Formalmente, isto indica que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 && \text{contínuo,} \\ x_{k+1} &= x_k && \text{discreto.} \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Uma questão fundamental acerca de sistemas dinâmicos e que remonta mais de cem anos (Jury, 1996) é o conceito de estabilidade. Nesse aspecto, um dos conceitos mais difundidos é de estabilidade no sentido de Lyapunov (1992).

Basicamente, um sistema é estável quando seu comportamento resiste a perturbações. Em outras palavras, quando existe estabilidade a trajetória de um sistema permanece próxima a um ponto de equilíbrio, caso ela comece próximo desse.

Definição 1 (Estabilidade) *O ponto de equilíbrio x_e é estável se $\forall r > 0, \exists \epsilon > 0$ tal que*

$$\|x(0) - x_e\| \leq \epsilon \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq r, \quad \forall t \geq 0.$$

Do contrário o ponto de equilíbrio é instável.

Segundo essa noção, estabilidade implica que, se as condições iniciais se encontram em uma bola de raio ϵ , centrada em x_e , então as trajetórias resultantes ficarão confinadas indefinidamente a uma bola de raio r , centrada também em x_e . Nota-se que estabilidade como definida aqui é um conceito local.

Definição 2 (Atratividade) *O ponto de equilíbrio x_e é atrativo se $\exists d > 0$ tal que*

$$\|x(0) - x_e\| \leq d \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| \rightarrow 0.$$

Um ponto é atrativo quando existe uma bola de raio d , centrada em x_e , tal que trajetórias cujas condições iniciais partem dessa região convergem para o ponto de equilíbrio.

Note que atratividade não implica em estabilidade e vice-versa. O fato de uma trajetória convergir assintoticamente para o equilíbrio não garante que a mesma permaneceu sempre próxima ao equilíbrio. Por outro lado, um ponto de equilíbrio é considerado estável mesmo que a trajetória não convirja para ele. Todavia, um ponto de equilíbrio pode ser atrativo e estável.

Definição 3 (Estabilidade Assintótica) *O ponto de equilíbrio x_e é assintoticamente estável se é estável e atrativo.*

Estabilidade assintótica implica que trajetórias que começam na vizinhança de um ponto de equilíbrio irão tender ao mesmo porém mantendo-se próximas, a medida que o tempo tende ao infinito. A Figura 4.1 ilustra todos esses conceitos para o caso em que $x \in \mathbb{R}^2$.

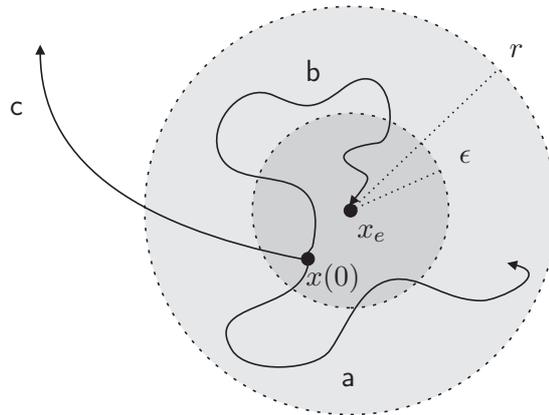


Figura 4.1: Interpretação geométrica de estabilidade: a) estável; b) assintoticamente estável; c) instável.

O conjunto de pontos $\mathcal{B} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x \rightarrow x_e\}$ é chamado de bacia de atração ou região de convergência. Desta forma é interessante classificar um ponto de equilíbrio assintoticamente estável como local ou global.

Definição 4 (Estabilidade Global) *Se a estabilidade assintótica vale para quaisquer estados iniciais, então diz-se que o ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável.*

Um sistema é globalmente assintoticamente estável quando sua bacia de atração é todo o domínio de f . Garantir estabilidade assintótica global é um requisito importante ao se projetar um sistema de controle, principalmente quando ele pode partir de condições iniciais quaisquer.

4.1.2 Método Direto de Lyapunov

Em (Lyapunov, 1992) foram desenvolvidos métodos para verificar a estabilidade de sistemas dinâmicos. Aqui dar-se-á enfoque ao método direto de Lyapunov, chamado também de segundo método de Lyapunov. Contudo, antes de apresentar o método são necessárias algumas definições.

Definição 5 *Uma função escalar contínua $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $w(0) = 0$ é semidefinida positiva sse*

$$w(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad (4.4)$$

Caso a desigualdade seja estrita, então w será definida positiva.

Alternativamente, uma função g é dita semidefinida (definida) negativa caso $-g$ seja semidefinida (definida) positiva.

Teorema 1 (Estabilidade Global de Sistemas Autônomos (Slotine e Li, 1991))

O sistema dinâmico autônomo (4.2) é globalmente estável, se existe uma função escalar $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- V é definida positiva
- V possui derivada de primeira ordem
- \dot{V} é definida negativa
- $V \rightarrow \infty$ a medida em que $\|x\| \rightarrow \infty$

Observação 1 Uma função escalar que atenda a todos os requisitos do Teorema 1 é chamada de função de Lyapunov.

Observação 2 Uma função escalar que satisfaz o último requisito do Teorema 1 é chamada de função radialmente ilimitada.

O método direto de Lyapunov pode ser visto como uma extensão matemática de uma observação física: se a energia total de um sistema é dissipada continuamente, então este sistema deve se acomodar em um ponto de equilíbrio (Slotine e Li, 1991). Neste caso, a analogia que se faz é que função de energia é dada por $V(x)$, sempre positiva, e sua derivada temporal ao longo das trajetórias, $\dot{V}(x) < 0$, representa a dissipação desta energia.

A grande valia deste método está no fato de que pode ser aplicado a sistemas dinâmicos quaisquer. Ao se escolher uma função candidata (radialmente ilimitada e definida positiva) e se constatar que sua derivada ao longo do sistema é definida negativa, garante-se então estabilidade. Portanto, a conclusão acerca da estabilidade advém da observação da variação de uma função escalar (Slotine e Li, 1991).

Contudo, o segundo método de Lyapunov não fornece um procedimento para se determinar uma função de Lyapunov. Existem diversas estratégias para a construção de funções que comprovam estabilidade, porém caso seja selecionada uma função específica que não atende ao Teorema 1, nenhuma conclusão pode ser obtida sobre a estabilidade/instabilidade do sistema¹.

Na seqüência do capítulo, demonstra-se como é possível aplicar o método direto de Lyapunov a sistemas TS. Será visto também que o uso de LMIs pode ser uma alternativa bastante interessante para se construir funções de Lyapunov numericamente.

4.2 Estabilidade de Sistemas TS

Considere novamente o sistema TS mostrado em (2.12) porém em malha aberta:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r h_i[q_k] A_i x_k. \quad (4.5)$$

¹Isto ocorre pois o segundo método de Lyapunov é um conjunto de condições suficientes

A proposta de [Tanaka e Sugeno \(1990\)](#), para investigar a estabilidade deste sistema, consiste em escolher uma função candidata da forma

$$V(x_k) = x_k' P x_k, \quad (4.6)$$

tal que $P = P'$. Essa função possui derivadas contínuas e é radialmente ilimitada. Sua variação no tempo é dada por

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= V(x_{k+1}) - V(x_k) \\ &= x_{k+1}' P x_{k+1} - x_k' P x_k \\ &= x_k' A'(q) P A(q) x_k - x_k' P x_k \\ &= x_k' \{A'(q) P A(q) - P\} x_k, \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo $A(q) := \sum_{i=1}^r h_i[q_k] A_i$.

Caso as condições a seguir sejam satisfeitas

$$P = P' \succ 0 \quad (4.8)$$

$$x_k' \{A'(q) P A(q) - P\} x_k < 0 \quad (4.9)$$

então o sistema (4.5) é globalmente assintoticamente estável. A primeira restrição garante que $V(x_k)$ é uma função definida positiva, primeira condição do Teorema 1, enquanto a outra restrição garante que $\Delta V(x_k)$ é definida negativa, terceira condição do Teorema 1.

A princípio, parecem necessários infinitos testes para se verificar se uma dada matriz P atende à restrição (4.9), pois $A(q)$ depende de $q \in Q$, sendo Q um universo de discurso. O universo pode possuir um número infinito de elementos, por exemplo no caso em que $Q \subset \mathbb{R}$ ([Lian et al., 2006](#)).

Contudo, isto não é preciso, pois modelos TS são combinações convexas de sistemas dinâmicos lineares. Note que $A(q) := \mathbf{co}\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ por causa da propriedade de combinação convexa das funções de pertinência². Desta forma

$$f(q) := x_k' \{A'(q) P A(q) - P\} x_k,$$

é uma função convexa. Relembrando o Lema 2, para assegurar que $f(q) < 0, \forall q \in \Upsilon$ basta verificar se $f(q) < 0, \forall q \in \Upsilon_0$, onde $\Upsilon := \mathbf{co}\{\Upsilon_0\}$.

Como no caso dos modelos TS Υ_0 é um conjunto de r modelos locais, substitui-se a condição (4.9) por um número finito de testes:

$$x_k' \{A_i' P A_i - P\} x_k < 0, \quad i \in \mathcal{R}. \quad (4.10)$$

²Relembre (2.14)

Esse resultado permite enunciar o Teorema a seguir, sobre a estabilidade de sistemas TS:

Teorema 2 (Tanaka e Sugeno (1990)) *O sistema TS (4.5) é globalmente assintoticamente estável se existir uma matriz $P = P' \succ 0$ tal que*

$$A_i' P A_i - P \prec 0, \quad i \in \mathcal{R}. \quad (4.11)$$

Embora as condições apresentadas por Tanaka e Sugeno (1990) se apliquem a quaisquer sistemas TS por meio de $r + 1$ testes na variável matricial P , uma metodologia sistemática e geral para se determinar P não foi apresentada à época. Alguns trabalhos usavam métodos heurísticos para determinar as matrizes da função de Lyapunov (Tanaka e Sugeno, 1992; Tanaka e Sano, 1993), enquanto Kawamoto et al. (1992) desenvolveu um método analítico para sistemas TS de segunda ordem, i.e., $x \in \mathbb{R}^2$.

Somente mais tarde, com o advento de algoritmos eficientes e de diversos pacotes para resolução de LMIs essa carência foi suprida. Como mostrado em alguns artigos dos autores Wang et al. (1996), o Teorema 2 pode ser reescrito como um problema de factibilidade de LMIs:

Teorema 3 (Tanaka e Wang (2001)) *O sistema TS (4.5) é globalmente assintoticamente estável se existe solução para o seguinte problema*

$$\begin{aligned} & \text{encontre } P \\ \text{s.a.} \quad & P \succ 0 \\ & A_i' P A_i - P \prec 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (4.12)$$

Este resultado foi bastante relevante no sentido de sistematizar a análise de estabilidade de sistemas TS. Mesmo assim, ele se mostra ainda mais interessante quando se deseja projetar um sistema de controle fuzzy.

4.2.1 Projeto de Controle Fuzzy Baseado em LMIs

Uma estratégia amplamente adotada para controle baseado em modelos TS consiste na chamada compensação paralela distribuída (PDC). Embora o conceito tenha sido desenvolvido em trabalhos anteriores, veja um apanhado histórico em (Tanaka e Wang, 2001), foi a partir do trabalho de Wang et al. (1995) que essa denominação foi empregada.

Em linhas gerais, o controlador PDC é uma combinação fuzzy de controladores locais usando a mesma estrutura de inferência da planta:

$$R_i : \begin{cases} \text{SE} & q_k^1 \text{ É } \Phi_1^i \text{ E } q_k^2 \text{ É } \Phi_2^i \text{ E } \dots \text{ E } q_k^s \text{ É } \Phi_s^i \\ \text{ENTÃO} & u_k = K_i x_k \end{cases} \quad (4.13)$$

resultando no seguinte sinal de controle:

$$u_k := \sum_{i=1}^r h_i[q_k] K_i x_k. \quad (4.14)$$

O controlador PDC é um tipo particular de realimentação de estados, parametrizada segundo as mesmas funções de pertinência que o modelo TS.

Considerando o controlador (4.14), o sistema TS (2.12) assume a seguinte forma em malha fechada³

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k] h_j[q_k] (A_i + B_i K_j) x_k \quad (4.15)$$

$$= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k] h_j[q_k] G_{ij} x_k \quad (4.16)$$

onde $G_{ij} := A_i + B_i K_j$.

A idéia inicial ao se empregar o controle PDC (Wang et al., 1995) era projetar ganhos K_i que garantissem estabilidade e desempenho para os subsistemas G_{ii} e, numa etapa posterior, verificar se o sistema em malha-fechada obtido é globalmente estável. Uma vez que o sistema (4.15) é autônomo, as mesmas idéias do Teorema 2 podem ser aplicadas para a malha fechada. Contudo, caso não se garanta estabilidade, o procedimento deve reiniciar com um conjunto de controladores diferente.

A abordagem via LMIs dispensa etapas sucessivas de tentativa e erro pois os ganhos K_i podem ser vistos como variáveis matriciais. A solução para o problema de factibilidade das LMIs será dada por um conjunto de ganhos que estabilizam o sistema, bem como a matriz de Lyapunov que garante a estabilidade global do sistema em malha fechada. Este procedimento foi proposto por Wang et al. (1996).

Escolhendo outra vez (4.6) como função de Lyapunov candidata e considerando a forma em malha fechada (4.15) tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= x_k' \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k] h_j[q_k] [G_{ij}' P G_{ij} - P] \right) x_k \\ &= x_k' \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k] h_j[q_k] [\{K_j' B_i' + A_i'\} P \{A_i + B_i K_j\} - P] \right) x_k \end{aligned} \quad (4.17)$$

Segundo o método direto de Lyapunov, para garantir estabilidade é suficiente que

$$G'(q, q) P G(q, q) - P \prec 0, \quad P \succ 0, \quad (4.18)$$

³Relembre as propriedades das funções de pertinências normalizadas. De acordo com (2.14), tem-se que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j A_i = \sum_{j=1}^r h_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^r h_i A_i \right)}_1 = \sum_{i=1}^r h_i A_i$$

tal que $G(q, q) := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k] h_j[q_k] G_{ij}$.

A expressão (4.18) não é uma LMI, devido às multiplicações entre as variáveis matriciais K_i e P . Contudo, utilizando manipulações algébricas é possível modificá-la para se tornar uma. Multiplicando (4.18) à direita e à esquerda por $X := P^{-1}$ conduz a:

$$XG'(q, q)X^{-1}G(q, q)X - X \prec 0.$$

Fazendo as transformações de variáveis $M_i := K_i X$, tem-se que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k] h_j[q_k] [\{M'_j B'_i + X A'_i\} X^{-1} \{A_i X + B_i M_j\} - X] \prec 0,$$

condições ainda não lineares, pois persistem multiplicações de variáveis. Recorrendo-se ao complemento de Schur, entretanto, é possível obter uma expressão LMI equivalente:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k] h_j[q_k] \begin{bmatrix} X & M'_j B'_i + X A'_i \\ A_i X + B_i M_j & X \end{bmatrix} \succ 0.$$

Uma vez que as condições são convexas, basta verificar um número finito de testes

$$\begin{bmatrix} X & M'_j B'_i + X A'_i \\ A_i X + B_i M_j & X \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j \in \mathcal{R}.$$

Caso seja possível determinar matrizes X e M_i , tem-se a garantia de que o sistema (4.15) se torna estável por meio do controlador (4.14). Haja vista que $X \succ 0$ (veja as propriedades do complemento de Schur no Apêndice B) os ganhos do controlador são obtidos fazendo $K_i = M_i X^{-1}$.

O Teorema a seguir resume o procedimento para projetar controladores PDC para sistemas TS:

Teorema 4 (Wang et al. (1996)) *O sistema TS (4.15) torna-se globalmente assintoticamente estável pelo controlador (4.14) se existe solução para o seguinte problema*

$$\begin{aligned} &\text{encontre } X = X', M_i, i = 1, 2, \dots, r \\ &\text{s.a } \begin{bmatrix} X & M'_j B'_i + X A'_i \\ A_i X + B_i M_j & X \end{bmatrix} \succ 0, i, j = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (4.19)$$

Os procedimentos descritos neste capítulo foram responsáveis por tornar a análise de sistemas de controle fuzzy mais rigorosa, do ponto de vista da garantia de estabilidade. Por outro lado, o advento de formas eficientes para resolver LMIs causou grande impacto na teoria de controle como um todo, repercutindo também no controle fuzzy. Com isso, a metodologia para projeto de controladores fuzzy pôde ser encarada de maneira sistemática, de tal forma que os conceitos apresentados neste capítulo aplicam-se a quaisquer sistemas TS. Tudo isso ressalta a importância dos trabalhos realizados desde (Tanaka e Sugeno, 1990) até (Wang et al., 1996) que despertaram o interesse da comunidade de controle sobre o tema.

Embora seja possível aplicar tais conceitos a sistemas TS genéricos, nem sempre a metodologia é factível e, por se tratarem de condições suficientes, não é possível concluir sobre estabilidade ou estabilização de um sistema TS caso falhem. Por esses motivos, grande parte dos trabalhos subseqüentes buscou determinar metodologias LMI aprimoradas e que sejam factíveis quando as condições tradicionais falham (Feng, 2006). Esse tópico será abordado nos capítulos seguintes.

4.3 Critérios de Desempenho

A inerente flexibilidade da abordagem via LMIs permite o projeto de controladores que, além de estabilidade, asseguram desempenho específico em malha-fechada (Tanaka e Wang, 2001).

Muito embora não exista a noção de pólos em sistemas não-lineares, é possível impor restrições com relação a resposta temporal de um sistema TS através de uma forma análoga àquela feita para sistemas lineares. Neste caso, um sistema TS (4.15) pode ser visto como uma dinâmica do tipo

$$x_{k+1} = G(q)x_k$$

onde a matriz $G(q)$ varia, de forma não-linear, de acordo o vetor de variáveis premissas q .

No caso linear, é possível alocar os pólos do sistema em malha fechada em pontos desejados do semiplano complexo esquerdo. Já para sistemas TS, busca-se confinar os autovalores das infinitas matrizes $G(q)$ em sub-regiões do semiplano complexo esquerdo. Formalmente, define-se

$$\forall q \in Q \Rightarrow \lambda(G(q)) \in \Gamma,$$

sendo $\Gamma \subset \mathbb{C}_-$. Uma matriz que satisfaz esta condição é chamada \mathcal{D} -estável (Gonçalves et al., 2006b). Quando as regiões Γ são convexas e simétricas com relação ao eixo real são chamadas regiões LMI (Palhares e Gonçalves, 2007). Perceba que, segundo esta abordagem, é estabelecido um desempenho mínimo para o sistema, pois, no pior caso, os autovalores de $G(q)$ ficam no limite das regiões LMIs.

O projeto de controladores em regiões LMIs generalizadas foi realizado para sistemas fuzzy por (Nguang e Shi, 2006; Assawinchaichote e Nguang, 2006). Já em (Tanaka et al., 1998a; Teixeira et al., 2000) o enfoque é dado na taxa de decaimento, que se trata de uma região LMI específica.

Muitas vezes é necessário limitar a amplitude da entrada de controle, devido a limitações dos atuadores ou para evitar efeitos de saturação. Restrições sobre os sinais de entrada e saída podem ser incorporadas no projeto de controladores fuzzy, como por exemplo em (Tanaka et al., 1998a; Teixeira et al., 2000).

Os índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ estão relacionados com a redução dos efeitos de distúrbios sobre saídas de interesse nos sistemas de controle e também podem ser considerados, de forma isolada ou no contexto do controle misto, para sistemas fuzzy. O controle \mathcal{H}_∞ , que

será visto em detalhes mais adiante, visa reduzir os efeitos de sinais de distúrbio sobre os quais não se conhece detalhes (Palhares e Peres, 2001), ou seja, sinais incertos. Já a abordagem \mathcal{H}_2 é mais adequada quando se conhece a densidade espectral dos distúrbios, sendo tratada via LMIs para sistemas fuzzy em (Wu e Cai, 2004; Wu, 2007).

Esses critérios de desempenho são conflitantes, sendo necessário estabelecer um compromisso entre ambos no problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (Gonçalves et al., 2006a). Embora seja um problema de caráter multiobjetivo, é possível tratá-lo exclusivamente por meio de LMIs como mostrado em (Chen et al., 2000; Wu et al., 2006). A idéia é fixar um dos custos associados às abordagens \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ e em seguida determinar o valor ótimo do outro, de forma iterativa até se determinar o conjunto solução, desde que se tenha condições convexas.

Outra vantagem bastante atrativa do uso de LMIs em controle fuzzy é a capacidade de se projetar controladores que atendam diversos requisitos de projeto concomitantemente, como pode ser visto em (Tanaka et al., 1998c). Uma referência bastante completa é o livro de Tanaka e Wang (2001), no qual a maioria dos critérios discutidos aqui são abordados, exceto alguns tipos de regiões LMIs.

4.3.1 Critério de Desempenho \mathcal{H}_∞

Na abordagem de controle \mathcal{H}_∞ busca-se reduzir o efeito de entradas desconhecidas w , que atuam como distúrbio nas saídas z do sistema, por meio de um critério de desempenho no domínio da frequência.

Em um sistema linear, como o da Figura 4.2, a relação entre esses sinais pode ser expressada por meio de uma função (matriz) de transferência $T_{zw}(s)$, que pode ser mensurada segundo diversas normas. Conseqüentemente, tais normas servem também como medida da relação entre os sinais de entrada e saída.

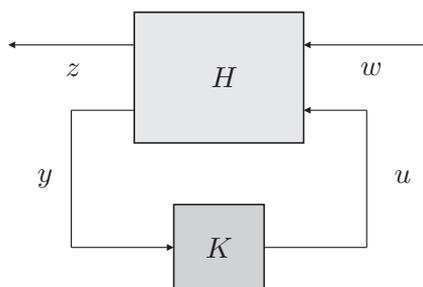


Figura 4.2: Diagrama de blocos do controle \mathcal{H}_∞ .

A norma \mathcal{H}_∞ é usada para sistemas estáveis:

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty := \sup_w \{\sigma_{\max}[T_{zw}(j\omega)]\}, \quad (4.20)$$

sendo a medida do supremo do máximo valor singular de $T_{zw}(s)$. Para sistemas SISO é possível apresentar duas representações geométricas para a norma \mathcal{H}_∞ : o raio do menor círculo que

envolve o diagrama de Nyquist ou o valor de pico do diagrama de Bode, veja Figura 4.3.

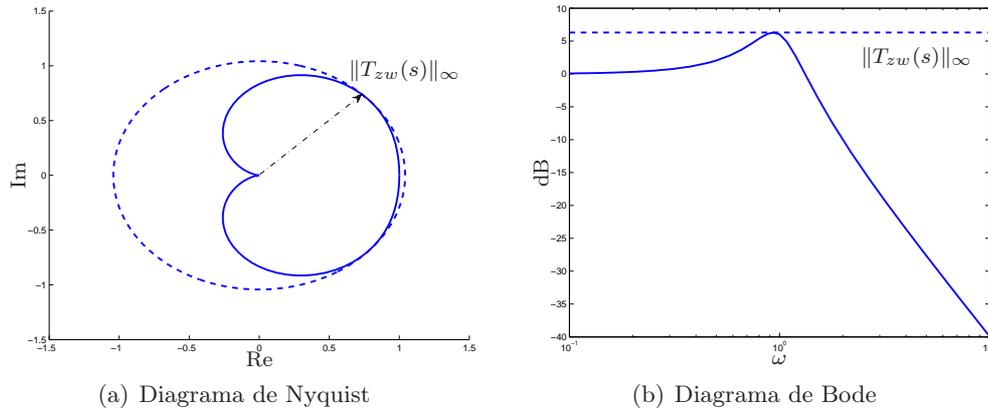


Figura 4.3: Interpretações da norma \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares SISO.

O problema consiste em se determinar controladores que obtenham o valor ótimo (γ_{\min}) ou garantam um valor prescrito (γ) da norma \mathcal{H}_∞ . Em um ambiente de incerteza, no qual se tem pouca ou nenhuma informação sobre o conteúdo espectral dos sinais que perturbam a planta, esta estratégia vem bem a calhar, pois garante-se um desempenho mínimo mesmo no pior caso.

Considere o caso SISO e o diagrama de Bode da Figura 4.3. Neste caso, existe um sinal harmônico puro ω_0 cuja amplificação na saída de interesse do sistema é a maior dentre todos, o que se entende como pior caso. Se o sistema em malha fechada tem um custo garantido para a norma \mathcal{H}_∞ , então toda a curva do diagrama de Bode ficará limitada por γ . O controlador “achata”, ou melhor, conforma a curva do diagrama de Bode garantindo uma relação entrada-saída menor que γ . Caso o distúrbio não contenha uma componente ω_0 , a relação entrada-saída será ainda menor que γ . Portanto, a filosofia do controle \mathcal{H}_∞ é de se preparar para o pior e buscar o melhor desempenho para o pior caso possível.

4.3.2 Controle \mathcal{H}_∞ no Domínio do Tempo

Considere o sistema não-linear e discreto a seguir.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, w_k) \\ z_k &= h(x_k, w_k). \end{aligned} \quad (4.21)$$

sendo $z_k \in \mathbb{R}^p$ um sinal de saída de interesse, chamada também de saída calculada ou saída de desempenho, e $w_k \in \mathbb{R}^q$ são entradas de distúrbio com energia finita, i.e., $w_k \in l_2[0, \infty)$.

Como o critério \mathcal{H}_∞ é definido como uma norma de funções de transferência, não é direta sua extensão para sistema não-lineares. Contudo, no domínio do tempo, a norma \mathcal{H}_∞ está relacionada à razão entre a norma l_2 dos sinais de saída z e a norma l_2 dos sinais de distúrbio w , segundo:

$$\sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma^2. \quad (4.22)$$

Essa relação entre entrada-saída é chamada de ganho induzido l_2 (Zhou et al., 1995). No contexto de sistemas lineares estáveis, a equivalência entre domínio do tempo e da frequência é estabelecida pelo *Bounded Real Lemma* (BRL) (Zhou et al., 1995; Scherer e Weiland, 2005; Palhares e Gonçalves, 2007). Em (Lin e Byrnes, 1996) é apresentado um análogo do BRL para sistemas não-lineares.

No domínio do tempo, o controle \mathcal{H}_∞ se resume ao problema de se determinar controladores que garantam simultaneamente: estabilidade assintótica ao sistema (4.21) quando se encontra livre de perturbações ($w_k = 0$); ganho induzido entre entrada e saída menor ou igual a γ , para condições iniciais nulas. O valor γ será um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ ⁴.

Com base nesses resultados, é possível estabelecer o seguinte índice de desempenho que será útil nos capítulos seguintes como forma para instrumentalizar o projeto de controladores via LMIs.

Teorema 5 *Considere que $w_k \in l_2[0, \infty)$ e que $\gamma > 0$. Seja V uma função diferenciável, definida positiva e radialmente ilimitada que é solução da desigualdade a seguir:*

$$\mathcal{I}_\infty := \Delta V(x_k) + z'_k z_k - \gamma^2 w'_k w_k < 0. \quad (4.23)$$

onde $\Delta V(x_k)$ é a variação temporal dessa função ao longo do sistema (4.21). Então o sistema (4.21) é assintoticamente estável quando $w_k = 0$ e possui γ como limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ para condições iniciais nulas.

Demonstração 1 *Se V é solução de (4.23) resulta que*

$$\Delta V(x_k) < 0.$$

Portanto, V é uma função de Lyapunov que assegura a estabilidade do sistema (4.21).

Por outro lado, considera-se a desigualdade a seguir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\Delta V(x_k) + z'_k z_k - \gamma^2 w'_k w_k) < 0.$$

Observa-se que:

⁴Ainda que a norma \mathcal{H}_∞ seja definida para funções de transferência e não exista para sistemas não-lineares, em muitos trabalhos adota-se como sinônimos norma \mathcal{H}_∞ e o ganho induzido l_2 . Por simplicidade, nesta dissertação, ambos os termos são usados indistintamente

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \Delta V(x_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} (x'_{k+1} P x_{k+1} - x'_k P x_k) \\
&= -x'_0 P x_0 + x'_1 P x_1 - x'_1 P x_1 + x'_2 P x_2 - x'_2 P x_2 + x'_3 P x_3 \cdots + x'_\infty P x_\infty \\
&= x'_\infty P x_\infty - x'_0 P x_0 = V(x_\infty) - V(x_0)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Sem perda de generalidade, pode-se supor condições iniciais nulas, $x_0 = 0$. Portanto, $V(x_0) = 0$ resultando em

$$x'_\infty P x_\infty + \sum_{k=0}^{\infty} (z'_k z_k - \gamma^2 w'_k w_k) < 0. \tag{4.25}$$

Como o sistema é estável, segue que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x'_N P x_N \rightarrow 0, \tag{4.26}$$

pois o distúrbio não é persistente, uma vez que $w_k \in l_2[0, \infty)$. Finalmente, isso conduz a:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (z'_k z_k - \gamma^2 w'_k w_k) &< 0 \\
\|z_k\|_2 - \gamma^2 \|w_k\|_2 &< 0.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Portanto o ganho induzido l_2 do sistema é limitado por γ^2 , concluindo a demonstração. \square

Observação 3 O critério \mathcal{I}_∞ é denominado índice de desempenho \mathcal{H}_∞ (Palhares et al., 2001, 2005), onde em (4.23) aparece explicitamente a taxa de variação de uma função de Lyapunov.

Com base na definição do índice de desempenho \mathcal{H}_∞ , é possível obter resultados para análise e síntese baseados em LMIs. Alguns trabalhos pioneiros sobre o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ , usando LMIs, podem ser vistos em (Han e Feng, 1999; Hong e Langari, 2000; Cao e Frank, 2000).

Capítulo 5

Critérios de Estabilidade e de Estabilização Quadráticos

Nos capítulos anteriores os princípios de modelagem fuzzy Takagi-Sugeno e de estabilidade de sistemas dinâmicos no sentido de Lyapunov foram apresentados. Foi mostrado que as questões de estabilidade e de estabilização no contexto TS podem ser tratadas de forma eficiente como problemas de otimização convexa, particularmente por meio da solução de LMIs. Também foi visto que as questões de desempenho em malha fechada podem fazer parte do projeto de controladores fuzzy via LMIs. Neste capítulo, o enfoque é voltado para critérios menos conservadores para analisar estabilidade ou projetar controladores fuzzy para sistemas TS.

5.1 Conservadorismo da Abordagem Quadrática Tradicional

O critério proposto por [Tanaka e Sugeno \(1992\)](#) define um conjunto de condições para inspeção da estabilidade de sistemas TS, resultado que foi aplicado para o projeto de reguladores fuzzy em ([Wang et al., 1996](#)). Tais resultados definem um arcabouço completo para, de maneira sistemática, inferir estabilidade ou projetar controladores estabilizantes através da solução de LMIs.

Não obstante, tal critério apresenta desvantagens. Por constituírem um conjunto de condições suficientes, mesmo quando não são satisfeitas, um sistema TS pode ser estável ou mesmo estabilizável. Do ponto de vista numérico, um aumento no número de regras acarreta em maior complexidade das LMIs, podendo tornar inviável determinar sua solução, ainda que exista. Esta questão torna-se ainda mais crucial quando, além de estabilidade, o projeto do controlador fuzzy envolve critérios de desempenho em malha-fechada.

Neste contexto, uma série de trabalhos buscou reduzir o conservadorismo numérico da abordagem quadrática, podendo ser destacados ([Tanaka et al., 1998a](#); [Kim e Lee, 2000](#); [Teixeira et al., 2000, 2003](#); [Fang et al., 2006](#)). O princípio comum nestas abordagens consiste na adição de variáveis matriciais de folga¹ nas condições de estabilidade. Do ponto de vista analítico, as novas condições de estabilidade quadráticas equivalem ou majoram o critério pa-

¹Do inglês “slack matrix variables”

drão, de tal forma que se tais condições LMI são atendidas, conseqüentemente são satisfeitas as condições originais. Do ponto de vista prático, as variáveis adicionais que são introduzidas facilitam determinar factibilidade das LMIs, pois introduzem novos graus de liberdade no problema de otimização. O preço pago é um aumento do custo computacional.

Outra forma de reduzir o conservadorismo consiste na aplicação de transformações matriciais para introduzir variáveis matriciais adicionais, como realizado em (Delmotte et al., 2007) para sistemas contínuos e em (Wu, 2004), para sistemas a tempo discreto com falha em atuadores. O critério de estabilidade é preservado, mas as variáveis usadas para calcular controladores não mais dependem da matriz P da função de Lyapunov. Tal desacoplamento é feito por intermédio das novas variáveis introduzidas, conhecidas também como multiplicadores matriciais. Os autores de Oliveira e Skelton (2002); de Oliveira (2004) apresentam um discussão interessante sobre os multiplicadores no contexto de sistemas lineares com incertezas politópicas.

Mais recentemente, em (Sala e Arino, 2007; Montagner et al., 2007) condições LMIs necessárias e suficientes foram desenvolvidas para estabilidade de sistemas TS baseadas em função de Lyapunov quadrática. Todavia, ambos apresentam condições assintóticas, pois as LMIs dependem de certos parâmetros, os quais devem ser suficientemente grandes para que as condições se tornem exatas (necessárias e suficientes). Embora seja bastante interessante a obtenção de condições necessárias e suficientes, ainda existem algumas dificuldades fundamentais com a função de Lyapunov quadrática, que serão discutidas em detalhes no capítulo seguinte. Ademais, resta a questão de como incluir critérios de desempenho em termos de condições necessárias e suficientes, sobretudo critérios conflitantes.

5.2 Condições \mathcal{H}_∞ Aprimoradas: Caso Quadrático

Nesta seção dois tipos de resultados serão apresentados. Primeiramente, são dadas as condições que servem para determinar limitantes superiores para a norma \mathcal{H}_∞ de sistemas fuzzy estáveis. Em seguida, serão apresentados resultados de síntese, que fornecem o procedimento para se obter controladores fuzzy que provêm um custo garantido da norma \mathcal{H}_∞ em malha fechada.

5.2.1 Análise da Norma \mathcal{H}_∞

Considere o sistema TS (4.5), reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sum_{i=1}^r h_i[q_k] (A_i x_k + B_i u_k + E_i w_k) \\ z_k &= \sum_{i=1}^r h_i[q_k] (C_i x_k + D_i u_k + F_i w_k) \end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo $z_k \in \mathbb{R}^p$ a saída de desempenho e $w_k \in \mathbb{R}^q$ um sinal de distúrbio, que afeta tanto a

dinâmica do sistema quanto essa saída.

Existem duas formas usuais de se analisar o desempenho \mathcal{H}_∞ de um sistema estável. Um objetivo consiste em encontrar γ_{\min} , o menor valor para o custo garantido l_2 entre o distúrbio w_k e a saída calculada z_k . Por outro lado, também é possível determinar se o sistema atende a um valor prescrito de desempenho dado por γ .

Com relação a estabilidade, pode-se analisar, pelos procedimentos fornecidos a seguir, tanto sistemas em malha aberta como sistemas em malha fechada, cujos ganhos do controlador PDC são especificados de antemão.

Partindo do resultado mostrado no Teorema 5, é possível obter as condições LMI apresentadas em (Cao e Frank, 2000). Contudo, se for adotado o procedimento de Teixeira et al. (2003), que permite a introdução de matrizes de folga, é possível obter resultados menos conservadores para a análise do desempenho \mathcal{H}_∞ . Aqui, redução do conservadorismo tem dois significados: obter um menor valor da norma \mathcal{H}_∞ para um dado sistema, quando comparado a outros valores obtidos em procedimentos baseados na função de Lyapunov quadrática; ou obter soluções factíveis para os casos em que outros métodos falham.

O teorema a seguir fornece condições suficientes para determinar se o custo garantido \mathcal{H}_∞ de um sistema TS estável é pelos menos γ .

Teorema 6 *Seja $\gamma > 0$ um valor dado. O sistema TS (5.1) é estável com norma \mathcal{H}_∞ dada por γ , para condições iniciais nulas, caso existam matrizes simétricas X , T_{ijt} , R_{it} e matrizes quaisquer S_{ijt} , $i, j, t \in \mathcal{R}$ que satisfazem o problema a seguir:*

$$\begin{aligned} \text{encontre } & X, T_{ijt}, S_{ijt}, R_{it}, i, j, t = 1, 2, \dots, r \\ \text{s.a.} & T_{ijt} \succeq 0, \Xi_t \prec 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

sendo

$$\Xi_t := \begin{bmatrix} Q_{11} - Z_{1t} & * & \cdots & * \\ \tilde{Q}_{12} + N_{21t} & Q_{22} - Z_{2t} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{Q}_{1r} + N_{r1t} & \tilde{Q}_{2r} + N_{r2t} & \cdots & Q_{rr} - Z_{rt} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$Q_{ij} := \begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ G_{ij}X & E_i & -X & * \\ M_{ij}X & F_i & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\tilde{Q}_{ij} := \frac{1}{2} (Q_{ij} + Q_{ji}), \quad G_{ij} := A_i + B_i K_j, \quad M_{ij} := C_i + D_i K_j, \quad (5.5)$$

e ainda:

$$N_{ijt} := \begin{cases} T_{ijt} + W_{ijt} + S_{ijt} - S'_{ijt} & \text{se } i < j \\ T_{jit} + W_{jit} - S_{jit} + S'_{jit} & \text{se } i > j \end{cases} \quad (5.6)$$

$$W_{ijt} := \begin{cases} R_{ij}, & \text{se } i = t \text{ ou } j = t \\ 0, & \text{se } i \neq t \text{ e } j \neq t \end{cases} \quad (5.7)$$

$$Z_{it} := \begin{cases} R_{it}, & \text{se } i < t \\ R_{ti}, & \text{se } i > t \\ 0, & \text{se } i = t \end{cases} \quad (5.8)$$

Demonstração 2 Considere a notação:

$$\Upsilon(q) := \sum_{i=1}^r h_i[q_k] \Upsilon_i. \quad (5.9)$$

Assim é possível definir:

$$G(q, q) := A(q) - B(q)K(q) \quad (5.10)$$

$$M(q, q) := C(q) - D(q)K(q) \quad (5.11)$$

Considere como função de Lyapunov candidata $V(x_k) = x_k' P x_k$. Logo, para o sistema (5.1), o índice de desempenho \mathcal{H}_∞ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\infty = & x_k' G'(q, q) P G(q, q) x_k + x_k' G'(q, q) P E(q) w_k + w_k' E'(q) P G(q, q) x_k \\ & + w_k' E'(q) P E(q) w_k - x_k' P x_k - \gamma^2 w_k' w_k + x_k' M'(q, q) M(q, q) x_k \\ & + x_k' M'(q, q) F(q) w_k + w_k' F'(q) M(q, q) x_k + w_k' F'(q) F(q) w_k, \end{aligned} \quad (5.12)$$

que pode ser reescrito na forma aumentada

$$\mathcal{I}_\infty = \theta' \Theta(q, q) \theta, \quad (5.13)$$

sendo que $\theta' := [x_k' \quad w_k']$ e ainda:

$$\Theta(q, q) := \begin{bmatrix} G'(q, q) P G(q, q) - P + M'(q, q) M(q, q) & * \\ F'(q) M(q, q) + E'(q) P G(q, q) & -\gamma^2 I + F'(q) F(q) + E'(q) P E(q) \end{bmatrix}.$$

Para assegurar que $\mathcal{I}_\infty < 0$ é suficiente que $\Theta(q, q) \prec 0$. Aplicando-se complemento de Schur, essa desigualdade equivale a $\tilde{\Theta}(q, q) \prec 0$ sendo que:

$$\tilde{\Theta}(q, q) := \begin{bmatrix} -P & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ P G(q, q) & P E(q) & -P & * \\ M(q, q) & F(q) & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

De acordo com as propriedades do complemento de Schur (veja Apêndice B), ao se garantir

que $\tilde{\Theta}(q, q) \prec 0$, simultaneamente, tem-se que $-P \prec 0$, garantindo que a função candidata é definida positiva.

Como $P \succ 0$, essa matriz é não-singular, sendo possível definir a transformação de congruência $S := \mathbf{diag}\{X, I, X, I\}$, tal que $X := P^{-1}$. Logo

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}(q, q) &\prec 0 \\ S\tilde{\Theta}(q, q)S' &\prec 0 \\ \check{\Theta}(q, q) &\prec 0 \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k]h_j[q_k]\check{\Theta}_{ij} &\prec 0 \\ \sum_{i=1}^r h_i[q_k]\check{\Theta}_{ii} + \sum_{i<j}^r h_i[q_k]h_j[q_k] \left(\check{\Theta}_{ij} + \check{\Theta}_{ji} \right) &\prec 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

sendo que

$$\check{\Theta}_{ij} := \begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ G_{ij}X & E_i & -X & * \\ M_{ij}X & F_i & 0 & -I \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Deste ponto em diante, aplica-se o resultado proposto por [Teixeira et al. \(2003\)](#), para se obter condições mais relaxadas. Considere que \tilde{S}_{ijt} e $T_{ijt} \succeq 0$, $i, j, t \in \mathcal{R}$ são matrizes anti-simétricas e simétricas, respectivamente, com dimensão apropriada. Assim tem-se que

$$\begin{aligned} \check{\Theta}(q, q) &\prec \sum_{t=1}^r h_t[q_k] \left\{ \sum_{i=1}^r h_i[q_k]\check{\Theta}_{ii} + \sum_{i<j}^r h_i[q_k]h_j[q_k] \left(\check{\Theta}_{ij} + \check{\Theta}_{ji} \right) + T_{ijt} + \tilde{S}_{ijt} \right\} \\ &= \sum_{t=1}^r h_t[q_k] \left\{ \alpha[q_k] \tilde{\Xi}_t \alpha'[q_k] \right\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

sendo que $\alpha[q_k] := \begin{bmatrix} h_1[q_k]I & h_2[q_k]I & \cdots & h_r[q_k]I \end{bmatrix}$ e ainda

$$\tilde{\Xi}_t := \begin{bmatrix} \check{\Theta}_{11t} & * & \cdots & * \\ \frac{1}{2} \left(\check{\Theta}_{12t} + \check{\Theta}_{21t} \right) + T_{21t} + \tilde{S}_{21t} & \check{\Theta}_{22t} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \left(\check{\Theta}_{r1t} + \check{\Theta}_{1rt} \right) + T_{r1t} + \tilde{S}_{r1t} & \frac{1}{2} \left(\check{\Theta}_{r2t} + \check{\Theta}_{2rt} \right) + T_{r2t} + \tilde{S}_{r2t} & \cdots & \check{\Theta}_{rrt} \end{bmatrix}.$$

Pela definição de matriz anti-simétrica e possível fazer $\tilde{S}_{ijt} := S'_{ijt} - S_{ijt}$, sendo S_{ijt} matrizes quaisquer.

Aplicando o Lema 4 (vide apêndice A) tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^r h_t[q_k] \left\{ \alpha[q_k] \tilde{\Xi}_t \alpha'[q_k] \right\} &= \sum_{t=1}^r h_t[q_k] \left\{ \alpha[q_k] \left(\tilde{\Xi}_t + H \right) \alpha'[q_k] \right\} \\ &= \sum_{t=1}^r h_t[q_k] \left\{ \alpha[q_k] \Xi_t \alpha'[q_k] \right\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

sendo que Ξ_t é definido em (5.3). Portanto, para garantir que o sistema tem norma \mathcal{H}_∞ dada por γ , é suficiente verificar que $\Xi_t \prec 0$, $t = 1, 2, \dots, r$, pois as condições em (5.17) são convexas, concluindo a demonstração. \square

O próximo resultado é uma modificação do teorema anterior. Se antes o objetivo era verificar se o sistema tem desempenho \mathcal{H}_∞ dado por γ , agora o objetivo é investigar o valor ótimo, isto é, o menor valor possível para γ .

Teorema 7 *O sistema TS (5.1) é estável com valor ótimo da norma \mathcal{H}_∞ dado por $\gamma_{\min} = \sqrt{\rho}$, para condições iniciais nulas, caso existirem matrizes simétricas X , T_{ijt} , R_{it} e matrizes quaisquer S_{ijt} , $i, j, t \in \mathcal{R}$ que satisfazem o problema a seguir:*

$$\begin{aligned} \min_{X, R_{ij}, T_{ijt}, S_{ijt}, \rho} \quad & \rho \\ \text{s.a} \quad & T_{ijt} \succeq 0, \quad \Xi_t \prec 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

sendo que Ξ_t é definida como em (5.3), porém trocando-se γ^2 por ρ em (5.4).

Demonstração 3 *Basta fazer a troca de variável $\gamma^2 := \rho$ em (5.15). Como as condições são convexas, o valor ótimo de ρ produz o valor mínimo do limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ . \square*

5.2.2 Síntese de Controladores \mathcal{H}_∞

No procedimento de síntese, determina-se os ganhos do controlador PDC que garante um valor de projeto γ para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha-fechada. Também é possível determinar os ganhos do controlador que minimiza a norma \mathcal{H}_∞ . A metodologia do projeto assemelha-se ao procedimento de análise, na medida em que depende da solução de problemas de factibilidade ou de minimização.

O teorema a seguir apresenta condições LMI para projetar os ganhos do controlador fuzzy que garante estabilidade e desempenho γ em malha-fechada.

Teorema 8 *Seja $\gamma > 0$ um valor dado. O sistema TS (5.1) é estabilizável pelo controlador PDC (4.14) e possui desempenho em malha-fechada, para condições iniciais nulas, dado por γ , caso existam matrizes simétrica X , T_{ijt} , R_{it} e matrizes quaisquer M_i , S_{ijt} , $i, j, t \in \mathcal{R}$ que satisfazem o problema a seguir:*

$$\begin{aligned} \text{encontre} \quad & X, M_i, T_{ijt}, S_{ijt}, R_{it}, i, j, t = 1, 2, \dots, r \\ \text{s.a} \quad & T_{ijt} \succeq 0, \quad \Xi_t \prec 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

sendo Ξ_t , \tilde{Q}_{ij} , N_{ijt} , W_{ijt} e Z_{it} como em (5.3), (5.5), (5.6), (5.7) e (5.8), respectivamente, porém:

$$Q_{ij} := \begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ A_i X + B_i M_j & E_i & -X & * \\ C_i X + D_i M_j & F_i & 0 & -I \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Caso exista solução, os ganhos do controlador são obtidos fazendo-se $K_i = M_i X^{-1}$.

Demonstração 4 A demonstração segue os passos mostrados para o Teorema 6, porém fazendo a troca de variáveis $M_i := K_i X$ nas matrizes (5.15). \square

Usando LMIs também é possível obter o controlador que minimiza o valor da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha-fechada. O teorema a seguir apresenta condições LMI para projetar os ganhos do controlador fuzzy que garante estabilidade e o desempenho ótimo γ_{\min} em malha-fechada.

Teorema 9 O sistema TS (5.1) é estabilizável pelo controlador PDC (4.14) e possui desempenho ótimo em malha-fechada, para condições iniciais nulas, dado por ρ , caso existam matrizes simétricas X , T_{ijt} , R_{it} e matrizes quaisquer M_i , S_{ijt} , $i, j, t \in \mathcal{R}$ que satisfazem o problema a seguir:

$$\begin{aligned} & \min_{X, M_i, R_{ij}, T_{ijt}, S_{ijt}, \rho} \rho \\ & \text{s.a} \quad T_{ijt} \succeq 0, \Xi_t \prec 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

sendo Ξ_t , \tilde{Q}_{ij} , N_{ijt} , W_{ijt} e Z_{it} como em (5.3), (5.5), (5.6), (5.7) e (5.8), respectivamente. As matrizes Q_{ij} são definidas como em (5.20), porém considerando $\gamma^2 = \rho$.

Caso exista solução, os ganhos do controlador são obtidos fazendo-se $K_i = M_i X^{-1}$ e o valor ótimo da norma \mathcal{H}_∞ é dada por $\gamma_{\min} = \sqrt{\rho}$.

Demonstração 5 A demonstração segue os passos mostrados para o Teorema 6, porém fazendo a troca de variáveis $M_i := K_i X$ e $\rho := \gamma^2$ nas matrizes (5.15) para eliminar o produto das variáveis de decisão. \square

Observação 4 Para alguns sistemas, à medida que se aproxima do valor ótimo γ_{\min} , ganhos elevados podem ser obtidos, o que se trata de uma patologia do controle \mathcal{H}_∞ . Para contornar esse problema, o método proposto por Palhares et al. (1998) permite obter valores sub-ótimos muito próximos de γ_{\min} , sem incorrer no problema de altos ganhos.

5.3 Resultados

Por meio de alguns exemplos numéricos é possível determinar o grau de redução no conservadorismo obtido com as relaxações propostas neste capítulo.

5.3.1 Exemplo 1

Neste exemplo, retirado de Wang e Feng (2004), um controlador fuzzy \mathcal{H}_∞ deve ser projetado para estabilizar o sistema TS de 3 regras, cujas matrizes são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,6 & 0,5 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ -0,1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = D_3 = 1, D_2 = -1.$$

Segundo Wang e Feng (2004), estratégias baseadas na função de Lyapunov quadrática, como por exemplo (Cao e Frank, 2000), não são capazes de determinar um controlador para o sistema. Contudo, aplicando-se o Teorema 8 é possível determinar um controlador cujos ganhos são mostrados na Tabela 5.1 e que garante um custo $\gamma = 0,5$.

Tabela 5.1: Ganhos do controlador PDC

Ganho	Valor
K_1	[0,1883 -1,0310]
K_2	[-0,7550 -0,3170]
K_3	[-0,2889 -1,1985]

5.3.2 Exemplo 2

O exemplo a seguir foi tomado de (Gao et al., 2005). Considere o sistema TS com matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1+a & -0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-b \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = 1, D_2 = 0,5, F_1 = 0,4, F_2 = 0,2,$$

vetor de estados $x_k := [x_k^1 \ x_k^2]$ e funções de pertinência

$$h_1[q_k] = (1 - \sin(x_k^1))/2, \quad h_2[q_k] = (1 + \sin(x_k^1))/2,$$

sendo, a variável premissa q_k é o estado x_k^1 .

Considere que os ganhos do controlador PDC sejam

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,65 & 0,30 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -0,87 & 0,11 \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

O objetivo deste exemplo é determinar o valor mínimo da norma \mathcal{H}_∞ quando o sistema

encontra-se em malha fechada. A Tabela 5.2 mostra o resultado obtido para diversos valores do parâmetro a , quando $b = 0$.

Tabela 5.2: Valores de γ_{\min} para diferentes parâmetros: abordagens quadráticas

a	0,0	0,2	0,4	0,6
γ_{\min} com (Cao e Frank, 2000, Teo. 2)	1,8110	2,0385	2,7014	21,6282
γ_{\min} com (Gao et al., 2005, Lema 2)	1,8141	2,0403	2,6983	9,6492
γ_{\min} com Teorema 7	1,8107	2,0361	2,5716	5,9496

5.3.3 Discussão

Esses dois exemplos ilustram que por meio da metodologia proposta consegue-se obter soluções factíveis mesmo quando outros métodos falham, como fica evidenciado pelo Exemplo 1.

Na comparação com outros métodos também factíveis, Exemplo 2, foi possível determinar os menores custos garantidos. Em casos extremos, o limitante da norma \mathcal{H}_{∞} chega a ser entre 1,5, a 3,5, vezes menor do que de outras metodologias.

Capítulo 6

Critérios de Estabilidade e de Estabilização Não-Quadráticos

Neste capítulo serão vistos critérios de estabilidade não-quadráticos, uma classificação que se deve ao uso de funções de Lyapunov candidatas que não são do tipo $V(x_k) = x_k' P x_k$. Ao invés de considerar uma única função de Lyapunov, válida em todas as partições do universo de discurso, mais funções são combinadas. O enfoque do capítulo é voltado para as funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, também conhecidas como funções de Lyapunov não-quadráticas, parametrizadas ou fuzzy.

6.1 Existência de Funções de Lyapunov Quadráticas

Embora o trabalho de [Tanaka et al. \(1998a\)](#), como diversos outros que vieram mais tarde também baseados em condições quadráticas, tenha sido capaz de aprimorar o desempenho numérico das condições LMIs apresentadas em ([Tanaka e Sugeno, 1992](#); [Wang et al., 1996](#)), o conservadorismo da abordagem quadrática ainda é eminente. Uma das razões desse conservadorismo remanescente é o fato de que condições como a do Teorema 2 só levam em conta a propriedade de combinação convexa das funções de pertinência, negligenciando informações estruturais relevantes das mesmas ([Johansson et al., 1999](#)).

Outra questão, demonstrada no trabalho de [Johansson e Rantzer \(1998\)](#); [Johansson et al. \(1999\)](#), é que mesmo para alguns sistemas TS estáveis não existe função de Lyapunov quadrática (FLQ) do tipo $V(x_k) = x_k' P x_k$.

Mesmo com o desenvolvimento de condições baseadas na FLQ que são, simultaneamente, necessárias e suficientes, como em ([Sala e Arino, 2007](#); [Montagner et al., 2007](#)), a conclusão acerca da estabilidade de um sistema ainda não é definitiva. Outro tipo de função, que não seja a FLQ, pode existir, certificando a estabilidade do sistema. A linha de trabalho em ([Sala e Arino, 2007](#); [Montagner et al., 2007](#)) irá apenas garantir que não existe uma função quadrática única que assegure estabilidade do sistema TS.

6.1.1 Alternativas

Antes dos trabalhos de (Johansson et al., 1999), já havia o interesse por alternativas para a abordagem quadrática tradicional. Em (Cao et al., 1997) já havia idéias de como utilizar múltiplas funções de Lyapunov, que combinadas garantissem a estabilidade global de um sistema TS. A função de Lyapunov empregada nesses trabalhos foi denominada por Johansson et al. (1999) como função de Lyapunov por partes (FLPP):

$$V(x_k) := x_k' P_i x_k, \quad x_k \in X_i, \quad (6.1)$$

sendo que X_i são partições do universo de discurso, normalmente escolhidas como subespaços do \mathbb{R}^n , cujas premissas são combinações dos estados x_k .

A divisão dos subespaços X_i é feita de acordo com as interações entre as funções de pertinência. Normalmente, essa separação é feita de acordo com o número de regras ativas. Por exemplo, se em determinado subespaço duas funções de pertinência são normais, então define-se a partição X_j . Se adjacente a essa região apenas uma das funções de pertinência tem suporte vazio, outra partição X_k será definida.

Motivados pelos resultados de Cao et al. (1997) e Johansson et al. (1999), muitos trabalhos buscaram desenvolver a teoria e aplicações em controle da função de Lyapunov por partes (Borne e Dieulot, 2005; Feng, 2003; Feng et al., 2005; Feng, 2006).

Contudo, uma dificuldade da abordagem com função de Lyapunov por partes é a necessidade de se garantir que a combinação das várias funções resulte em uma função global sempre decrescente ao longo do tempo. Isto se torna bastante crítico na fronteira das partições. Em (Cao et al., 1997) a solução encontrada foi exigir certas condições de fronteira que são verificadas a posteriori. Já Johansson et al. (1999) adotaram LMIs extras que forçam a continuidade da função nas fronteiras, eliminando verificações posteriores. Recentemente, Borne e Dieulot (2005) desenvolveram condições para sistemas particulares que garantem que a função é sempre decrescente ao deixar uma partição mais afastada do equilíbrio em direção a outra mais próxima, relaxando a restrição de continuidade.

A função de Lyapunov por partes é muito apropriada quando o modelo TS ativa poucas regras ao mesmo tempo. Contudo, essa condição não vale para modelos obtidos através da abordagem de não-linearidade setorial (Kruszewski et al., 2007).

Outra alternativa é o uso da chamada função de Lyapunov dependente de parâmetros (FLDP):

$$V(x_k) := x_k' \sum_{i=1}^r h_i[q_k] P_i x_k, \quad (6.2)$$

sendo que $h_i[q_k]$ são as mesmas funções de pertinência usadas para modelar o sistema TS cuja estabilidade (controle) deseja-se analisar (realizar). Esta função é dada como a combinação fuzzy de funções quadráticas válidas localmente. Note que, ao contrário da função de Lyapunov por partes, caso as funções de pertinência possuam pelo menos derivada temporal de primeira ordem, então a FLDP é ao menos \mathcal{C}^1 .

A terminologia para esse tipo de função na literatura recente é bastante diversificada: função de Lyapunov fuzzy (Tanaka et al., 2003, 2007; Wu e Zhang, 2007); função dependente de ponderação fuzzy (Choi e Park, 2003); função de Lyapunov não-quadrática (Ding et al., 2006; Kruszewski et al., 2007); função de Lyapunov de base dependente (Zhou et al., 2005, 2007).

Antes de sua aplicação em sistemas fuzzy, esse tipo de função foi adotada no contexto de controle robusto de sistemas lineares incertos (Gahinet et al., 1996; Haddad e Chellaboina, 1997; de Oliveira et al., 1999), identificada como função de Lyapunov dependente de parâmetros. Enquanto para sistemas fuzzy a função é ponderada segundo as funções de pertinência, para sistemas lineares adota-se os parâmetros incertos. Portanto, a nomenclatura função de Lyapunov dependente de parâmetros é mais coerente para identificá-la independente do contexto sendo, portanto, adotado nesta dissertação.

Perceba que tanto a FLPP quanto a FLDP são baseadas na combinação de várias funções, quebrando o paradigma da matriz única usada na abordagem tradicional, o que reduz consideravelmente o conservadorismo. Além disso, em ambos os casos é levada em consideração a estrutura do modelo TS.

Todavia, a FLDP apresenta vantagens com relação a FLPP:

- Caso as funções de pertinência sejam pelo menos \mathcal{C}^1 , as garantias de continuidade e de decaimento já lhe são inerentes, dispensando condições complementares para verificação (Tanaka et al., 2003)
- São convenientes para modelos obtidos a partir da abordagem de não-linearidade setorial (Tanaka et al., 2003; Kruszewski et al., 2007)
- Na FLPP o resultado pode ser influenciado pela escolha das partições. Já na FLDP outras informações estruturais são consideradas (número de regras, funções de pertinência), aprimorando a análise.
- Não é obrigatório que as funções locais $x'_k P_i x_k$ na FLDP sejam funções de Lyapunov. A exigência que se faz é que a combinação fuzzy das mesmas seja uma função de Lyapunov Tanaka et al. (2003). No caso da FLPP isso não ocorre.

Uma desvantagem da FLDP ocorre na elaboração de condições LMI para sistemas contínuos. Como a derivada temporal da FLDP contém informação a respeito das derivadas das funções de pertinência, deve-se adotar limites pré-estabelecidos para a derivada das funções de pertinência (Tanaka et al., 2003, 2007). Isso gera maior dificuldade na sua aplicação, pois os limites dessas derivadas devem ser escolhidos adequadamente.

No caso discreto, o mesmo problema não acontece no procedimento de obtenção das LMIs, haja vista que a taxa de variação máxima do sistema está subordinada à taxa de amostragem.

Isso não significa que a abordagem para sistemas discretos seja menos conservadora do que a abordagem para sistemas contínuos. Escolher uma taxa de amostragem Δt elevada pode tornar as LMIs não factíveis, o que equivale, no análogo contínuo, a se escolher limitantes grandes para as derivadas das funções de pertinência.

O caso discreto é mais atrativo, pois o procedimento para se obter LMIs é direto. A questão da taxa de variação do sistema está embutida na modelagem e não na etapa de análise ou projeto via LMIs, justificando o fato de que grande parte dos trabalhos para sistemas TS baseados na FLDP foi desenvolvida para tempo discreto, veja por exemplo (Choi e Park, 2003; Ding et al., 2006; Guerra e Vermeiren, 2004; Kruszewski et al., 2007; Wu e Zhang, 2007; Zhou et al., 2005, 2007).

As mesmas técnicas usadas para reduzir o conservadorismo no contexto de FLQ podem ser adotadas para FLDP. Em (Guerra e Vermeiren, 2004), por exemplo, é feito o desacoplamento das variáveis de decisão e também a introdução de variáveis de folga, com base nos resultados de de Oliveira et al. (1999) e de Kim e Lee (2000), respectivamente.

6.2 Condições \mathcal{H}_∞ Aprimoradas: Caso Não-Quadrático

Nesta seção serão apresentadas condições LMI menos conservadoras, fundamentadas na função de Lyapunov dependente de parâmetros (6.2), para analisar sistemas TS estáveis ou para projetar controladores fuzzy com desempenho \mathcal{H}_∞ garantido.

6.2.1 Análise da Norma \mathcal{H}_∞

A mesma metodologia adotada para o caso quadrático pode ser estendida para a FLDP, conferindo as mesmas propriedades vantajosas de redução do conservadorismo. Além disso, adota-se também técnicas de introdução de multiplicadores matriciais (de Oliveira e Skelton, 2002; de Oliveira, 2004), que permitem a separação de algumas variáveis de decisão com relação a matrizes da dinâmica do sistema.

O teorema a seguir fornece condições suficientes para analisar se a norma \mathcal{H}_∞ de um sistema TS estável é limitada por γ .

Teorema 10 *Seja $\gamma > 0$ um valor dado. O sistema TS (5.1) é estável com norma \mathcal{H}_∞ dada por γ , para condições iniciais nulas, caso existam matrizes simétricas X_i , T_{ijt} , R_{it} e matrizes quaisquer L , S_{ijt} , $i, j, t \in \mathcal{R}$ que satisfazem o problema a seguir:*

$$\begin{aligned} &\text{encontre } X_i, L, T_{ijt}, S_{ijt}, R_{it}, i, j, t = 1, 2, \dots, r \\ &\text{s.a } T_{ijt} \succeq 0, \Omega_t \prec 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

sendo que

$$\Omega_t := \begin{bmatrix} Y_{1t} - Z_{1t} & * & \dots & * \\ Y_{21t} + W_{21t} & Y_{2t} - Z_{2t} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{r1t} + W_{r1t} & Y_{r2t} + W_{r2t} & \dots & Y_{rt} - Z_{rt} \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

$$Y_{it} := \begin{bmatrix} \Gamma_i & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ G_{ii} & E_i & -X_t & * \\ J_{ii} & F_i & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad Y_{ijt} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_j) & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{ji}) & \frac{1}{2}(E_i + E_j) & -X_t & * \\ \frac{1}{2}(J_{ij} + J_{ji}) & \frac{1}{2}(F_i + F_j) & 0 & -I \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\Gamma_i := X_i - L - L', \quad (6.6)$$

$$G_{ij} := A_i L + B_i K_j L, \quad J_{ij} := C_i L + D_i K_j L. \quad (6.7)$$

e as matrizes N_{ijt} , W_{ijt} e Z_{it} são definidas em (5.6), (5.7) e (5.8), respectivamente.

Demonstração 6 Seja a FLDP em (6.2) uma função candidata. Considere o índice de desempenho (4.23) para o sistema (5.1). O sistema é estável com norma \mathcal{H}_∞ dada por γ se

$$\mathcal{I}_\infty := \Delta V(x_k) + z'_k z_k - \gamma^2 w'_k w_k < 0, \quad (6.8)$$

sendo que

$$\Delta V(x_k) = x'_{k+1} \sum_{t=1}^r h_t^+ P_t x_{k+1} - x'_k \sum_{i=1}^r h_i P_i x_k. \quad (6.9)$$

De acordo com (5.1), obtém-se a descrição aumentada a seguir

$$\mathcal{I}_\infty = \sum_{t=1}^r h_t^+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{v=1}^r h_i h_j h_l h_v \xi' \left(\begin{bmatrix} G'_{ij} & J'_{ij} \\ E'_i & F'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_t & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{lv} & E_l \\ J_{lv} & F_l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \right) \xi, \quad (6.10)$$

sendo $\xi := [x'_k \quad w'_k]'$, $G_{ij} := A_i - B_i K_j$ e $J_{ij} := C_i - D_i K_j$.

Defina

$$\Lambda_{ab} := \begin{bmatrix} G_{ab} & E_a \\ J_{ab} & F_a \end{bmatrix}, \quad \check{P}_a := \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_a \triangleq \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Logo, (6.10) equivale a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\infty &= \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{v=1}^r h_i h_j h_l h_v \left(\Lambda'_{ij} \check{P}_t \Lambda_{lv} - \tilde{P}_i \right) \xi \\ &= \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{v=1}^r h_i h_j h_l h_v \frac{1}{8} \\ &\quad \left[(\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji})' \check{P}_t (\Lambda_{lv} + \Lambda_{vl}) + (\Lambda_{lv} + \Lambda_{vl})' \check{P}_t (\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}) - 8 \tilde{P}_i \right] \xi. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Aplicando o Lema 3 (vide apêndice A)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\infty &\leq \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{v=1}^r h_i h_j h_l h_v \frac{1}{8} \\
&\quad \left[(\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji})' \check{P}_t (\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}) + (\Lambda_{lv} + \Lambda_{vl})' \check{P}_t (\Lambda_{lv} + \Lambda_{vl}) - 8\tilde{P}_i \right] \xi \\
&= \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \frac{1}{4} \left[(\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji})' \check{P}_t (\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}) - 4\tilde{P}_i \right] \xi \\
&= \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2 \left[\Lambda_{ii}' \check{P}_t \Lambda_{ii} - \tilde{P}_i \right] \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{i < j} h_i h_j \left[\frac{(\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji})' \check{P}_t (\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji})}{2} - \tilde{P}_i \right] \right\} \xi \tag{6.13}
\end{aligned}$$

Define-se também:

$$\check{\Lambda}_{abc} := \begin{bmatrix} G'_{ab} P_c G_{ab} - P_a + J'_{ab} J_{ab} & * \\ E'_a P_c G_{ab} + F'_a J_{ab} & -\gamma^2 I + E'_a P_c E_a + F'_a F_a \end{bmatrix}, \tag{6.14}$$

e reescreve-se (6.13) como

$$\mathcal{I}_\infty \leq \mathcal{N} := \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \left[\sum_{i=1}^r h_i^2 \check{\Lambda}_{iit} + 2 \sum_{i < j} h_i h_j \frac{(\check{\Lambda}_{ijt} + \check{\Lambda}_{jit})}{2} \right] \xi. \tag{6.15}$$

Caso $\check{\Lambda}_{iit} < 0$ e $\check{\Lambda}_{ijt} < 0$ ($i < j$, $i, j, t \in \mathcal{R}$), garante-se que $\mathcal{N} < 0$ e também que $\mathcal{I}_\infty < 0$, devido a relação estabelecida em (6.15).

Neste ponto, as técnicas para redução de conservadorismo são empregadas. Aplicando o complemento de Schur a $\check{\Lambda}_{abc}$:

$$\tilde{\Lambda}_{abc} := \begin{bmatrix} -P_a & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ P_c G_{ab} & P_c E_a & -P_c & * \\ J_{ab} & F_a & 0 & -I \end{bmatrix}. \tag{6.16}$$

Define-se um multiplicador matricial $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (veja os detalhes em [Daafouz e Bernussou \(2001\)](#); [de Oliveira et al. \(1999\)](#); [de Oliveira e Skelton \(2002\)](#)).

Em (6.15), substitui-se $\check{\Lambda}_{abc}$ por $\tilde{\Lambda}_{abc}$ e aplica-se em seguida as seguintes transformações:

$$\mathcal{I}_\infty \leq S_2 [S_1 (\mathcal{N}) S_1'] S_2', \tag{6.17}$$

sendo que

$$S_1 := \text{diag}\{P_a^{-1}, I, P_c^{-1}, I\}, \quad S_2 \triangleq \text{diag}\{L' P_a, I, I, I\}, \tag{6.18}$$

para se obter

$$\mathcal{I}_\infty < \tilde{\mathcal{N}} = \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \left[\sum_{i=1}^r h_i^2 \hat{\Lambda}_{iit} + 2 \sum_{i<j}^r h_i h_j \frac{(\hat{\Lambda}_{ijt} + \hat{\Lambda}_{jit})}{2} \right] \xi, \quad (6.19)$$

tal que:

$$\hat{\Lambda}_{abc} := \begin{bmatrix} -L'X_aL & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ G_{ab}L & E_a & -X_c & * \\ J_{ab}L & F_a & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad X_a := P_a^{-1}. \quad (6.20)$$

Aplicando o lema $-L'X_aL \leq -(-X_a + L' + L)$, segue que

$$\tilde{\mathcal{N}} \leq \mathcal{M} := \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \left[\sum_{i=1}^r h_i^2 \check{\Lambda}_{iit} + 2 \sum_{i<j}^r h_i h_j \frac{(\check{\Lambda}_{ijt} + \check{\Lambda}_{jit})}{2} \right] \xi \quad (6.21)$$

sendo

$$\check{\Lambda}_{abc} := \begin{bmatrix} X_a - L' - L & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ G_{ab}L & E_a & -X_c & * \\ J_{ab}L & F_a & 0 & -I \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Finalmente, a mesma metodologia aplicada no caso quadrático pode ser adotada. Considera-se que $T_{ijt} \succeq 0$ e \tilde{S}_{ijt} , ($i, j, t \in \mathcal{R}$) são matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\leq \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \left[\sum_{i=1}^r h_i^2 \check{\Lambda}_{iit} + 2 \sum_{i<j}^r h_i h_j \left(\frac{\check{\Lambda}_{ijt} + \check{\Lambda}_{jit}}{2} + T_{ijt} + \tilde{S}_{ijt} \right) \right] \xi \\ &= \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \alpha[q_k] \tilde{\Omega}_t \alpha'[q_k] \xi, \end{aligned} \quad (6.23)$$

sendo que

$$\tilde{\Omega}_t := \begin{bmatrix} \check{\Lambda}_{11t} & * & \dots & * \\ \frac{1}{2} (\check{\Lambda}_{12t} + \check{\Lambda}_{21t}) + T_{21t} + \tilde{S}_{21t} & \check{\Lambda}_{22t} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} (\check{\Lambda}_{r1t} + \check{\Lambda}_{1rt}) + T_{r1t} + \tilde{S}_{r1t} & \frac{1}{2} (\check{\Lambda}_{r2t} + \check{\Lambda}_{2rt}) + T_{r2t} + \tilde{S}_{r2t} & \dots & \check{\Lambda}_{rrt} \\ \cdot & & & \end{bmatrix}$$

Aplicando o Lema 4 (vide apêndice A) segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \alpha[q_k] \left(\tilde{\Omega}_t + H \right) \alpha'[q_k] \xi \\
&= \xi' \sum_{t=1}^r h_t^+ \alpha[q_k] \Omega_t \alpha'[q_k] \xi,
\end{aligned} \tag{6.24}$$

tal que Ω_t é definido em (6.4).

Para garantir $\mathcal{M} < 0$ é suficiente que $\Omega_t \prec 0$, $t = 1, 2, \dots, r$, pois a restrição em (6.24) é convexa. As relações estabelecidas em (6.21), (6.15) e (6.8) implicam que o sistema TS estável em (5.1) tem norma \mathcal{H}_∞ limitada por γ , concluindo a demonstração. \square

Para se obter o valor ótimo da norma \mathcal{H}_∞ , basta modificar o problema de otimização do Teorema 10 para a forma a seguir:

Teorema 11 *O sistema TS (5.1) é estável com valor ótimo da norma \mathcal{H}_∞ dado por $\gamma_{\min} = \sqrt{\rho}$, para condições iniciais nulas, caso existirem matrizes simétricas X_i , T_{ijt} , R_{it} e matrizes quaisquer L , S_{ijt} , $i, j, t \in \mathcal{R}$ que satisfazem o problema a seguir:*

$$\begin{aligned}
&\min_{L, X_i, R_{ij}, T_{ijt}, S_{ijt}, \rho} && \rho \\
&\text{s.a.} && T_{ijt} \succeq 0, \quad \Omega_t \prec 0,
\end{aligned} \tag{6.25}$$

sendo que Ω_t é definido como em (6.4) a menos da troca de γ^2 por ρ em (6.5).

Demonstração 7 *Basta fazer a troca de variável linearizante $\gamma^2 := \rho$ em (6.20). Como as condições são convexas, o valor ótimo de ρ produz o valor mínimo do limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ .* \square

6.2.2 Síntese de Controladores \mathcal{H}_∞

As condições LMI para projeto de controlador PDC, baseadas na FLDP, podem ser facilmente obtidas a partir dos resultados de análise, da mesma maneira que foi demonstrado para o caso das condições quadráticas.

O teorema a seguir apresenta condições suficientes que garantem estabilidade e um desempenho de pior caso γ , para a norma \mathcal{H}_∞ , do sistema em malha fechada.

Teorema 12 *Seja $\gamma > 0$ um valor dado. O sistema TS (5.1) é estabilizável pelo controlador PDC (4.14) e possui desempenho em malha-fechada, para condições iniciais nulas, dado por γ , caso existam matrizes simétricas X_i , T_{ijt} , R_{it} e matrizes quaisquer L , M_i , S_{ijt} , $i, j, t \in \mathcal{R}$ que satisfazem o problema a seguir:*

$$\begin{aligned}
&\text{encontre} && L, X_i, M_i, T_{ijt}, S_{ijt}, R_{it}, i, j, t = 1, 2, \dots, r \\
&\text{s.a} && T_{ijt} \succeq 0, \quad \Omega_t \prec 0,
\end{aligned} \tag{6.26}$$

sendo Ω_t , Y_{it} , Y_{ijt} , Γ_i , N_{ijt} , W_{ijt} e Z_{it} definidas como em (6.4), (6.5), (6.6), (5.6), (5.7) e (5.8), respectivamente, porém:

$$G_{ij} := A_i L + B_i M_j, \quad M_{ij} := C_i + D_i M_j. \quad (6.27)$$

Caso exista solução, os ganhos do controlador são obtidos fazendo-se $K_i = M_i L^{-1}$.

Demonstração 8 A demonstração segue os passos mostrados para o Teorema 10, porém fazendo a troca de variáveis $M_i := K_i L$ nas matrizes (6.22). \square

Reformulando o problema de factibilidade do Teorema 12 em um problema de minimização, pode-se obter o controlador PDC que garante estabilidade e o valor ótimo da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha-fechada:

Teorema 13 O sistema TS (5.1) é estabilizável pelo controlador PDC (4.14) e possui desempenho ótimo em malha-fechada, para condições iniciais nulas, dado por ρ , caso existam matrizes simétricas X_i , T_{ijt} , R_{it} e matrizes quaisquer L , M_i , S_{ijt} , $i, j, t \in \mathcal{R}$ que satisfazem o problema a seguir:

$$\begin{aligned} \min_{L, X_i, M_i, R_{ij}, T_{ijt}, S_{ijt}, \rho} \quad & \rho \\ \text{s. a.} \quad & T_{ijt} \succeq 0, \quad \Xi_t \prec 0, \end{aligned} \quad (6.28)$$

sendo Ω_t , Γ_i , G_{ij} , J_{ij} , N_{ijt} , W_{ijt} e Z_{it} definidas como em (6.4), (6.6), (6.27), (5.6), (5.7) e (5.8), respectivamente. As matrizes Y_{it} , Y_{ijt} são definidas como em (6.5), porém considerando $\gamma^2 = \rho$.

Caso exista solução, os ganhos do controlador são obtidos fazendo-se $K_i = M_i L^{-1}$ e o valor ótimo da norma \mathcal{H}_∞ é dada por $\gamma_{\min} = \sqrt{\rho}$.

Demonstração 9 A demonstração segue os passos mostrados para o Teorema 10, porém fazendo a troca de variáveis linearizantes $M_i := K_i L$ e $\rho := \gamma^2$ nas matrizes (6.22) para eliminar o produto das variáveis de decisão. \square

Observação 5 Note que os Teoremas 6-9 são casos particulares dos Teoremas 10-13, respectivamente. Basta fazer $P_i = P$, $i \in \mathcal{R}$ e $L = P$ para se obter as mesmas condições LMI. Portanto, os teoremas baseados na FLDP irão produzir resultados melhores, ou no mínimo iguais, aos dos teoremas baseados na FLQ.

Observação 6 Os resultados não-quadráticos têm também como vantagem o fato de que as matrizes do sistema estão separadas das matrizes da FLDP, tornando o problema menos restrito. Além disso, a matriz L usada para se obter o controlador não precisa ser simétrica, como no caso quadrático em que o controlador depende de X .

Tabela 6.1: Valor ótimo γ_{\min} da norma \mathcal{H}_{∞}

Abordagem	γ_{\min}
(Zhou et al., 2005, Teorema 2)	0,5360
(Zhou et al., 2007, Teorema 1)	0,8328
(Zhou et al., 2007, Teorema 2)	0,7472
Teorema 11	0,5139

Tabela 6.2: Valores de γ_{\min} para diferentes parâmetros: abordagens não-quadráticas

a	0,0	0,2	0,4	0,6
γ_{\min} com (Gao et al., 2005)	1,3244	1,5277	2,0395	5,5236
γ_{\min} com Teorema 11	1,3231	1,4667	1,8400	5,2001

6.3 Resultados

As estratégias não-quadráticas propostas neste capítulo são comparadas com resultados da literatura. Por meio de exemplos numéricos é possível determinar o grau de redução no conservadorismo obtido.

6.3.1 Exemplo 1

Considera-se novamente o Exemplo 5.3.1. Aplicando o Teorema 13, o valor ótimo da norma \mathcal{H}_{∞} obtido é 0,1216, enquanto (Wang e Feng, 2004) consegue determinar 2,1.

6.3.2 Exemplo 2

Este exemplo é retirado de Zhou et al. (2005). Aqui o objetivo é determinar o valor ótimo da norma \mathcal{H}_{∞} do sistema TS (5.1) em malha aberta, cujas matrizes locais são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,291 & 1 \\ 0 & 0,95 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 \\ 1 & -0,2 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} -0,09 & 0,05 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} -0,5 \end{bmatrix}.$$

Os resultados obtidos segundo o Teorema 11, (Zhou et al., 2005, Teorema 2) e Zhou et al. (2007) são mostrados na Tabela 6.1. As abordagens quadráticas (Cao e Frank, 2000) e aquela baseada no Teorema 7, por exemplo, não são factíveis. Com a abordagem baseada no Teorema 11 obtém-se o menor valor da norma \mathcal{H}_{∞} .

6.3.3 Exemplo 3

Novamente o Exemplo 5.3.2 é considerado, porém utilizando abordagens não-quadráticas. Os resultados são mostrados na Tabela 6.2, na qual se nota que o melhor resultado é obtido segundo o Teorema 11.

Tabela 6.3: γ_{\min} calculado de acordo com β

β	(Zhou et al., 2007, Teo. 3)	(Zhou et al., 2007, Teo. 4)	Teo. 9	Teo. 13
0,01000	0,0167	0,0167	0,0167	0,0167
0,10000	0,0168	0,0169	0,0168	0,0168
0,50000	0,0175	0,0192	0,0175	0,0171
1,00000	0,0200	0,3322	0,0190	0,0180
1,01459	0,0202	99,949	0,0191	0,0180
1,43200	8,7340	-	0,0257	0,0203
1,45000	-	-	0,0265	0,0205
1,50000	-	-	0,0290	0,0209
1,75000	-	-	0,0794	0,0250
1,90000	-	-	-	0,0309
2,00000	-	-	-	0,0394
2,03069	-	-	-	0,1819
2,03070	-	-	-	0,5279
2,22999	-	-	-	0,9158
2,30000	-	-	-	-

6.3.4 Exemplo 4

Seja o sistema TS do exemplo retirado de (Zhou et al., 2007):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 5 + \beta \\ 2\beta \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 5 - \beta \\ -2\beta \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} -0,1 & -0,05 \end{bmatrix}, D_1 = D_2 = 0,5, F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,01 \end{bmatrix}.$$

Controladores são projetados para garantir o valor ótimo da norma \mathcal{H}_∞ para diversos valores do parâmetro β . A Tabela 6.3 resume os resultados obtidos. Note que para todas as estratégias γ_{\min} cresce à medida que o parâmetro β aumenta. Aqui foi incluído também o resultado obtido pela condição quadrática do Teorema 9.

Para $|\beta| < 0,5$ todas as abordagens testadas encontram limitantes γ muito próximos. Quando β é próximo de 1, o desempenho de (Zhou et al., 2007, Teorema 4) se degrada, enquanto as outras abordagens conseguem determinar valores pequenos de γ_{\min} .

Contudo, nota-se claramente que ambas abordagens propostas nesta dissertação, quadrática e não-quadrática, são factíveis para valores maiores de β e também proporcionam melhor atenuação de distúrbios, vide os valores em negrito da Tabela 6.3, quando comparadas com resultados recentes de Zhou et al. (2007). Vale destacar o grau de redução no conservadorismo obtido, pois mesmo a abordagem proposta nesta dissertação baseada na FLQ foi capaz de gerar melhores resultados que uma abordagem baseada na FLDP como em (Zhou et al., 2007).

Capítulo 7

Resultados Práticos

Neste capítulo, o uso efetivo das estratégias de controle fuzzy \mathcal{H}_∞ desenvolvidas ao longo desta dissertação é testado em uma bancada experimental. Na plataforma PCCHUA (Tórreres e Aguirre, 2005), são implementados sistemas de controle digital e de aquisição de dados que permitem realizar, em tempo real, experimentos de sincronismo e controle com o circuito oscilador de Chua. Esse sistema serve como referência para testar diversas estratégias de controle não-linear, devido a sua rica dinâmica e comportamento caótico.

7.1 Problema de Sincronismo e Transmissão de Informações

Inicialmente, sejam a seguir dois sistemas dinâmicos não-lineares:

$$\begin{aligned} \text{Mestre:} \quad & \begin{cases} x_{k+1} &= f[x_k] + w_k \\ y_k &= h[x_k] \end{cases}, \\ \text{Escravo:} \quad & \begin{cases} \hat{x}_{k+1} &= f[\hat{x}_k] + u_k \\ \hat{y}_k &= h[\hat{x}_k] \end{cases}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

sendo $x_k, \hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ os vetores de estados dos sistemas *mestre* e *escravo*, respectivamente; a transição dos estados é feita segundo o mapeamento $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $y_k, \hat{y}_k \in \mathbb{R}^m$ são saídas medidas, mapeadas de acordo com $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; $u_k \in \mathbb{R}^n$ é um sinal de entrada que pode atuar sobre a dinâmica do escravo; $w_k \in \mathbb{R}^p$ é um sinal de distúrbio externo.

Sincronização pode ser definida como uma condição alcançada quando mestre e escravo descrevem, simultaneamente, uma trajetória idêntica no espaço de estados. Devido a efeitos de carga, ruídos, interferências e até mesmo por questões estruturais, isto pode não ser possível.

Por outro lado, sincronização robusta pode ser vista como uma sincronização de alta qualidade e quase-idêntica, na qual garante-se que a distância entre as trajetórias fica limitada por uma quantidade ϵ mesmo na presença de perturbações externas:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - \hat{x}_k\| \leq \epsilon. \tag{7.2}$$

Uma alternativa para se garantir sincronização robusta é guiar um dos sistemas, o escravo,

para a mesma trajetória do outro sistema por meio de uma ação de controle proporcional à diferença entre as saídas dos sistemas

$$u_k = g[y_k - \hat{y}_k]. \quad (7.3)$$

Essa lei de controle serve então para minimizar o erro de sincronização, $e_k := x_k - \hat{x}_k$. O objetivo da sincronização robusta pode ser interpretado como determinar uma lei de controle que seja capaz de garantir a estabilidade assintótica da dinâmica do erro de sincronismo:

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= f[x_k] - f[\hat{x}_k] - u_k + w_k \\ e_{k+1} &= f[x_k] - f[\hat{x}_k] - g\{h[x_k] - h[\hat{x}_k]\} + w_k \end{aligned}$$

O estudo da sincronização de sistemas caóticos desenvolveu-se intensamente ao longo das últimas décadas, impulsionado pelos trabalhos pioneiros de Fujisaka e Yamada (1983) e de Pecora e Carroll (1990), nos quais evidências teóricas e práticas, respectivamente, demonstraram a viabilidade do sincronismo.

Uma das áreas da engenharia que se beneficiou desse estudo foi o campo das comunicações. A motivação inicial era transmitir informação de forma segura usando osciladores caóticos que possuíssem banda larga, pois são caracterizados por exibirem padrões similares a sinais de ruído, embora sejam determinísticos, e também pela dificuldade em sua predição. A idéia era usá-los como portadores que escondessem sinais de informação em sua dinâmica (Kocarev et al., 1992). Inserindo um sinal de informação no sistema mestre como uma perturbação aditiva, um novo par de equações dinâmicas é obtido:

$$\begin{aligned} \text{Transmissor: } x_{k+1} &= f[x_k] + i_k \\ \text{Receptor: } \hat{x}_{k+1} &= f[\hat{x}_k] + u_k \end{aligned} \quad (7.4)$$

O sinal de informação pode ser recuperado no sistema escravo por meio de uma técnica de demodulação coerente, caso a sincronização robusta seja estabelecida. Todavia, para garantir que a transmissão da informação esteja imune a ataques, outras condições devem ser analisadas (Anstett et al., 2006).

Outra motivação em comunicação usando certos sinais caóticos, proporcionada pelo amplo espectro¹, é o aumento da robustez com relação à transmissão de informação em faixas estreitas de frequência, que sofre com os efeitos de cancelamento de sinal, em virtude da propagação multi-caminho, intensificada em ambientes fechados, e também da interferência em faixas de frequência específicas (Kolumbán et al., 1997).

Ainda dentro do contexto de comunicação, merece destaque o uso de sinais caóticos em sistemas de criptografia (Anstett et al., 2006; Zhang e Min, 2005). Um dos resultados mais interessantes talvez seja o sincronismo de lasers em comunicações ópticas (VanWiggeren e Roy, 1998).

¹Essa não é uma propriedade geral de sistemas caóticos. Vários sinais caóticos são de banda estreita

Recentemente, foi mostrado em (Tôrres, 2007) uma nova aplicação em engenharia para o sincronização de sistemas, particularmente no campo da identificação de sistemas. Neste caso, mostra-se que a diferença entre a dinâmica exibida por um modelo discreto e os dados coletados para identificá-lo pode ser avaliada como um subproduto do procedimento de sincronização.

Nesta dissertação, contudo, o interesse pelo problema de sincronismo de osciladores para transmissão de informações não se dá, exclusivamente, pelos seus desdobramentos práticos. Na verdade, os experimentos irão servir para verificar o uso efetivo das técnicas de controle \mathcal{H}_∞ propostas em um ambiente real, sujeito a variações paramétricas, distúrbios e ruídos.

Como proposto em (Tôrres e Aguirre, 2004), o princípio da transmissão de informação via controle (ITVC) estabelece que qualquer controlador que garanta sincronização idêntica, ou quase-idêntica, é capaz de atuar como um demodulador e recuperar a informação contida no mestre. Portanto, nesta dissertação, adota-se a transmissão de informações como um índice para mensurar a qualidade da estratégia de controle fuzzy. Não será avaliado se a estratégia é eficaz apenas pelo erro de sincronização obtido, mas também pela capacidade de recuperação de informação.

7.2 Plataforma PCCHUA

O circuito oscilador de Chua (Matsumoto, 1984; Chua et al., 1986), Figura 7.1, é composto por 4 elementos lineares (indutor, dois capacitores e um resistor) e um elemento não-linear, denominado diodo de Chua. Este circuito foi desenvolvido com a finalidade de se produzir um experimento de laboratório capaz de demonstrar, na época, que caos é um fenômeno físico presente na natureza e não apenas presente em simulações computacionais, como observado por Lorenz (1963).

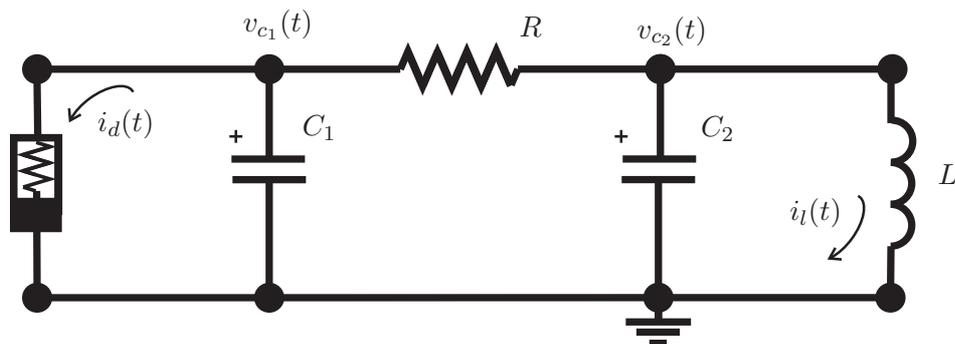


Figura 7.1: Diagrama esquemático do circuito de Chua.

O sistema tornou-se uma referência para estudos de controle não-linear devido à presença de comportamento caótico e, principalmente, pela facilidade de implementação na prática. Possui 3 pontos de equilíbrio instáveis e sua trajetória, no espaço de estados, fica confinada em um atrator estranho de dupla volta (Chua et al., 1986). A dinâmica do sistema é descrita por uma equação diferencial de terceira ordem, mostrada a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_{c_1}(t)}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left\{ \frac{1}{R} [v_{c_2}(t) - v_{c_1}(t)] - G(v_{c_1}(t)) \right\} \\
\frac{dv_{c_2}(t)}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left\{ \frac{1}{R} [v_{c_1}(t) - v_{c_2}(t)] + i_l \right\} \\
\frac{di_l(t)}{dt} &= \frac{1}{L} [-v_{c_2}(t) - R_0 i_l(t)]
\end{aligned} \tag{7.5}$$

onde o vetor de estados é representado por $x = [v_{c_1} \ v_{c_2} \ i_l]'$ que são, respectivamente, as tensões sobre os capacitores e a corrente no indutor.

A dinâmica não-linear se deve ao fato da resistência do diodo depender da tensão aplicada, de acordo com a função $G(v_{c_1}(t))$, que tem comportamento linear por partes. Quando a tensão fica limitada a $\pm E$ V, a condutância do diodo é igual a G_a e fora desse intervalo de tensão assume o valor G_b . A linha cheia da Figura (7.2) ilustra a condutância.

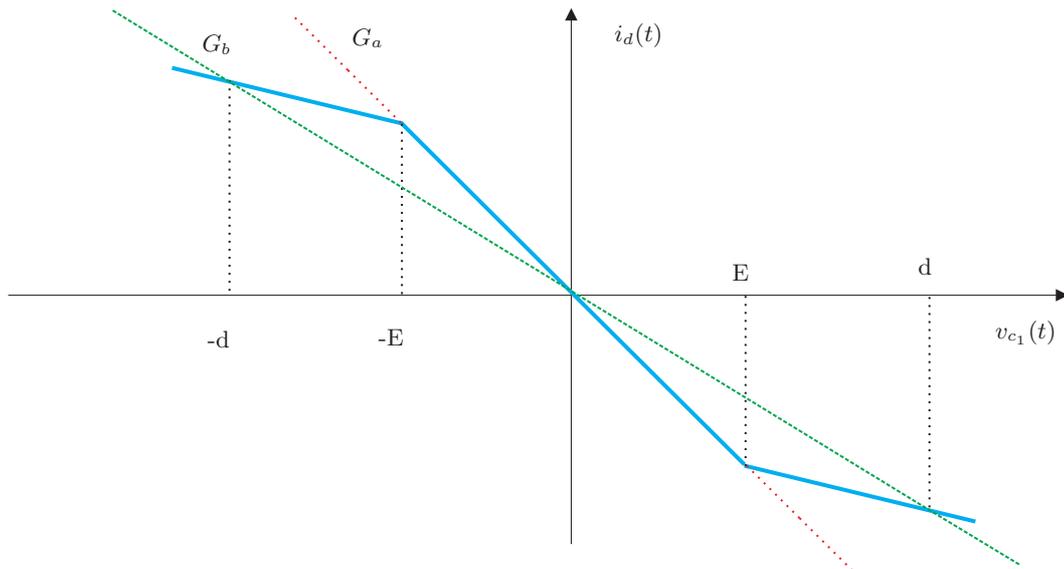


Figura 7.2: Característica da condutância do diodo de Chua.

No laboratório do grupo de pesquisa MACSIN encontra-se uma implementação física do circuito de Chua, na qual o papel do indutor é substituído por um circuito emulador contendo amplificadores operacionais. Além do oscilador, encontra-se todo um aparato de controle digital e aquisição de dados formando a chamada plataforma PCCHUA (Tôrres e Aguirre, 2005).

De forma esquemática, a estrutura da plataforma PCCHUA pode ser visualizada na Figura 7.3. Nesta montagem existe um acoplamento unidirecional entre os osciladores, sendo que $y(t)$ e $\hat{y}(t)$, são as saídas de mestre e escravo, respectivamente. Existem duas fontes de

corrente que atuam sobre as tensões dos capacitores, comandadas por sinais de tensão. A corrente do indutor é controlada por meio de uma fonte de tensão, comandada também por tensão. Os sinais são adquiridos por meio de três canais de conversão A/D² com 12 bits de resolução, a uma taxa de amostragem máxima de 1 kHz. Com relação aos atuadores, existem dois canais D/A, para as fontes de corrente, com resolução de 10 bits, e um canal para a fonte de tensão, com resolução de 8 bits.

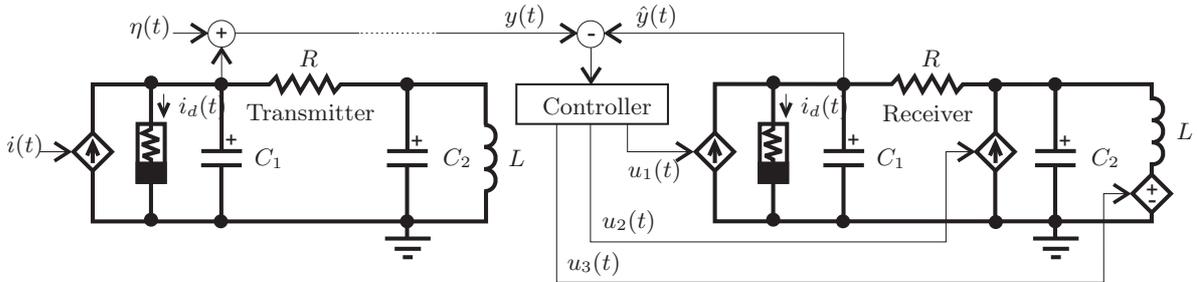


Figura 7.3: Diagrama esquemático do experimento de transmissão de informações.

Na plataforma PCCHUA, apenas um circuito está disponível, servindo tanto como mestre quanto como escravo. Quando configurado como mestre, ele pode oscilar livremente ou então oscilar perturbado por com sinais de escolhidos. As perturbações são adicionadas na dinâmica utilizando os próprios atuadores de corrente e tensão. A série temporal do mestre pode então ser gravada em um arquivo no computador do PCCHUA.

Na configuração escravo é possível configurar diversas estratégias de controle, incluindo o controle fuzzy \mathcal{H}_∞ proposto neste trabalho. Também é possível utilizar os dados de séries temporais previamente guardadas no computador e realizar os experimentos de sincronismo. Informações adicionais podem ser vistas no trabalho de [Tôrres e Aguirre \(2005\)](#), onde a plataforma é apresentada em detalhes, incluindo aspectos construtivos.

7.2.1 Modelagem Fuzzy

Um modelo fuzzy para esse oscilador é bastante direto, dada sua característica linear por partes. Como a característica não-linear depende da tensão no capacitor C_1 , esta será a variável premissa, $q := v_{c_1}(t)$. Embora existam três regiões lineares de operação na dinâmica do diodo, apenas dois modelos locais são utilizados, devido à simetria da curva de condutância.

No primeiro modelo, para baixas tensões em módulo, assume-se G_a como valor de condutância para o diodo de Chua, conforme está destacado na Figura 7.2 por uma linha pontilhada.

Para definir o universo de discurso da premissa, é necessário assumir que a tensão sobre o capacitor C_1 é limitada. Como a dinâmica fica confinada em um atrator dupla volta, conforme mostram a teoria ([Chua et al., 1986](#)) e a prática ([Tôrres e Aguirre, 2005](#)), assume-se que os valores extremos de tensão são $\pm d$. O universo de discurso então é dado por $q \in [-d, d]$.

O segundo modelo linear captura a dinâmica de forma exata no extremo do universo de discurso e de forma aproximada na sua vizinhança. Isso fica mais claro ao se observar

²A/D: analógico-digital. D/A: digital-analógico

na Figura 7.2 a outra linha pontilhada que intercepta a curva do diodo nos pontos $\pm d$ e cruza a origem. A condutância para esse modelo é dada por $G = (G_b + \frac{(G_a - G_b)E}{d})$. Essa estratégia de modelagem baseada nas equações do sistema está mostrada em maiores detalhes em (Wang et al., 1996).

A seguir são apresentadas ambas as regras Se-Então formuladas:

$$R_1 : \begin{cases} \text{SE} & v_{c_1}(t) \text{ é } \Phi_1 \text{ (próximo de zero)} \\ \text{ENTÃO} & \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1x(t) + B_1u(t) + E_1w(t) \\ y(t) &= C_1x + D_1w(t) \end{aligned} \end{cases} \quad (7.6)$$

$$R_2 : \begin{cases} \text{SE} & v_{c_1}(t) \text{ é } \Phi_2 \text{ (valores altos de tensão em módulo)} \\ \text{ENTÃO} & \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_2x(t) + B_2u(t) + E_2w(t) \\ y(t) &= C_2x + D_2w(t) \end{aligned} \end{cases} \quad (7.7)$$

A informação a ser transmitida $i(t)$ é injetada na equação que descreve a variação temporal de $v_{c_1}(t)$ do oscilador mestre, como mostrado na Figura 7.3. Todavia, salienta-se que plataforma PCCHUA é bastante versátil, permitindo perturbação em todos os estados. Matematicamente, essa perturbação corresponde a uma modificação nas equações diferenciais que governam a dinâmica do oscilador. Assim, o sinal $y(t)$ é usado como portador e serve de referência para sincronização com o oscilador escravo. Esse sinal pode ser corrompido por ruídos ou interferências $\eta(t)$.

A discretização da planta foi necessária uma vez que a estratégia de controle PDC foi formulada para sistemas discretos. O procedimento de discretização seguiu o método proposto por Mendes e Billings (2002). Nesse trabalho, mostra-se que é possível usar o método de discretização de Euler para sistemas caóticos preservando os pontos fixos do sistema. Logo as matrizes do sistemas são dadas por:

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 - T/(RC_1) - TG_a/C_1 & T/(RC_1) & 0 \\ T/(RC_2) & 1 - T/(RC_2) & T/C_2 \\ 0 & -T/L & 1 - TR_0/L \end{bmatrix},$$

$$A_2 := \begin{bmatrix} 1 - T/(RC_1) - TG/C_1 & T/(RC_1) & 0 \\ T/(RC_2) & 1 - T/(RC_2) & T/C_2 \\ 0 & -T/L & 1 - TR_0/L \end{bmatrix},$$

$$B_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0,001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}', \quad D_{(1,2)} = [0,0001],$$

sendo que T é o período de amostragem.

As matrizes $A_{1,2}$ descrevem a dinâmica linearizada em torno dos pontos de operação 0 e $\pm d$ para o sistema discreto. Já as matrizes $B_{(1,2)}$ indicam a direção de atuação do sinal de controle, enquanto as matrizes $E_{(1,2)}$ e $D_{(1,2)}$ modelam o ruído no sistema e na saída,

respectivamente. Considera-se que o sinal de controle irá atuar sobre todos os estados do sistema e que o ruído é mais significativo no estado $v_{c1}(t)$.

As funções de pertinência foram escolhidas segundo (Wang e Tanaka, 1996) e são reproduzidas na Figura 7.4. Nota-se que são funções complementares.

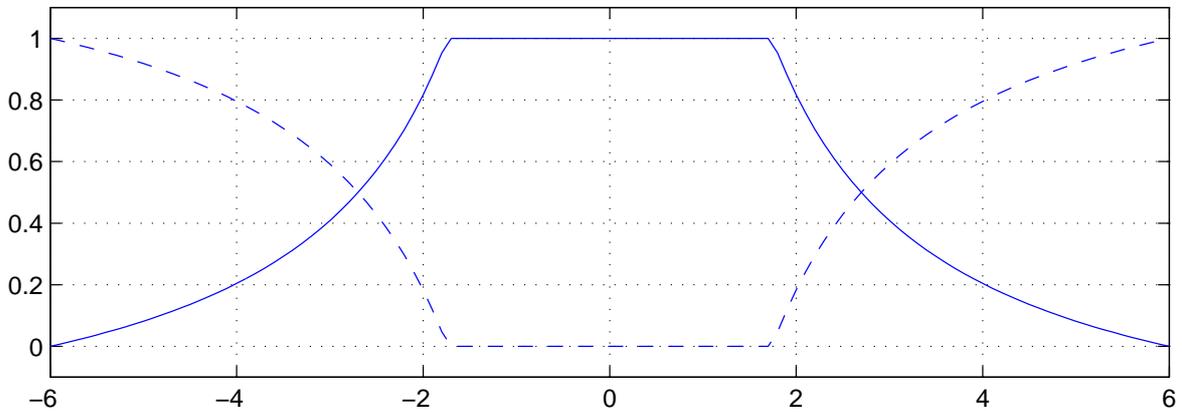


Figura 7.4: Funções de pertinência: regra 1 (linha cheia); regra 2 (linha pontilhada).

Outros métodos poderiam ser aplicados na escolha da função de pertinência, mas a modelagem adotada consegue representar de maneira exata a característica do diodo. Na Figura 7.5 a linha representa a característica real do diodo e os pontos assinalados com ‘×’ indicam o resultado da modelagem. Parte dos parâmetros do circuito foi medida e o restante estimado segundo o processo descrito em (Aguirre et al., 2005) utilizando Filtro de Kalman *Unscented*. Os parâmetros são mostrados na Tabela 7.1.

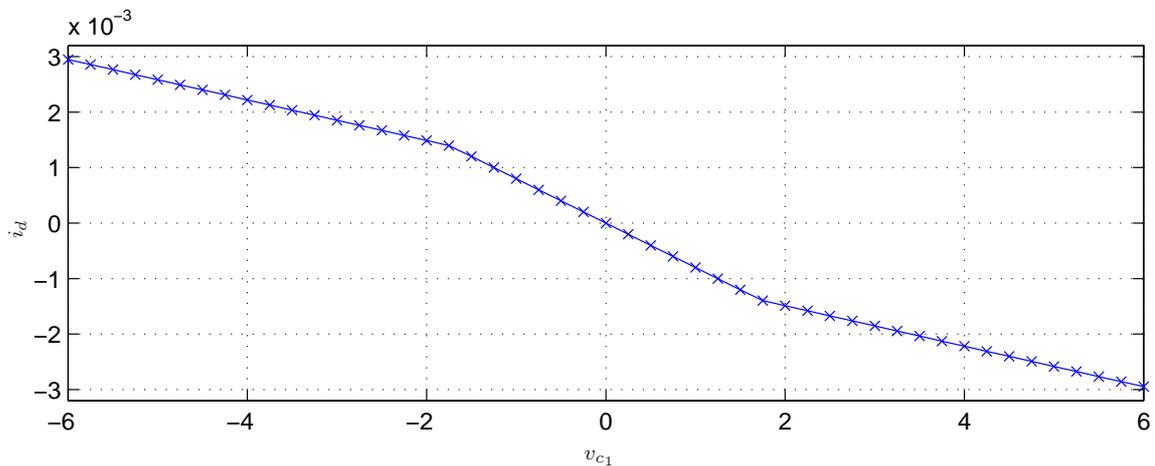


Figura 7.5: Comparação entre a curva real do diodo e a curva segundo o modelo fuzzy.

7.3 Procedimento da Síntese

Os resultados desenvolvidos para controle \mathcal{H}_∞ podem ser adaptados ao problema de sincronização de sistemas. Com base nas duas regras fuzzy (7.6) e (7.7), desenvolvidas para

Tabela 7.1: Parâmetros do circuito de Chua.

Parâmetros	Valores
C_1	30,14 μF
C_2	185,6 μF
L	52,28 H
R	1673 Ω
R_0	0 Ω
G_a	-0,801 mS
G_b	-0,365 mS
E	1,74 V
d	6 V

representar a dinâmica do circuito de Chua, a dinâmica do erro de sincronismo em (7.4) pode ser escrita na forma TS a seguir:

$$e_{k+1} = \sum_{i=1}^r h_i[q_k] \{A_i e_k + E_i w_k - u_k\}, \quad (7.8)$$

$$y_k = \sum_{i=1}^r h_i[q_k] \{C_i e_k + D_i w_k\}. \quad (7.9)$$

Recordando, o erro de sincronização é dado por $e_k := x_k - \hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$; as perturbações são $w_k \in \mathbb{R}^p$; o sinal de controle é $u_k \in \mathbb{R}^n$; a saída medida do sistema é dada por $y_k \in \mathbb{R}^m$.

Um controlador PDC pode ser usado para se obter sincronismo, no lugar da lei de controle não-linear em (7.3):

$$u_k := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k] h_j[q_k] L_i \{C_j e_k + D_j w_k\}, \quad (7.10)$$

sendo $L_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ os ganhos do controlador.

Combinando (7.8) e (7.10), a forma TS para a dinâmica do erro de sincronização é dada por:

$$e_{k+1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k] h_j[q_k] \{[A_i - L_i C_j] e_k + [E_i - L_i D_j] w_k\}. \quad (7.11)$$

Define-se também uma saída de desempenho $z_k \in \mathbb{R}^l$, para avaliar e ponderar a interação entre erro de sincronização e distúrbio:

$$z_k = \sum_{i=1}^r h_i[q_k] \{\Psi_i e_k + \Theta_i w_k\}. \quad (7.12)$$

A dinâmica do erro de sincronização \mathcal{E} fica então da forma a seguir:

$$\mathcal{E} := \begin{cases} e_{k+1} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[q_k] h_j[q_k] \{ [A_i - L_i C_j] e_k + [E_i - L_i D_j] w_k \} \\ z_k &= \sum_{i=1}^r h_i[q_k] \{ \Psi_i e_k + \Theta_i w_k \} \end{cases} \quad (7.13)$$

O controlador deve manter o erro de sincronização sempre limitado, para atingir estabilização robusta, e minimizar os efeitos dos distúrbios na saída calculada. Para isso, o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ é bastante adequado, pois, em uma aplicação prática, existe alto grau de incerteza com relação ao padrão espectral da perturbação que afeta o sistema. Busca-se então minimizar o ganho induzido entre o distúrbio w_k e a saída calculada z_k .

Observação 7 *As matrizes Ψ_i e Θ_i são escolhas “ad hoc” de acordo com as características do problema. Portanto a saída calculada z_k serve como um parâmetro de ajuste no controle \mathcal{H}_∞ , sendo possível ponderar perturbações em determinadas direções com maior relevância que em outras. Da mesma forma é possível dar maior importância a alguns estados do que a outros.*

Observação 8 *Note que a estrutura de controle para sincronismo assemelha-se bastante com a estrutura de um observador de estados. Ambas estruturas compartilham o mesmo objetivo: fazer com que um sistema siga a mesma trajetória no espaço de estados que outro sistema.*

O teorema a seguir estabelece o procedimento para síntese de controladores, via LMIs, que garantem estabilidade assintótica da dinâmica \mathcal{E} , além do custo garantido mínimo da norma \mathcal{H}_∞ , para condições iniciais nulas.

Teorema 14 *Considere a dinâmica do erro de sincronização em (7.13). Caso existam matrizes simétricas X , T_{ijt} , R_{it} e matrizes quaisquer M_i , S_{ijt} que satisfaçam o problema a seguir*

$$\begin{aligned} & \min_{X, M_i, R_{ij}, T_{ijt}, S_{ijt}, \rho} \rho \\ & \text{s.a} \quad T_{ijt} \succeq 0, \quad \kappa_t \prec 0, \end{aligned} \quad (7.14)$$

onde

$$\kappa_t := \begin{bmatrix} V_1 - Z_{1t} & * & \cdots & * \\ V_{12} + N_{21t} & V_2 - Z_{2t} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{1r} + N_{r1t} & V_{2r} + N_{r2t} & \cdots & V_r - Z_{rt} \end{bmatrix}$$

$$V_i := \begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ Y_{ii} & -X & * & * \\ 0 & H'_{ii} & -\rho I & * \\ \Psi_i & 0 & \Theta_i & -I \end{bmatrix}, \quad V_{ij} := \begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ O_{ij} & -X & * & * \\ 0 & U'_{ij} & -\rho I & * \\ \Gamma_{ij} & 0 & \Upsilon_{ij} & -I \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

$$Y_{ij} := X A_i - M_i C_j, \quad H_{ij} := X E_i - M_i D_j, \quad (7.16)$$

$$O_{ij} := \frac{Y_{ij} + Y_{ji}}{2}, \quad U_{ij} := \frac{H_{ij} + H_{ji}}{2}, \quad (7.17)$$

$$\Gamma_{ij} := \frac{\Psi_i + \Psi_j}{2}, \quad \Upsilon_{ij} := \frac{\Theta_i + \Theta_j}{2}, \quad (7.18)$$

tal que N_{ijt} , W_{ijt} , Z_{it} são definidas em (5.6), (5.7) e (5.8), respectivamente, então os ganhos do controlador que garante sincronização robusta com valor ótimo $\gamma = \sqrt{\rho}$ da norma \mathcal{H}_∞ são dados por $L_i := X^{-1}M_i$.

Demonstração 10 A demonstração foi publicada com detalhes em (Mozelli et al., 2007) e segue passos similares ao da demonstração do Teorema 9.

7.4 Experimentos

A transmissão de informação é investigada no contexto do princípio ITVC (Tôrres e Aguirre, 2004) para averiguar a eficácia das estratégias de controle propostas em uma situação prática. O sinal de controle será usado para sincronizar os osciladores mestre e escravo com o objetivo de atuar como um demodulador e recuperar informação. As matrizes que determinam a saída de desempenho foram selecionadas sendo

$$\Psi_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Theta_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Teorema 14 no pacote *LMI Control Toolbox* do Matlab[®], foram calculados os ganhos de sincronização mostrados na Tabela 7.2. O controlador PDC obtido garante que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada é limitada por $\gamma = 9,061 \times 10^{-4}$ quando é considerado um período de amostragem $T = 10$ ms.

Tabela 7.2: Ganhos de sincronização obtidos com o uso do Teorema 14

	L_1	L_2
u^1	$1,0668 \times 10^2$	$9,4710 \times 10^1$
u^2	2,9186	2,9188
u^3	$5,4422 \times 10^{-5}$	$5,4084 \times 10^{-5}$

A plataforma PCCHUA permite o uso de uma vasta gama de sinais para serem inseridos na dinâmica do circuito. Alguns experimentos são detalhados a seguir.

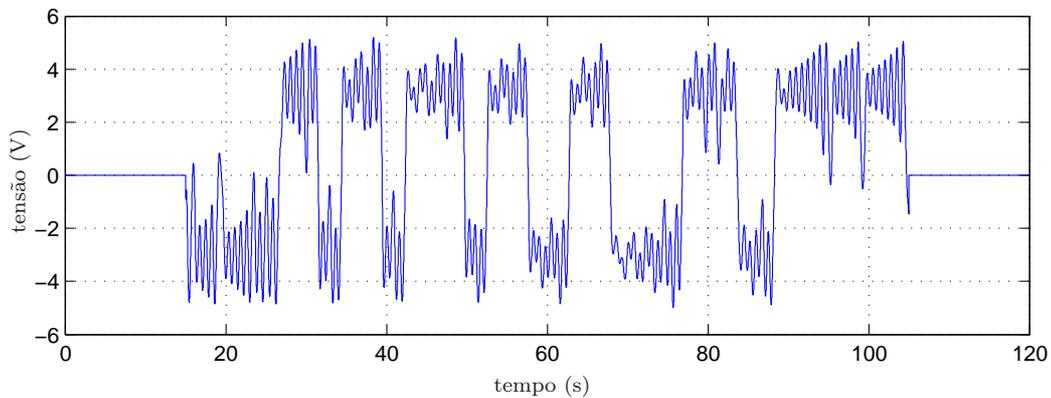
7.4.1 Metodologia

A metodologia dos experimentos seguiu o mesmo padrão, trocando-se apenas o sinal transmitido. Configurado como mestre, o circuito trabalha durante 90 s e os dados são coletados. No intervalo de 15 s a 75 s o sinal de informação é injetado no oscilador mestre apenas em v_{c_1} . O resultado fica guardado em um arquivo.

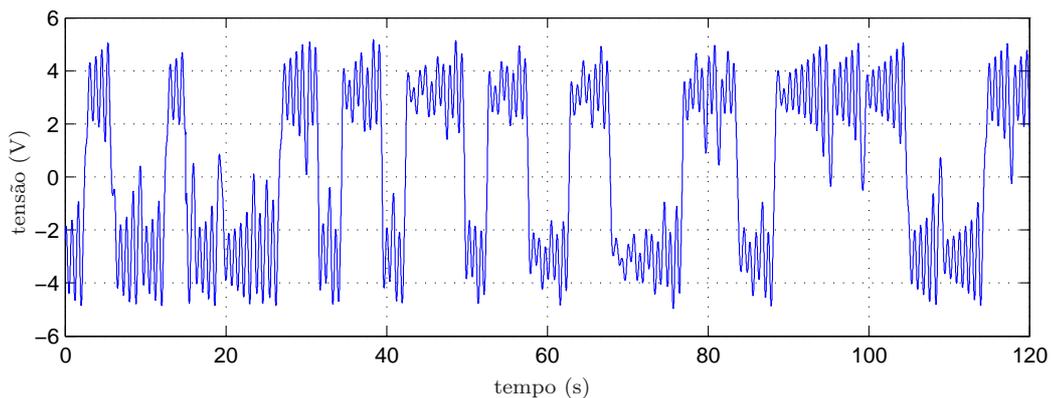
Em seguida, o circuito é reiniciado na configuração escravo, partindo de condições iniciais aleatórias. Os dados armazenados são carregados e servem de referência para o controlador. O circuito trabalha em malha aberta durante 15 s, momento em que se ativa o sinal de controle. A transmissão de informações ocorre na janela de 30 s até 90 s. O sistema ainda funciona em malha fechada por mais 15 s, finalizando um total de 120 s de teste que ficam guardados em outro arquivo.

7.4.2 Sinal Senoidal Puro

No primeiro teste foi transmitido um sinal senoidal puro de 0,5 Hz e 0,12 mV de amplitude. A Figura 7.6 ilustra as séries temporais do mestre e do escravo no estado v_{c1} . O erro de sincronismo é muito pequeno, como se observa na Figura 7.7. Esse erro corresponde a menos de 1% do maior erro permitido (quando as tensões nos osciladores estão nos limites do universo de discurso com sinais trocados).



(a) série do mestre



(b) série do escravo

Figura 7.6: Séries do mestre e do escravo no estado v_{c1} .

Os sinais transmitido e recuperado (que é o sinal de controle) são apresentados na Figura 7.8. Após aplicar um filtro digital passa-baixas Butterworth de segunda ordem, com frequência de corte $f_c = 1$ Hz, o sinal obtido é mostrado na Figura 7.9.

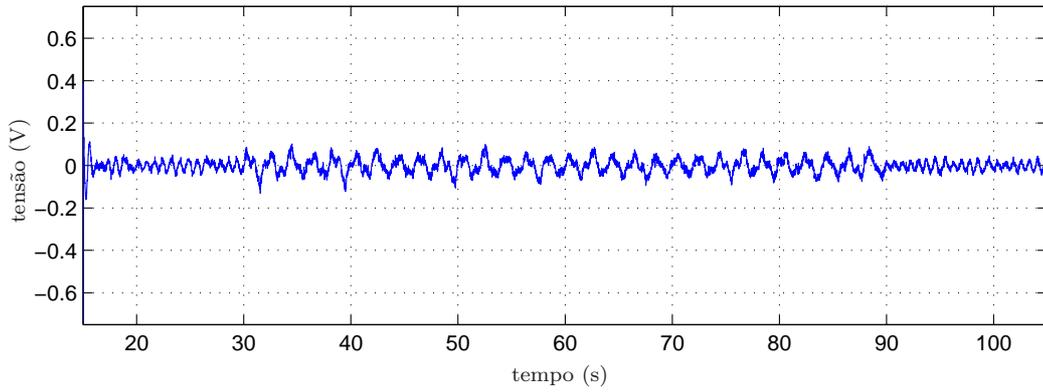


Figura 7.7: Erro de sincronismo no estado v_{c1} durante o primeiro experimento.

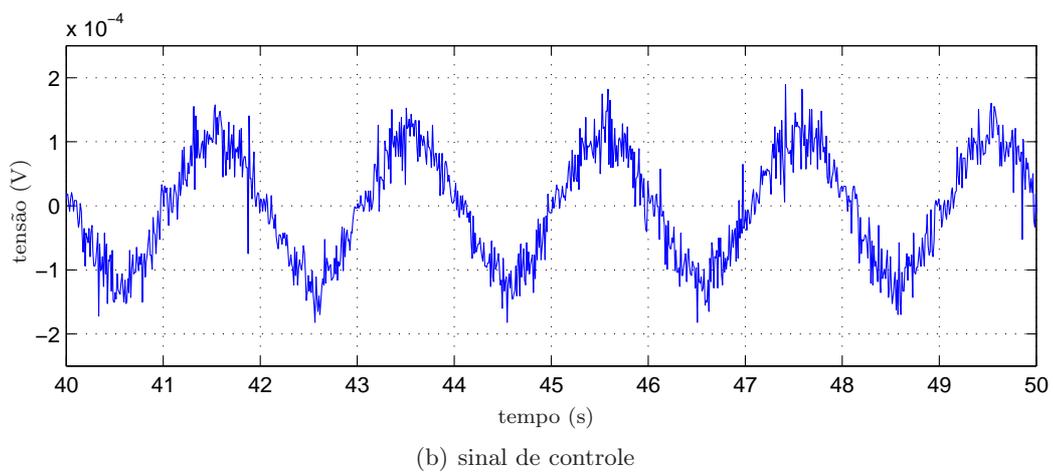
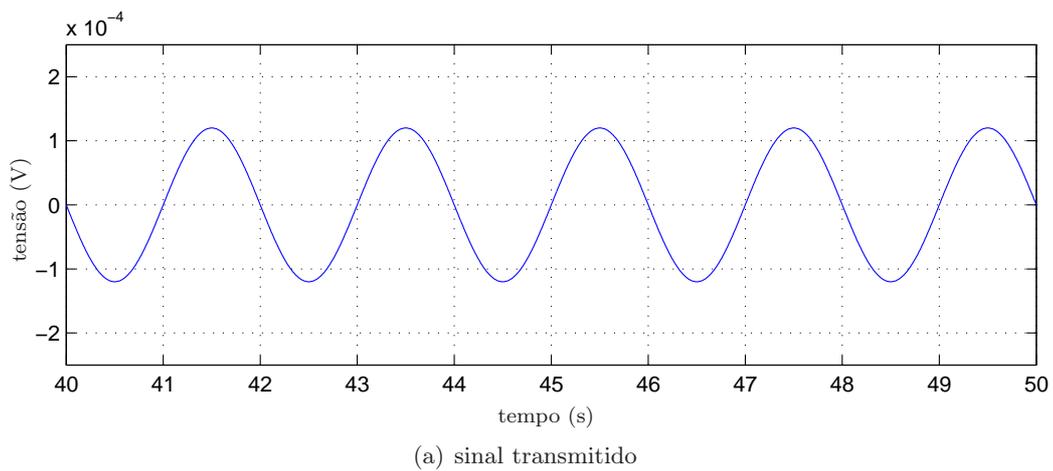


Figura 7.8: Primeiro experimento: sinais transmitido e recuperado.

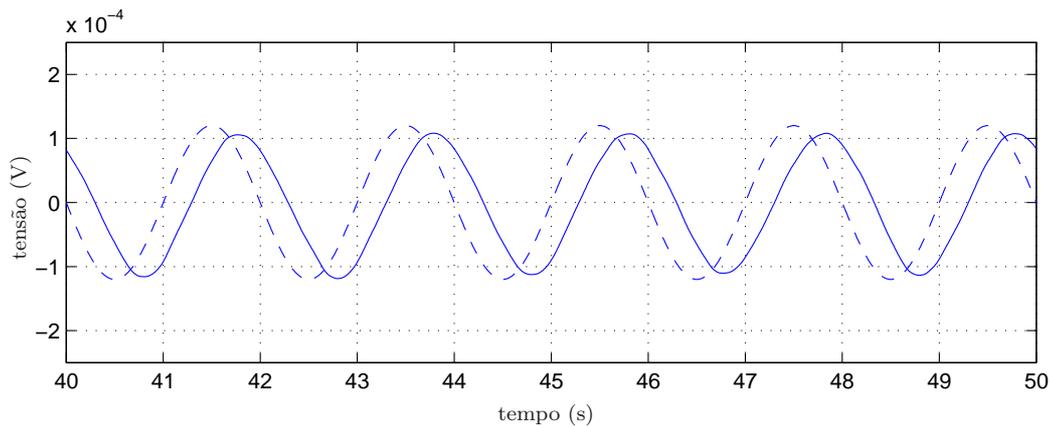


Figura 7.9: Primeiro experimento: sinal transmitido (pontilhado) e filtrado (cheio).

Destaca-se que a pequena defasagem, na Figura 7.9, entre os sinais original e recuperado se deve a resposta em atraso de fase do filtro passa-baixas.

7.4.3 Sinal de Baixa Frequência combinado com Sinais de Alta Frequência

Desta vez o sinal transmitido é uma combinação: onda quadrada de 0,5 Hz e 0,16 mV; senóide de 2 Hz e 0,08 mV; e uma onda dente-de-serra de 4 Hz e 0,04 mV. O erro de sincronização foi de $\pm 1,5\%$, mostrado na Figura 7.10. O filtro utilizado tem a mesma topologia do anterior, porém $f_c = 10$ Hz.

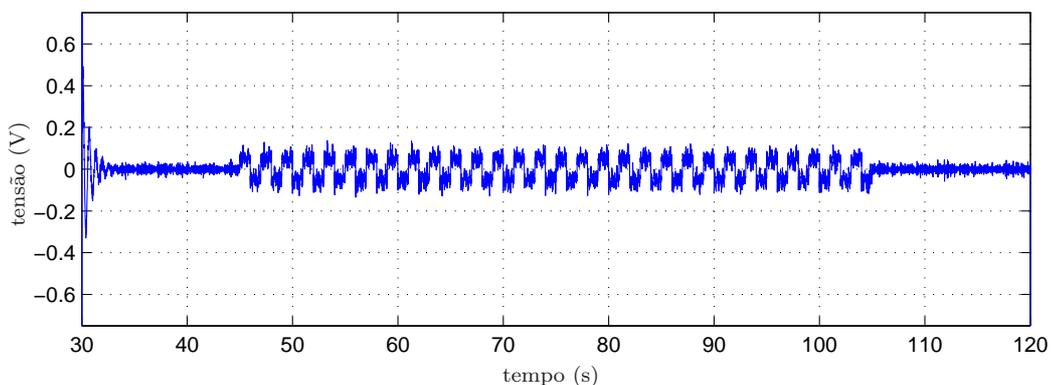
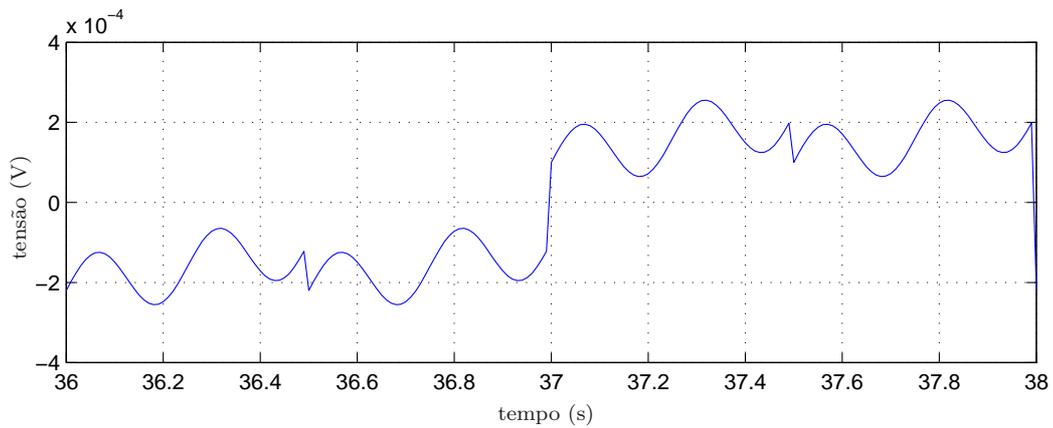


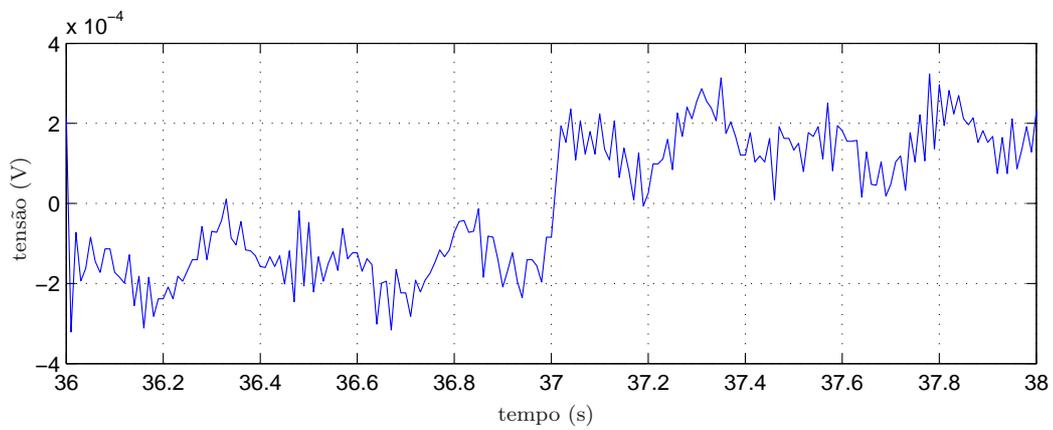
Figura 7.10: Erro de sincronismo no estado v_{c1} durante o segundo experimento.

7.4.4 Sinais com Frequências e com Amplitudes Próximas

O último resultado mostra a transmissão da combinação de 3 sinais com amplitudes e frequências próximas. Um sinal senoidal (1,2 Hz/0,08 mV), dente-de-serra (1,3 Hz/0,12 mV) e onda quadrada (2,1 Hz/0,08 mV). O erro de sincronização encontra-se na Figura 7.13, limitado aproximadamente em 4%.



(a) sinal transmitido



(b) sinal de controle

Figura 7.11: Segundo experimento: sinais transmitido e recuperado.

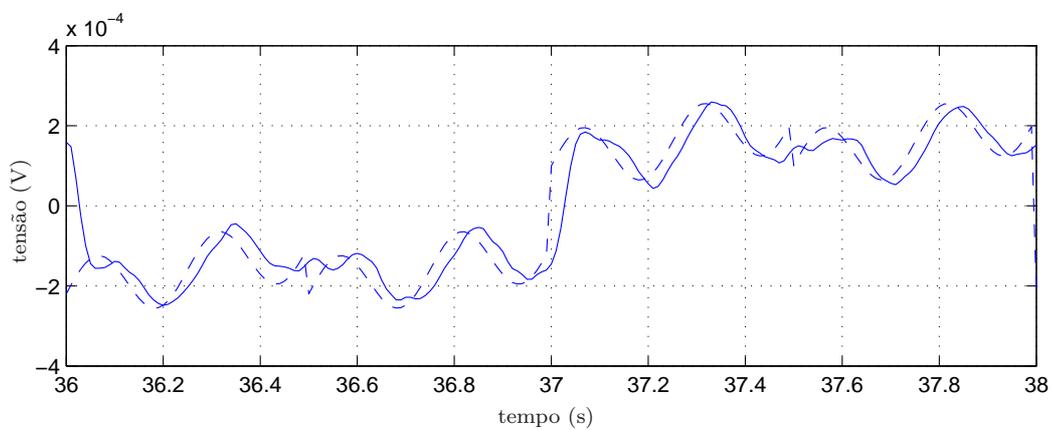


Figura 7.12: Segundo experimento: sinal transmitido (pontilhado) e filtrado (cheio).

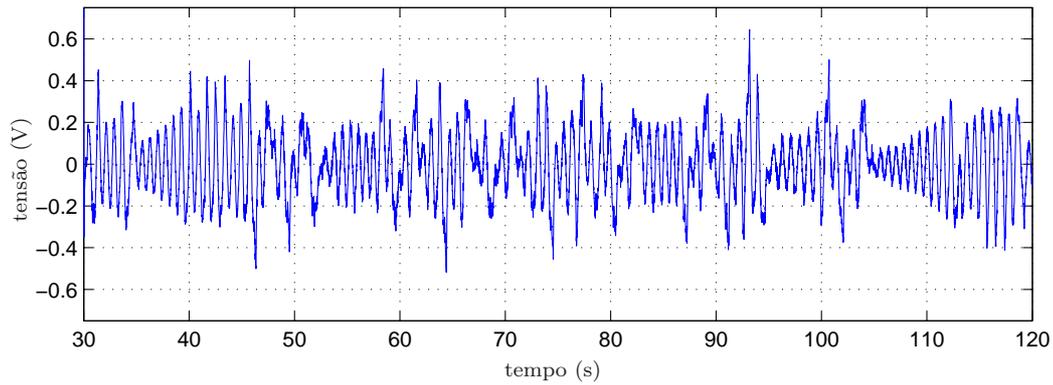
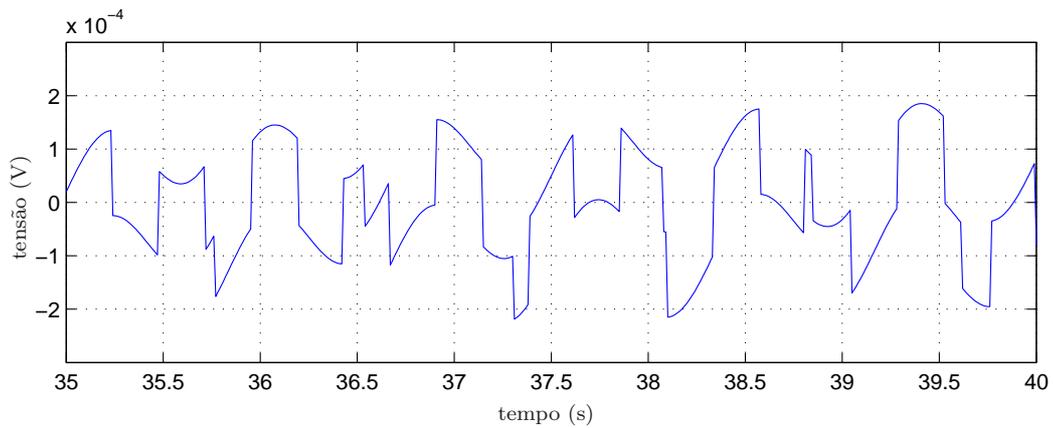


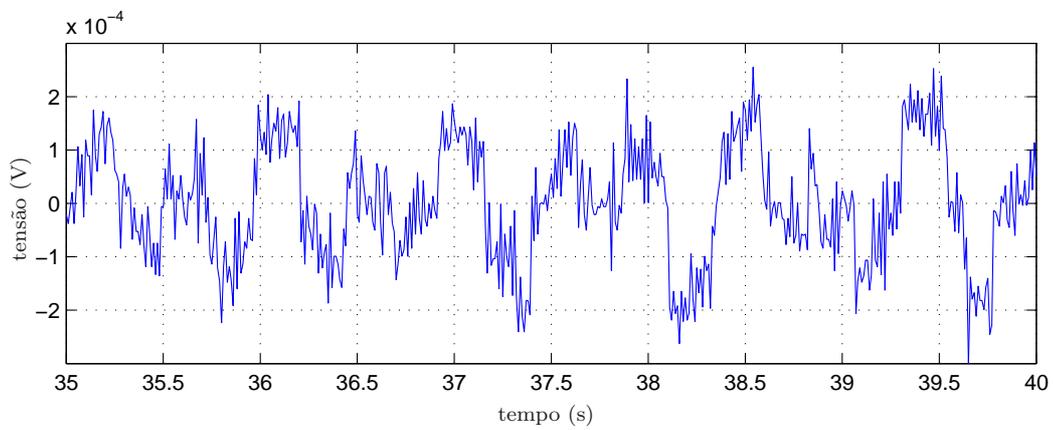
Figura 7.13: Erro de sincronismo no estado v_{c1} durante o terceiro experimento.

O oscilador escravo tem a mesma dinâmica do mestre e uma vez que se obtém sincronização, em ambiente livre de distúrbios, permanecerão assim indefinidamente. Contudo a informação inserida no mestre não faz parte da dinâmica natural de ambos sistemas. Logo o controlador tem um trabalho extra, proporcional à complexidade do sinal transmitido, para fazer com que o sistema escravo siga uma dinâmica “artificial”. Embora o erro tenha sido cerca de 4 vezes maior do que nos outros experimentos, o sinal transmitido tem um padrão bem mais complexo, conforme revela a comparação das Figuras 7.9, 7.12 e 7.15.

Mesmo assim, o controlador consegue recuperar a informação de forma eficiente, preservando as características de amplitude e variação do sinal original. Portanto, a qualidade do resultado da ação de controle não pode ser medida apenas pelo erro de sincronismo, mas sim pela qualidade da transmissão de informação obtida.



(a) sinal transmitido



(b) sinal de controle

Figura 7.14: Terceiro experimento: sinais transmitido e recuperado.

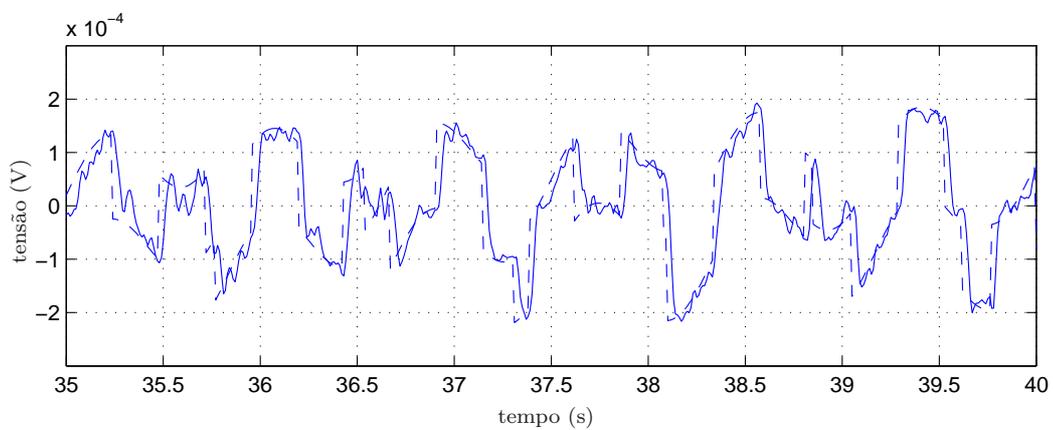


Figura 7.15: Terceiro experimento: sinal transmitido (pontilhado) e filtrado (cheio).

Capítulo 8

Considerações Finais

When the only tool you have is a hammer, everything begins to look like a nail.

LOTFI ASKER ZADEH¹

Embora o início do desenvolvimento dos sistemas fuzzy tenha sido marcado pela controvérsia e também, porque não dizer, pela grande resistência da comunidade científica, veja um interessante panorama histórico com depoimentos em (Zadeh, 2008), no cenário atual são uma realidade para diversos campos do conhecimento.

Em engenharia de controle, não raro o caráter não-linear, incerto ou variante no tempo de um sistema deve ser levado em consideração, sobretudo à medida que critérios de desempenho mais restritivos são exigidos.

Nesse panorama, as ferramentas tradicionais são preteridas e o controle fuzzy se apresenta como uma alternativa viável. Controle fuzzy abarca uma vasta quantidade de metodologias, mas o controle baseado em modelos é dominante, atualmente, tanto do ponto de vista de pesquisa quanto de aplicação (Feng, 2006).

Como visto nos Capítulos 2 a 4, estratégias de controle fuzzy baseadas em modelos TS são bastante atrativas. Se por um lado tais modelos têm capacidade de aproximação universal, por outro o projeto de controladores é bastante sistemático, principalmente quando combinado à capacidade de análise e síntese proporcionada por LMIs. Uma vez que se tem em mãos um modelo TS que represente a dinâmica de interesse, é possível garantir que o sistema controlado é estável, no sentido de Lyapunov, e possui um desempenho em malha fechada garantido.

Contudo, embora trabalhos pioneiros como o de Wang et al. (1996) tenham dado um passo decisivo para consolidar a sistematização no projeto de controle, eles não são uma resposta definitiva. Nem sempre é possível garantir a factibilidade da metodologia de projeto para certos sistemas TS ou mesmo algumas restrições de desempenho.

Nesse sentido, a presente dissertação se reúne aos esforços de diversas pesquisas (Choi e Park, 2003; Wang e Feng, 2004; Gao et al., 2005; Feng et al., 2005; Zhou et al., 2005;

¹Quando a única ferramenta que se tem é um martelo, tudo começa a se parecer com um prego.

(Nguang e Shi, 2006; Wu e Zhang, 2007; Zhou et al., 2007) na busca por condições menos conservadoras para análise e projeto de controladores \mathcal{H}_∞ .

Por meio da combinação de técnicas de controle fuzzy e de controle robusto linear via LMIs, foi possível elaborar uma série de condições menos conservadoras tanto para análise quanto para síntese de controladores. A sequência de exemplos numéricos dos Capítulos 5 e 6 demonstra a melhoria obtida sobre outras abordagens da literatura. Em certos casos, as metodologias propostas nesta dissertação foram factíveis mesmo quando outras alternativas da literatura falharam. Em outros exemplos, a comparação mostra que as metodologias propostas foram capazes de obter um melhor desempenho da norma \mathcal{H}_∞ .

Outro aspecto de destaque desta dissertação, são os resultados práticos obtidos com o problema de sincronismo e de transmissão de informações com osciladores caóticos. Tal estudo tem grandes desdobramentos práticos, seja para sistemas de comunicação (Tse et al., 2005) ou, mais recentemente, para modelagem de sistemas dinâmicos (Tôrres, 2007). Apesar disso, o problema de sincronismo foi investigado, nesta dissertação, com o objetivo de ilustrar que as metodologias propostas podem, de fato, ser aplicadas na prática.

Em (Tôrres e Aguirre, 2004), o princípio ITVC estabelece que apenas com um sincronismo de alta qualidade (idêntico ou quase-idêntico) entre osciladores caóticos é possível recuperar informação. No Capítulo 7 testes de transmissão com diversos sinais de informação foram realizados sendo que o controlador projetado sempre foi capaz de recuperá-los, comprovando que a estratégia de controle é eficaz.

Resultados práticos para esse problema foram obtidos desde a década de 90 (Pecora e Carroll, 1990; Kocarev et al., 1992). Contudo, a novidade desta dissertação é obtê-los usando controle fuzzy, já que outros trabalhos relacionados limitam-se a resultados de simulação (Lian et al., 2001a,b).

Embora não tenha sido um objetivo desta pesquisa, nota-se que o controlador obtido pela metodologia proposta consegue melhor desempenho na recuperação de informação do que outras abordagens. O controlador com estrutura PI de Tôrres e Aguirre (2004) não é capaz de recuperar informação nos Exemplos 7.4.3 e 7.4.4, por exemplo.

Ademais, a grande vantagem da metodologia proposta é fato de ser sistemática e adequada para sistemas não-lineares. Em contrapartida, por exemplo, a sintonia de controladores PI para sistemas não-lineares é feita com escolhas “ad-hoc” e heurísticas particulares para um dado sistema.

Uma parcela da contribuição desta dissertação, Capítulos 5 e 7, encontra-se publicada em (Mozelli et al., 2006, 2007).

8.1 Propostas de Continuidade

Como trabalhos futuros, pretende-se abordar soluções para o uso da função de Lyapunov dependente de parâmetros no caso contínuo, de forma a estender os bons resultados obtidos com essa função na versão a tempo discreto.

Outras questões de desempenho podem ser tratadas de forma eficiente, como por exemplo

o problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e também sobre o comportamento da resposta transiente do controlador (tempo de acomodação, sobre-sinal), por meio da incorporação de regiões LMI.

Um tópico muito interessante, sobretudo do ponto de vista prático, é o tratamento de sistemas não-lineares com retardo no tempo, uma vez que atrasos surgem com bastante frequência em sistemas dinâmicos nos quais ocorre propagação/transporte de energia, massa ou informação, degradando desempenho ou mesmo acarretando em instabilidade.

Apêndice A

Lemas

Neste apêndice podem ser vistos lemas e propriedades que são adotadas ao longo da dissertação.

Lema 3 *Se $P \succ 0$, então*

$$A'_i P A_j + A'_j P A_i \preceq A'_i P A_i + A'_j P A_j. \quad (\text{A.1})$$

Demonstração 11 *Note que*

$$P \succ 0 \Rightarrow (A_i - A_j)' P (A_i - A_j) \succeq 0,$$

conduzindo a

$$\begin{aligned} A'_i P A_i - A'_i P A_j - A'_j P A_i + A'_j P A_j &\succeq 0 \\ A'_i P A_i + A'_j P A_j &\succeq A'_i P A_j + A'_j P A_i \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Lema 4 *Considere que $h_i[q_k]$ ($i \in \mathcal{R}$) satisfazem (2.14) e sejam R_{ij} ($i < j$, $i, j \in \mathcal{R}$) matrizes simétricas de dimensão apropriada. Defina:*

$$H := \begin{bmatrix} H_{11} & \frac{1}{2}(h_1[q_k] + h_2[q_k])R_{12} & \dots & \frac{1}{2}(h_1[q_k] + h_r[q_k])R_{1r} \\ \frac{1}{2}(h_1[q_k] + h_2[q_k])R_{12} & H_{22} & \dots & \frac{1}{2}(h_2[q_k] + h_r[q_k])R_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}(h_1[q_k] + h_r[q_k])R_{1r} & \frac{1}{2}(h_2[q_k] + h_r[q_k])R_{2r} & \dots & H_{rr} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

sendo

$$H_{ii} := - \sum_{\substack{j=1 \\ j>1}}^r h_j[q_k] R_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^r h_j[q_k] R_{ji}. \quad (\text{A.3})$$

Desta forma, obtém-se que

$$\alpha[q_k] H \alpha'[q_k] = 0 \quad (\text{A.4})$$

sendo que

$$\alpha[q_k] := \begin{bmatrix} h_1[q_k] & h_2[q_k] & \dots & h_r[q_k] \end{bmatrix}.$$

Demonstração 12 A demonstração do Lema 4 pode ser encontrada em (Teixeira et al., 2003, Apêndice A). □

Apêndice B

Complemento de Schur

Considere uma matriz M formada por quatro blocos

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

sendo D quadrada e não-singular. O complemento de Schur de D em M , denotado por (M/D) é definido por (Palhares e Gonçalves, 2007):

$$(M/D) := A - BD^{-1}C.$$

Considere uma matriz simétrica

$$M = M' = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{bmatrix},$$

e os seguintes complementos de Schur

$$\begin{aligned} (M/M_1) &= M_3 - M_2' M_1^{-1} M_2 \\ (M/M_3) &= M_1 - M_2' M_3^{-1} M_2 \end{aligned}$$

Neste caso, são válidas duas propriedades interessantes (Palhares e Gonçalves, 2007):

- $M \succ 0$ sse $M_1 \succ 0$ e $(M/M_1) \succ 0$
- Se $M_1 \succ 0$, então $M = M' \succ 0$ sse $(M/M_1) \succ 0$

que valem também para M_3 e (M/M_3) .

Apêndice C

Produção Bibliográfica

Parte dos resultados obtidos nesta dissertação, bem como trabalhos relacionados desenvolvido no período do mestrado, foram publicados em 1 congresso e 2 periódicos. A lista da produção bibliográfica pessoal encontra-se a seguir:

Periódicos

- Mozelli, L. A.; Campos, C. D.; Palhares, R. M.; Tôrres, L. A. B. e Mendes, E. M. A. M. (2007). Chaotic Synchronization and Information Transmission Experiments: A Fuzzy Relaxed \mathcal{H}_∞ Control Approach, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 26(4):427-449
- Campos, C. D.; Palhares, R. M.; Mendes, E. M. A. M.; Tôrres, L. A. B. e Mozelli, L. A. (2007) Experimental results on Chua's circuit robust synchronization via LMIs, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 17(9):3199-3209

Congresso

- Mozelli, L. A.; Campos, C. D.; Palhares, R. M.; Tôrres, L. A. B. e Mendes, E. M. A. M. (2006) Sincronismo de Osciladores Caóticos e Experimentos em Transmissão de Informação: Uma Abordagem \mathcal{H}_∞ via Modelagem Nebulosa Takagi-Sugeno, In *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, pp.310-315, Salvador, BA
- Campos, C. D.; Palhares, R. M.; Mendes, E. M. A. M.; Tôrres, L. A. B. e Mozelli, L. A. (2006) Uma Abordagem para a Sincronização de Sistemas Caóticos Baseada em Técnicas de Controle Robusto \mathcal{H}_∞ a Tempo Discreto, In *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, pp.2016-2021, Salvador, BA

Referências Bibliográficas

- Aguirre, L. A. (2004). *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. UFMG, 2a edição.
- Aguirre, L. A.; Teixeira, B. O. S. e Tôrres, L. A. B. (2005). Using data-driven discrete-time models and the unscented Kalman filter to estimate unobserved variables of nonlinear systems. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*, 72(2):026226.
- Anstett, F.; Millerioux, G. e Bloch, G. (2006). Chaotic cryptosystems: cryptanalysis and identifiability. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 53(12):2673–2680.
- Aoul, Y. H.; Nafaa, A.; Negru, D. e Mehaoua, A. (2004). Fast adaptative fuzzy AQM controller for TCP/IP networks. In *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference*, pp. 1319–1323, Dallas, TX, USA.
- Assawinchaichote, W. e Nguang, S. K. (2006). Fuzzy \mathcal{H}_∞ output feedback control design for singularly perturbed systems with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(3):361–371.
- Bhende, C. N.; Mishra, S. e Jain, S. K. (2006). TS-fuzzy-controlled active power filter for load compensation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 21(3):1459–1465.
- Bonissone, P. P.; Badami, V.; Chiang, K. H.; Khedkar, P. S.; Marcelle, K. W. e Schutten, M. J. (1995). Industrial applications of fuzzy logic at General Eletric. *Proceedings of the IEEE*, 38(3):450–465.
- Borne, P. e Dieulot, J. (2005). Fuzzy systems and controllers: Lyapunov tools for a regionwise approach. *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.*, 63(5-7):653–665.
- Boyd, S.; El Ghaoui, L.; Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). Linear matrix inequalities in systems and control theory. In *SIAM Studies in Applied Mathematics*, volume 15. SIAM.
- Boyd, S. e Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
- Campos, C. D.; Palhares, R. M.; Mendes, E. M. A. M.; Torres, L. A. B. e Mozelli, L. A. (2006). Uma abordagem para a sincronização de sistemas caóticos baseada em técnicas de controle robusto \mathcal{H}_∞ a tempo discreto. In *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, pp. 2016–2021, Salvador, Brasil.

- (2007). Experimental results on chua's circuit robust synchronization via LMIs. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 17(9):3199–3209.
- Cao, S. G.; Rees, N. W. e Feng, G. (1997). Analysis and design for a class of complex control systems part II: Fuzzy controller design. *Automatica*, 33(6):1029–1039.
- Cao, Y.-Y. e Frank, P. (2000). Robust \mathcal{H}_∞ disturbance attenuation for a class of uncertain discrete-time fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(4):406–415.
- Casillas, J.; Cordon, O.; del M.J. Jesus e Herrera, F. (2005). Genetic tuning of fuzzy rule deep structures preserving interpretability and its interaction with fuzzy rule set reduction. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(1):13–29.
- Chen, B.-S.; Tseng, C.-S. e Uang, H.-J. (2000). Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: an LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(3):249–265.
- Choi, D. J. e Park, P. (2003). \mathcal{H}_∞ state-feedback controller design for discrete-time fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(2):271–278.
- Chua, L. O.; Komuro, M. e Matsumoto, T. (1986). The double scroll family. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 33(11):1072–1118.
- Daafouz, J. e Bernussou, J. (2001). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43:355–359.
- de Oliveira, M. C. (2004). Novos testes de estabilidade para sistemas lineares. *Controle & Automação*, 15(1):17–23.
- de Oliveira, M. C.; Bernussou, J. e Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265.
- de Oliveira, M. C. e Skelton, R. E. (2002). On stability tests for linear systems. In *Proceedings of the 15th IFAC World Congress*, pp. 3021–3026, Barcelona, Espanha. IFAC.
- Delmotte, F.; Guerra, T. M. e Ksantini, M. (2007). Continuous Takagi-Sugeno's models: reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(3):426–438.
- Ding, B.; Sun, H. e Yang, P. (2006). Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 42(3):503–508.
- Dorf, R. C. e Bishop, R. H. (1998). *Modern Control Systems*. Addison Wesley, 8a edição.
- Du, H. e Zhang, N. (2008). Application of evolving Takagi-Sugeno fuzzy model to nonlinear system identification. *Applied Soft Computing*, 8(1):676–686.

- Fang, C.-H.; Liu, Y.-S.; Kau, S.-W.; Hong, L. e Lee, C.-H. (2006). A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(3):386–397.
- Feng, G. (2003). Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(5):605–612.
- (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(5):676–697.
- Feng, G.; Chen, C.-L.; Sun, D. e Zhu, Y. (2005). \mathcal{H}_∞ controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions and bilinear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(1):94–103.
- Fujisaka, H. e Yamada, T. (1983). Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, 69:32–47.
- Gahinet, P.; Apkarian, P. e Chilali, M. (1996). Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442.
- Gahinet, P.; Nemirovski, A.; Laub, A. J. e Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox: for use with Matlab*. The Math Works, Inc., 1 edição.
- Gao, H.; Wang, Z. e Wang, C. (2005). Improved \mathcal{H}_∞ control of discrete-time fuzzy systems: a cone complementarity linearization approach. *Information Sciences*, 175:57–77.
- Gonçalves, E.; Palhares, R. M. e Takahashi, R. (2006a). $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filter design for systems with polytope-bounded uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(9):3620–3626.
- Gonçalves, E. N.; Palhares, R. M.; Takahashi, R. H. C. e Mesquita, R. C. (2006b). New approach to robust \mathcal{D} -stability analysis of linear time-invariant systems with polytope-bounded uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10):1709–1714.
- Guerra, T. M. e Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno’s form. *Automatica*, 40(5):823–829.
- Haddad, W. M. e Chellaboina, V.-S. (1997). Robust nonlinear-nonquadratic feedback control via parameter-dependent Lyapunov functions. *Nonlinear Analysis TMA*, 30(6):3725–3736.
- Hadjili, M. e Wertz, V. (2000). Takagi-Sugeno fuzzy modeling incorporating input variables selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(6):728–742.
- Hagras, H. K. (2004). A hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(4):524–539.

- Han, Z. e Feng, G. (1999). State feedback \mathcal{H}_∞ controller design of fuzzy dynamic systems using LMI techniques. In *Proceedings of 1998 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 1, pp. 538–544, Anchorage, USA.
- Hong, S.-K. e Langari, R. (2000). An LMI-based \mathcal{H}_∞ fuzzy control system design with TS framework. *Information Sciences*, 123(3-4):163–179.
- Horiuchi, J. I. e Kishimoto, M. (2002). Application of fuzzy control to industrial bioprocess in Japan. *Fuzzy Sets and Systems*, 128(1):117–124.
- Jang, J.-S. R.; Sun, C.-T. e Mizutani, E. (1997). *Neuro-fuzzy and soft computing : a computational approach to learning and machine intelligence*. Prentice Hall.
- Johansen, T. A.; Shorten, R. e Murray-Smith, R. (2000). On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(3):297–313.
- Johansson, M. e Rantzer, A. (1998). Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):555–559.
- Johansson, M.; Rantzer, A. e Årzén, K.-E. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6):713–722.
- Jury, E. I. (1996). Remembering four stability theory pioneers of the nineteenth century. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9):1242–1244.
- Kawamoto, S.; Tada, K.; Ishigame, A. e Taniguchi, T. (1992). An approach to stability analysis of second order fuzzy systems. In *Proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, San Diego, CA.
- Khiar, D.; Lauber, J.; Floquet, T.; Colin, G.; Guerra, T. M. e Chamailard, Y. (2007). Robust Takagi-Sugeno fuzzy controle of a spark ignition engine. *Control Engineering Practice*, 15:1446–1456.
- Kim, E. e Lee, H. (2000). New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(5):523–534.
- Kocarev, L.; Halle, K.; Eckert, K. e Chua, L. O. (1992). Experimental demonstration of secure communication via chaotic synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 2(3):709–713.
- Kolumbán, G.; Kennedy, M. P. e Chua, L. O. (1997). The role of synchronization in digital communications using chaos – part I: Fundamentals of digital communications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—Part I: Fundamental Theory and Applications*, 44(10):927–936.
- Kruszewski, A.; Guerra, T. e Labiod, S. (2007). Stabilization of Takagi-Sugeno discrete models: towards an unification of the results. In *Proceedings of International Fuzzy Systems Conference 2007*, pp. 1–6, London, UK.

- Löfberg, J. (2004). YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan.
- Lian, K.-Y.; Chiu, C.-S.; Chiang, T.-S. e Liu, P. (2001a). LMI-based fuzzy chaotic synchronization and communications. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(4):539–553.
- (2001b). Secure communications of chaotic systems with robust performance via fuzzy observer-based design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(1):212–220.
- Lian, K.-Y.; Tu, H.-W. e Liou, J.-J. (2006). Stability conditions for LMI-based fuzzy control from the viewpoint of membership functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(6):874–884.
- Liao, T.-L. e Huang, N.-S. (1999). An observer-based approach for chaotic synchronization with applications to secure communications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—Part I: Fundamental Theory and Applications*, 46(9):1144–1150.
- Lin, W. e Byrnes, C. I. (1996). \mathcal{H}_∞ -control of discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(4):494–510.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Science*, 20:130–141.
- Lyapunov, A. M. (1992). *The general problem of stability of motion*. Taylor & Francis. tradução A. T. Fuller.
- Machado, E. R. M. D. (2003). *Modelagem e Controle de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista.
- Mamdani, E. H. (1974). Application of fuzzy algorithms for simple dynamic plant. *Proceedings of Institute of Electrical Engineering*, 121:1585–1588.
- Mamdani, E. H. e Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Human-Computer Studies*, 7:1–13.
- Matsumoto, T. (1984). A chaotic attractor from Chua’s circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 31(12):1055–1058.
- Mendes, E. M. A. M. e Billings, S. A. (2002). A note on discretization of nonlinear differential equations. *Chaos*, 12(1):66–71.
- Millerioux, G. e Daafouz, J. (2001). Global chaos synchronization and robust filtering in noisy context. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—Part I: Fundamental Theory and Applications*, 48(10):1170–1176.
- Montagner, V. F.; Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2007). Necessary and sufficient LMI conditions to compute quadratically stabilizing state feedback controllers for Takagi-Sugeno systems. In *Proceedings of ACC*, pp. 4059–4064, New York, USA.

- Morgül, O. e Solak, E. (1996). Observer based synchronization of chaotic systems. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*, 54(5):4803–4811.
- Mozelli, L. A.; Campos, C. D.; Palhares, R. M.; Tôrres, L. A. B. e Mendes, E. M. A. M. (2006). Sincronismo de osciladores caóticos e experimentos em transmissão de informação: uma abordagem \mathcal{H}_∞ via modelagem nebulosa Takagi-Sugeno. In *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, pp. 310–315, Salvador, Brasil.
- (2007). Chaotic synchronization and information transmission experiments: a fuzzy relaxed \mathcal{H}_∞ control approach. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 26(4):427–449.
- Nguang, S. K. e Shi, P. (2006). Robust \mathcal{H}_∞ output feedback control design for fuzzy dynamic systems with quadratic \mathcal{D} stability constraints: an LMI approach. *Information Sciences*, 176(15):2161–2191.
- Nguyen, H. T.; Prasad, N. R.; Walker, C. L. e Walker, E. A. (2003). *A first course in fuzzy and neural control*. CRC Press.
- Nounou, M. N. e Nounou, H. N. (2005). Multiscale fuzzy system identification. *Journal of Process Control*, 15:763–770.
- Palhares, R.; Oliveira, S. L. C. e Peres, P. (1998). Relating two different approaches of \mathcal{H}_∞ state feedback control. *Controle & Automação*, 9(2):77–84.
- Palhares, R. e Peres, P. (2001). LMI approach to the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering design for discrete-time uncertain systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 37(1):292–296.
- Palhares, R. M.; Campos, C. D.; Ekel, P. Y.; Leles, M. C. R. e D’Angelo, M. F. S. V. (2005). Delay-dependent robust \mathcal{H}_∞ control of uncertain linear systems with time-varying delays. *Computers & Mathematics with Applications*, 50(1-2):13–32.
- Palhares, R. M.; de Souza, C. E. e Peres, P. L. D. (2001). Robust \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(8):1696–1703.
- Palhares, R. M. e Gonçalves, E. N. (2007). Desigualdades matriciais lineares em controle. In Aguirre, L. A., editor, *Enciclopédia de Automática: Controle & Automação*, volume 1, pp. 155–195. Blucher.
- Pecora, L. M. e Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8):821–824.
- Pedrycz, W. e Gomide, F. (1998). *An introduction to fuzzy sets: analysis and design*. MIT Press.

- Saez, D. e Zufiiga, R. (2005). Takagi-Sugeno fuzzy model structure selection based on new sensitivity analysis. In *Proceedings of The 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 501–506. IEEE.
- Sala, A. e Arino, C. (2007). Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: applications of Polya’s theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(24):2671–2686.
- Scherer, C. e Weiland, S. (2005). Linear matrix inequalities in control.
- Sedra, A. S. e Smith, K. C. (1998). *Microelectronic Circuits*. Makron Books, 4a edição.
- Seker, H.; Odetayo, M. O.; Petrovic, D. e Naguib, R. N. G. (2003). A fuzzy logic based-method for prognostic decision making in breast and prostate cancers. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 7(2):114–122.
- Slotine, J.-J. E. e Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- Strum, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1-4):625–653.
- Sugeno, M. e Kang, G. T. (1986). Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, 28:329–346.
- Takagi, T. e Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1):116–132.
- Tanaka, K.; Hori, T. e Wang, H. O. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(4):582–589.
- Tanaka, K.; Ikeda, T. e Wang, H. O. (1998a). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2):250–265.
- (1998b). A unified approach to controlling chaos via an LMI-based fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—Part I: Fundamental Theory and Applications*, 45(10):1021–1040.
- Tanaka, K.; Nishimura, M. e Wang, H. O. (1998c). Multi-objective fuzzy control of high rise/high speed elevators using LMIs. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, volume 6, pp. 3450–3454, Philadelphia, PA. IEEE.
- Tanaka, K.; Ohtake, H. e Wang, H. O. (2007). A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(3):333–341.

- Tanaka, K. e Sano, M. (1993). Fuzzy stability criterion of a class of nonlinear systems. *Information Sciences*, 71(1-2):3–26.
- Tanaka, K. e Sugeno, M. (1990). Stability analysis of fuzzy systems using Lyapunov's direct method. In *Proceedings of the North American Fuzzy Information Processing Society - NAFIPS*, pp. 133–136, New York, USA.
- (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 45(2):135–156.
- Tanaka, K. e Wang, H. O. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons.
- Taniguchi, T.; Tanaka, K.; Ohtake, H. e Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(4):525–537.
- Tanscheit, R.; Gomide, F. e Teixeira, M. C. M. (2007). Modelagem e controle nebuloso. In Aguirre, L. A., editor, *Enciclopédia de Automática: Controle & Automação*, volume 3, pp. 283–324. Blucher.
- Teixeira, M. C. M. e Assunção, E. (2007). Extensões para sistemas não-lineares. In Aguirre, L. A., editor, *Enciclopédia de Automática: Controle & Automação*, volume 1, pp. 218–246. Blucher.
- Teixeira, M. C. M.; Assunção, E. e Avellar, R. G. (2003). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(5):613–623.
- Teixeira, M. C. M.; Pietrobon, H. C. e Assunção, E. (2000). Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI. *Controle & Automação*, 11(1):37–48.
- Teodorescu, H. C.; Jain, L. C. e Kandel, A. (1998). *Fuzzy and Neuro-Fuzzy Systems in Medicine*. CRC.
- Tôrres, L. A. B. (2007). Discrete-time dynamic systems synchronization: information transmission and model matching. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 228:31–39.
- Tôrres, L. A. B. e Aguirre, L. A. (2004). Transmitting information by controlling nonlinear oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 196(3-4):387–406.
- (2005). PCCHUA - a laboratory setup for real-time control and synchronization of chaotic oscillations. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 15(8):2349–2360.
- Tse, C. K.; Kolumbán, G. e Lau, F. C. M. (2005). Guest editorial - Special issue on applications of chaos in communications. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 24(5):445–449.

- Tsoukalas, L. H. e Uhrig, R. E. (1997). *Fuzzy and Neural approaches in engineering*. John Wiley & Sons.
- VanWiggeren, G. D. e Roy, R. (1998). Communication with chaotic lasers. *Science*, 279:1198–1200.
- Wang, H. O. e Tanaka, K. (1996). An LMI-based stable fuzzy control of nonlinear systems and its application to control of chaos. In *Proceedings of 5th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 2, pp. 1433–1438, New Orleans, LA, USA.
- Wang, H. O.; Tanaka, K. e Griffin, M. F. (1995). Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. In *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 2, pp. 531–538, Yokohama, Japão.
- (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):14–23.
- Wang, L. e Feng, G. (2004). Piecewise \mathcal{H}_∞ controller design of discrete time fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, 34(1):682–686.
- Wu, H.-N. (2004). Reliable LQ fuzzy control for nonlinear discrete-time systems via LMIs. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, 34(2):1270–1275.
- (2007). Robust \mathcal{H}_2 fuzzy output feedback control for discrete-time nonlinear systems with parametric uncertainties. *International Journal of Approximate Reasoning*, 46(1):151–165.
- Wu, H.-N. e Cai, K.-Y. (2004). \mathcal{H}_2 guaranteed cost fuzzy control for uncertain nonlinear systems via linear matrix inequalities. *Fuzzy Sets and Systems*, 148(3):411–429.
- Wu, H.-N. e Zhang, H.-Y. (2007). Reliable \mathcal{H}_∞ fuzzy control for a class of discrete-time nonlinear systems using multiple fuzzy Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—Part II: Analog and Digital Signal Processing*, 54(4):357–361.
- Wu, S.-M.; Sun, C.-C.; Chung, H.-Y. e Chang, W.-J. (2006). Discrete $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ nonlinear controller design based on fuzzy region concept and Takagi-Sugeno fuzzy framework. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—Part I: Fundamental Theory and Applications*, 53(12):2838–2848.
- Ying, H. (2000). General SISO Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):91–107.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.
- (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I. *Information Sciences*, 8:199–249.

- (2008). Is there a need for fuzzy logic? *Information Sciences*, 178(13):2751–2779.
- Zeng, K.; Zhang, N.-Y. e Xu, W.-L. (2000). A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):773–780.
- Zhang, X. e Min, L. (2005). A generalized chaos synchronization based encryption algorithm for sound signal communication. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 24(5):535–548.
- Zhou, K.; Doyle, J. C. e Glover, K. (1995). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall.
- Zhou, S.; Feng, G.; Lam, J. e Xu, S. (2005). Robust \mathcal{H}_∞ control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions. *Information Sciences*, 174(3-4):197–217.
- Zhou, S.; Lam, J. e Zheng, W. X. (2007). Control design for fuzzy systems based on relaxed nonquadratic stability and \mathcal{H}_∞ performance conditions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(2):188–199.