#### UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Mestrado em Engenharia Elétrica: Modelagem Análise e Controle de Sistemas Não Lineares

Estratégias de Previsão Multipassos à Frente para Vazão Afluente em Bacias Hidrográficas de Diferentes Dinâmicas

Samira Domingos Costa

Belo Horizonte - MG

### Universidade Federal de Minas Gerais

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

# Estratégias de Previsão Multipassos à Frente para Vazão Afluente em Bacias Hidrográficas de Diferentes Dinâmicas

#### Samira Domingos Costa

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Ph.D. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes

## Dedicatória

A Deus, o criador da terra, sem Ele eu nada seria; Ao meu amor, companheiro, amigo e marido, Leonardo. Aos meus pais por me apoiar sempre.

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me guiar, dar forças e abençoar sempre. O senhor estendeu sua mão para mim e me deu a vitória.

Ao meu querido marido, Leonardo, obrigada pelo carinho e compreensão. Por ser essa pessoa maravilhosa, que incentivou e apoiou-me durante todo esse tempo.

À minha mãe Elza, por ser uma super mãe, meu porto seguro, exemplo de vida. Seu amor incondicional faz de mim uma pessoa melhor.

Ao meu pai João, pelo apaio e incentivo, sou o que sou hoje porque o senhor me educou. Obrigada por sempre acreditar em mim!

Às minhas queridas irmãs, Flávia e Carla, minhas melhores amigas e companheiras. Vocês são um presente em minha vida.

Às minhas sobrinhas, Ana Flávia e Alícia, por sempre alegrar os meus dias. A tia ama vocês!

Ao meu orientador e professor Eduardo Mendes, pela excelente orientação do trabalho, pela compreensão e paciência durante todo esse tempo. Obrigada por ter-me concedido esta oportunidade, depositando sua confiança em mim. Por sempre ouvir meus questionamentos e dúvidas quando batia em sua porta.

Aos amigos do MACSIN, Dimas, Cristina, Víctor e Wendy. Víctor e Dimas, obrigada pelas dicas, esclarecimentos e pelas valiosas contribuições em meu trabalho.

Ao amigo Tcharles, obrigada pela companhia e amizade durante os dois anos de mestrado.

À CEMIG e a Capes pelo apoio financeiro.

À todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

## Sumário

R	esum	O	vii
$\mathbf{A}$	bstra	act	ix
Li	sta d	le Figuras	x
Li	sta d	le Tabelas	xiii
Li	sta d	le Abreviações	xix
1	Intr	rodução	1
	1.1	O problema	1
	1.2	Objetivo	3
	1.3	Organização do Trabalho	4
2	Rev	visão Bibliográfica	5
	2.1	Séries Temporais	5
	2.2	Hidrologia	7
	2.3	Bacia Hidrográfica	7
	2.4	Modelagem Hidrológica	8
	2.5	Modelagem de Sistemas	11
3	Ide	ntificação de Sistemas	15
	3.1	Apresentação dos dados	15
	3.2	Escolha da representação Matemática	19
	3.3	Ordem do modelo	24
	3.4	Estimação de Parâmetros	26
	3.5	Tipos de Estratégias de Previsão	30
	3.6	Índices de Desempenho	39
4	Est	udo de Caso 1	43

vi SUMÁRIO

	4.1 Resultados e Discussões - UHE Rosal	43
5	Estudo de Caso 2  5.1 Resultados e Discussões - UHE Três Marias	<b>57</b> 57
6	Conclusões 6.1 Proposta para trabalhos futuros	<b>73</b> 74
A	Apêndice         A.1 Tabelas UHE Rosal	<b>75</b> 75
В	Apêndice         B.1 Tabelas UHE Três Marias	<b>85</b>
Bi	ibliografia	95

#### Resumo

A obtenção de uma boa predição de multipassos à frente, que caracteriza o fenômeno sob investigação, é um objetivo importante em diversas áreas da ciência que lidam com séries temporais. Para alcançar este objetivo, não só o algoritmo utilizado bem como a estratégia aplicada para a determinação da predição devem ser considerados. Por exemplo, na hidrologia, há a necessidade de se fornecer a vazão real de bacias hidrográficas como parte do chamado plano estratégico das concessionárias de energia. É neste contexto que este trabalho tem como um dos objetivos aplicar e estudar métodos de previsão de até 10 passos à frente para o problema real de determinação da vazão à frente em bacias hidrográficas da CEMIG. Para tanto, serão abordadas duas técnicas: a modelagem ARX (AutoRegressive with eXogenous inputs model), escolhida como modelo de comparação por ser um clássico da literatura especializada e amplamente utilizada, e o algoritmo de aprendizagem preguiçoso (Lazy Learning Algorithm), originado na área de Dinâmica Não-Linear. Para que a predição obtida pelos modelos ARX e modelos Lazy Learning seja otimizada, cinco estratégias de predição multipassos à frente, hoje disponíveis na literatura, são discutidas, a saber Direta, Recursiva, DirRec, MIMO e DIRMO. Os dados utilizados, precipitação e vazão, são medições reais e referem-se a duas bacias hidrográficas: uma de pequeno porte, Usina Hidrelétrica de Rosal e a outra de grande porte, Usina Hidrelétrica de Três Marias. Além da métrica usual de desempenho, MAPE, outras métricas típicas da área da hidrologia como MAE, MSE, RMSE, PBIAS, RSR e NSE serão utilizadas para quantificar os resultados. A estratégia de utilização de diferentes modelos com diferentes estruturas e representações para diferentes passos de previsão, dependendo do índice de desempenho utilizado, é mostrada ser eficaz quando aplicada a dados reais de um bacia hidrográfica.

Palavras-chave: Predição, Hidrologia, Multipassos, Séries Temporais

#### Abstract

One of the problems in the time series analysis is to obtain multi-step ahead predictions using models that can reproduced the phenomena under investigation with good accuracy. In order to achieve this goal, not only the algorithm used but also the strategy applied to the problem is of great importance. For example, in the context of hydrology, there is the necessity of producing real flow rate of river basins as part of the strategic plan of electric companies. This work sets as one of its goals to apply and to study prediction methods up to 10 steps ahead for the real problem of defining the flow of CEMIG river basins. To do so, two techniques will be used: AutoRegressive with eXogenous inputs modelling, chosen as a comparison model as it is a classic of specialized literature and is widely used, and the Lazy Learning Algorithm, a tool discussed by (Birattari e Bontempi, 1999; Taieb et al., 2012), and originated from the field of nonlinear dynamics. To optimize the predictions using the ARX models and the Lazy Learning models, five different multistep ahead prediction strategies are discussed: Direct, Recursive, DirRec, MIMO and DIRMO. The real measured data of precipitation and flow used for identification and validation purposes corresponds to two river basins: a small one, from Rosal Hydroelectric Power Station, and a large one, from Três Marias Hydroelectric Power Station. Besides the usual performance metric, MAPE, other typical hydrologic metrics, MAE, MSE, RMSE, PBIAS, RSR, and NSE, will be used to quantify results. The strategy of using different models for different prediction steps is shown to be efficient when applied to real data of a specific river basin, according to the chosen performance index.

**Keywords:** Prediction, Hydrology, Multi-Step, Time Series

# Lista de Figuras

3.1	Série temporal de precipitação P (dada em mm), UHE Rosal	16	
3.2	Série temporal de Vazão V (dada em m3/s), UHE Rosal	16	
3.3	Séries temporais de Vazão V (dada em m $3/s$ ), disponíveis da UHE Rosal	18	
3.4	Série temporal de precipitação P (dada em mm), UHE Três Marias	18	
3.5	Série temporal de Vazão V (dada em m3/s), UHE Três Marias	19	
3.6	Séries temporais de Vazão V (dada em m $3/s$ ), disponíveis da UHE Três Marias.	20	
3.7	Fluxograma com passos de execução do ARX $\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$	21	
3.8	Fluxograma com passos de execução do algoritmo de aprendizagem preguiçoso.	25	
3.9	Critério de informação de Bayes para UHE Rosal	26	
3.10	Critério de informação de Bayes para UHE Três Marias	26	
3.11	Diagrama da estratégia MIMO	34	
3.12	Diagrama da estratégia DIRMO, $H=10$ e $s=1$ , portanto $n=10$ (DIRMO=Dire	ta).	
		36	
3.13	Diagrama da estratégia DIRMO, $H=10$ e $s=2$ , portanto $n=5$ (configuração		
	$intermediária).  \dots $	37	
3.14	Diagrama da estratégia DIRMO, $H=10$ e $s=10$ , portanto $n=1$ (DIRMO=MIMO)	[O).	38
3.15	Relação entre as cinco estratégias de previsão	38	
4.1	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -		
	Estratégia Direta e Função Linear - 2 passos à frente	44	
4.2	Predição de Vazão Q (dada em m $3/s$ ), utilizando-se os dados de validação -		
	Estratégia Direta e Função Constante - 10 passos à frente	45	
4.3	Predição de Vazão Q (dada em m $3/s$ ), utilizando-se os dados de validação -		
	Estratégia Recursiva e Função Constante - 10 passos à frente	46	
4.4	Predição de Vazão Q (dada em m $3/s$ , utilizando-se os dados de validação) -		
	Estratégia DirRec e Função Constante - 10 passos à frente	47	

4.5	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia MIMO/DIRMO e Função Linear - 1 passo à frente	48
4.6	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia MIMO/DIRMO e Função Constante - 10 passos à frente	49
4.7	Estratégia DirRec versus Recursiva	51
4.8	Predição de Vazão Q (dada em m $3/\mathrm{s})$ - Modelo ARX - Estratégia Recursiva -	
	3 passos à frente	52
4.9	Predição de Vazão Q (dada em m $3/\mathrm{s})$ - Modelo ARX - Estratégia Recursiva -	
	10 passos à frente	52
4.10	Predição de Vazão Q (dada em m3/s) - Modelo ARX - Estratégia Dir Rec - 10 $$	
	passos à frente	53
4.11	Predição de Vazão Q (dada em m $3/\mathrm{s})$ - Modelo ARX - Estratégia Dir Rec - $1$	
	passo à frente	54
4.12	Predição de Vazão Q (dada em m $3/s$ ) - Modeo ARX - Estratégia Recursiva -	
	5 passos à frente	55
5.1	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia Direta e Função Linear - 2 passos à frente	58
5.2	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia Direta e Função Linear - 10 passos à frente	59
5.3	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
		60
5.4	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia Recursiva e Função Linear - 10 passos à frente	61
5.5	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia Recursiva e Função Constante - 10 passos à frente	61
5.6	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia DirRec e Função Clq - 10 passos à frente	62
5.7	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia DirRec e Função Constante - 10 passos à frente	63
5.8	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia MIMO/DIRMO e Função Clq- 2 passos à frente	64
5.9	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia MIMO/DIRMO e Função Clq - 10 passos à frente	64
5.10	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia MIMO/DIRMO e Função Linear - 10 passos à frente $\ \ldots \ \ldots \ \ldots$	65
5.11	Predição de Vazão Q (dada em m $3/s$ ), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia MIMO/DIRMO e Função Linear- 2 passos à frente	66
5.12	Estratégia DirRec versus MIMO,DIRMO e Direta	67

5.13	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia DirRec - 2 passos à frente	68
5.14	Predição de Vazão Q (dada em m $3/s$ ), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia DirRec - 10 passos à frente	68
5.15	Predição de Vazão Q (dada em m $3/s$ ), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia Direta MIMO e DIRMO - 10 passos à frente	69
5.16	Predição de Vazão Q (dada em m $3/s$ ), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia DirRec - Função Constante - 2 passos à frente	70
5.17	Predição de Vazão Q (dada em m $3/s$ ), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia DirRec - Função Clq - 4 passos à frente	70
5.18	Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação -	
	Estratégia Direta - Função Linear - 8 passos à frente	71

## Lista de Tabelas

2.1	Alguns modelos utilizados no gerenciamento dos recursos hídricos	10
3.1	Características estatísticas das séries temporais da UHE Rosal	17
3.2	Características estátísticas das séries temporais da UHE Três Marias	19
3.3	Tabela comparativa, mostra os aspectos positivos e negativos das 5 estratégias, onde a quantidade do sinal + representa o tempo computacional gasto para	
	cada estratégica. Tabela adaptada de Taieb et al. (2012)	39
4.1	Resultados parciais da estratégia Direta (em passos), utilizando-se dados de validação	45
4.2	Resultados parciais da estratégia Recursiva (em passos), utilizando-se dados	10
1.2	de validação.	47
4.3	Resultados parciais da estratégia DirRec (em passos), utilizando-se dados de	
	validação	48
4.4	Resultados parciais das estratégias MIMO e DIRMO (em passos), utilizando-se	
	dados de validação	49
4.5	Análise do Índice MAPE com relação a todas estratégias (em passos), utilizando-	
	se dados de validação.	50
4.6	Análise do Índice MAE com relação a todas estratégias (em passos) utilizando-	
	se dados de validação.	50
4.7	Análise do Índice MAPE com relação a todas estratégias (em passos) utilizando-	
	se dados de validação	54
4.8	Análise do Índice MAE com relação a todas estratégias (em passos) utilizando-	
	se dados de validação.	54
5.1	Resultados parciais da estratégia Direta (em passos)	59
5.2	Resultados parciais da estratégia Recursiva (em passos)	60
5.3	Resultados parciais da estratégia DirRec (em passos)	62
5.4	Resultados parciais das estratégias MIMO e DIRMO (em passos)	65

5.5	Análise do Índice MAPE com relação a todas estratégias (em passos) 6	5
5.6	Análise do Índice MAE com relação a todas estratégias (em passos) 6	6
5.7	Análise do Índice MAPE com relação a todas estratégias (em passos) utilizandose dados de validação	'1
5.8	Análise do Índice MAE com relação a todas estratégias (em passos) utilizandose dados de validação	'1
A.1	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	'5
A.2	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	<b>'</b> 6
A.3	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	<b>'</b> 6
A.4	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	'6
A.5	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	7
A.6	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual	,,,
A.7	a 200)	7
	igual a 200)	7
A.8	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a	70
<b>A</b> O		8
A.9	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	<b>'</b> Q
Δ 10	200)	0
A.10	Rec, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual	
	a 200)	8

A.11	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Dir-Rec, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	79
A.12	200)	79
A.13	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Dir-Rec, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	79
A.14	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	80
A.15	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a $70$ e máximo igual a $200$ ) .	80
A.16	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	80
A.17	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Constante-linear-quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	81
A.18	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	81
A.19	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a $70$ e máximo igual a $200$ ) .	81
A.20	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	82
A.21	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Constante-linear-quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)	82
A.22	Modelo ARX - Estratégia Direta	83
A.23	Modelo ARX - Estratégia Recursiva	83
A.24	Modelo ARX - Estratégia DirRec	83
A.25	Modelo ARX - Estratégia MIMO	84
A.26	Modelo ARX - Estratégia DIRMO	84
	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo	
	igual a 300)	85

B.2	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)	86
B.3	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)	86
B.4	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)	86
B.5	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)	87
B.6	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)	87
B.7	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo	87
B.8	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a	88
B.9	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Dir-Rec, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo	88
B.10	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Dir-Rec, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)	88
B.11	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Dir-Rec, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo	89
B.12	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Dir-Rec, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)	89
B.13	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a	89
B.14	Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)	

B.15 Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO,	
Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a	
300)	90
$\rm B.16\ Modelo\ Obtido\ pelo\ Algoritmo\ de aprendizagem preguiçoso - Estratégia\ MIMO,$	
Função Constante-linear-quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100	
e máximo igual a 300)	90
$\operatorname{B.17}$ Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO	,
Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a	
300)	91
$\operatorname{B.18}$ Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO	,
Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)	91
$\operatorname{B.19}$ Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO	,
Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a	
300)	91
$\rm B.20~Modelo~Obtido~pelo~Algoritmo~de~aprendizagem~preguiçoso - Estratégia DIRMO$	,
Função Constante-linear-quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100	
e máximo igual a 300)	92
B.21 Modelo ARX - Estratégia Direta	93
B.22 Modelo ARX - Estratégia Recursiva	93
B.23 Modelo ARX - Estratégia DirRec	93
B.24 Modelo ARX - Estratégia MIMO	94
B.25 Modelo ARX - Estratégia DIRMO	94

## Lista de Abreviações

AIC Critério de Informação de Akaike (Akaike Information Criterion); ARMAX Modelo Auto-Regressivo com Média Móvel e Entradas Exógenas (Auto-Regressive moving average with eXogenous inputs); ARX Modelo Auto-Regressivo com Entradas Exógenas (AutoRegressive with eXogenous inputs); BIC Critério de Informação de Bayes (Bayesian Information Criterion); DIRMO Junção da Estratégia Direta com a MIMO; DirRec Junção da Estratégia Direta com a Recursiva; **KIC** Critério de Informação de Kullback (Kullback Information Criterion); LLAlgoritmo de Aprendizagem Preguiçoso (Lazy Learning Algorithm); LOO Erro Leave-One-Out; LS-SVR Least Square Support Vector Regression; MAE Erro Absoluto Médio (Mean Abolute Error); **MAPE** Erro Percentual Médio (Mean Absolute Percentage Error); MDL Minimum Description Length; MIMO Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas; **MSE** Erro Quadrático Médio (Mean Squared Error); MQ Mínimos Quadrados (Least Squares); MQR Mínimos Quadrados Recursivo (Least Square Regression); **NSE** Eficiência de Nash-Sutcliffe (Nash-Sutcliffe Efficiency); **PBIAS** Percent Bias: PLL Preditor Linear Local (Local Linear Prediction); PRESS Soma dos Quadrados Preditos (Adjustable Prediction Error Sum of Squares): RMSE Raíz Quadrada do Erro Quadrático Médio (Root Mean Squared Error); RSR Ratio of the Mean Squared Error to the Standard deviation of Observa-

tions;

RNAs Redes Neurais Artificiais; UHE Rosal Usina Hidrelétrica Rosal;

UHE Três Marias Usina Hidrelétrica Três Marias;

## 1 Introdução

#### 1.1 O problema

O Brasil, por ser um país de extensão territorial grande, possui em seu território 12 bacias hidrográficas de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Cada bacia possui suas peculiaridades como: extensão territorial, potencial de navegação e turístico, geração e distribuição de energia, entre outros. Dentre as várias potencialidades dessas bacias, a principal é a geração de energia elétrica. O Brasil, entretanto, enfrenta um grande problema devido a suas proporções continentais, ou seja, é possível que, enquanto o Nordeste passe por fortes secas, o Sul e o Sudeste do país enfrentem períodos chuvosos. Assim, controlar os níveis de afluência dos rios por meio de modelos que predizem vários passos à frente é um grande desafio para a ciência em diversas áreas do conhecimento tais como economia (Chevillon, 2007; Marcellino, 2006) e hidrologia (Bao et al., 2014; Bhagwat e Maity, 2012; Pianosi e Raso, 2012).

Atualmente existem diversas ferramentas que se propõem a criar modelos de predição de afluência, tais como, modelos meteorológicos, modelos probabilísticos, modelos estocásticos, híbridos, dentre outros (Batista, 2009; Beven, 2012; El-Shafie et al., 2009). Essas ferramentas têm como objetivo criar modelos parcimoniosos, capazes de prever de forma confiável o comportamento dos níveis de afluência em rios brasileiros. De modo que as concessionárias de energia elétrica possam ter um conhecimento a priori da vazão desses rios nos reservatórios das hidrelétricas. E assim planejar de forma antecipada a geração e distribuição de energia elétrica para todo o território, evitar apagões e permitir que todo o país possa usufruir dessa energia. Além disso, é possível também o atendimento das demandas, gerando confiabilidade no fornecimento de energia e aproveitamento máximo dos Recursos Hídricos considerando a diversidade hidrológica das regiões (Tucci, 2005).

Sabe-se que a previsão hidrológica equivale em fornecer valores de estimativas dentro de intervalos de confiança, estabelecidos, normalmente, por meio de análise de dados de

variáveis hidrológicas com antecedência suficiente para serem úteis no planejamento dos recursos hidrológicos. A obtenção de valores futuros de variáveis hidrológicas, mesmo que sujeitos a erros, é de extrema importância para determinar tais previsões. O uso de ferramentais de previsão vem, portanto, ganhando cada vez mais espaço nos sistemas modernos de Recursos Hídricos (Beven, 2012; Sen, 2010; Tucci, 2005).

No contexto de modelagem para previsão, Ping et al. (2011) utilizam máquinas de vetores de suporte e o método de predição grey para prever a entrada de água do rio Minjiang. Os resultados apontam que, ao utilizar as duas ferramentas combinadas, as melhoras na predição são notadas. Sáfadi (2004), em seu trabalho, descreve a série de vazão de água da represa de Furnas por meio de séries temporais, estudando o efeito da sazonalidade, tendência e intervenção. Batista (2009) investiga, em seu trabalho, duas metodologias diferentes para previsão de séries temporais de vazões fluviais do Rio Grande: metodologia de Box & Jenkins e Redes Neurais Artificiais. Os resultados obtidos mostram que cada metodologia pode ser ajustada adequadamente ao conjunto de observações em estudo, entretanto cada técnica possui vantagens e desvantagens.

Em (Bhagwat e Maity, 2012), o LS-SVR (do inglês, Least Square-Support Vector Regression) é utilizado para modelar a variação diária do fluxo do rio Narmada na Índia. São feitos testes para predição de multipassos à frente e a predição de até 5 passos à frente é considerada de bom desempenho. Franses e Legerstee (2010) unificam duas metodologias para previsão de multipassos à frente de modelos de séries temporais autorregressivos. O modelo utilizado é composto por duas partes: um modelo ARX com os mesmos parâmetros para todos os horizontes e o outro, um modelo também ARX, com diferentes parâmetros para diferentes horizontes de previsão. Castro (2011) usa um método de aproximação linear, o PLL (Preditor Linear Local), no contexto de modelagem de séries de afluência das bacias do Rio Grande e Três Marias para estudar a predição de vazão em um horizonte de até 10 dias.

A transformada de Wavelet é utilizada em várias aplicações em séries hidrológicas por Sang (2013). Wavelet é utilizada para identificação de componentes auxiliando na quantificação das séries temporais, para análise de correlação cruzada, auxiliando principalmente na simulação e previsão de séries temporais hidrológicas.

Taieb et al. (2012) afirmam que uma de suas contribuições é apresentar uma revisão, acompanhada por uma comparação teórica, das estratégias de previsão existentes para multipassos à frente, com o objetivo de verificar o desempenho da cada uma delas. Eles também fazem uma comparação experimental na qual utilizaram o algoritmo *Lazy Learning* (LL) na série temporal 111 da competição internacional de previsão do NN5 (maiores informaçãoes no site: http://www.neural-forecasting-competition.com/) . Os resultados obtidos apontam que as abordagens utilizando um modelo de multíplas saídas é melhor do que aquelas que utilizam uma única saída. Foi constatado ainda que técnicas de pré-processamento dos dados, como por exemplo a dessazonalização, podem levar a um

melhor desempenho quando se considera a previsão de vários passos à frente.

Em outro de seus trabalhos, Taieb et al. (2009) comparam as estratégias Diretas e MIMO (única saída e multíplas saídas, respectivamente), discutindo suas limitações para o problema de predição a longo prazo de séries temporais. Neste mesmo trabalho eles propõem uma nova metodologia que é uma espécie intermediária entre a estratégia Direta e MIMO, denominada DIRMO, buscando preservar os melhores aspectos das duas estratégias. Os resultados iniciais demonstram que esta abordagem é promissora.

Diante da necessidade do planejamento e aproveitamento dos recursos hídricos, a busca por modelos capazes de prever de forma confiável a vazão afluente dos rios, o presente trabalho propõe analisar duas técnicas de modelagem de séries temporais, ou seja, modelos autorregressivos com entradas exógenas e modelos usando o preditor local em relação a cinco tipos de estratégias (Direta, Recursiva, MIMO, DirRec, DIRMO) de predição multipassos à frente (Taieb et al., 2012). Como exemplo serão utilizadas duas séries temporais reais de vazão afluente de bacias hidrográficas com perfis dinâmicos diferentes, uma de dinâmica lenta e a outra de dinâmica rápida. A metodologia proposta, que se baseia na utilização de diferentes modelos escolhidos para atender um determinado índice de desempenho para cada passo à frente de predição, pode levar a obtenção de melhores predições.

## 1.2 Objetivo

Este trabalho abordará o problema de previsão de séries temporais de vazão real, em um horizonte de até 10 passos à frente, para duas Usinas Hidrelétricas da CEMIG. Serão tomados como base de estudo dois tipos distintos de bacias hidrográficas. Uma de pequeno porte e consequentemente de dinâmica rápida, UHE Rosal, e outra de grande porte e consequentemente de dinâmica lenta, UHE Três Marias. Outra diferença significativa e possível de analisar é a quantidade de dados disponíveis. A primeira possui uma série histórica longa e a outra uma série histórica curta. Na tentativa de alcançar esses objetivos dois algoritmos são utilizados:

- O ARX, um clássico da literatura que pode ser considerado uma ferramenta simples e de fácil utilização, será usada como modelo de comparação;
- O Lazy Learning Algorithm (LLO), considerado um algoritmo mais elaborado e menos explorado na literatura se comparado ao anterior.

Paralelamente a essas duas ferramentas citadas acima, utilizam-se 5 tipos de estratégias de previsão disponíveis na literatura (Direta, Recursiva, MIMO, DirRec, DIRMO), com o intituito de melhorar a predição e posterior comparação dos resultados.

#### 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho é dividido em 6 Capítulos. O Capitulo 1 mostra o problema ressaltando a motivação e justificativa para a realização do mesmo. Além disso, apresentam-se diversas ferramentas propostas por vários autores na busca de modelos capazes de prever de forma confiável a vazão afluente dos rios, assim como os objetivos a serem alcançados.

No Capítulo 2, será feita uma breve revisão bibliográfica de conceitos importantes envolvidos na predição de séries hidrológicas como: Séries Temporais, Hidrologia, Bacia Hidrográfica, Modelagem Hidrológica, Modelagem de Sistemas e algumas ferramentas usuais da literatura.

O Capítulo 3 apresenta todas as etapas de identificação de sistemas utilizadas. Descrevemse os dados utilizados, a representação matemática (ARX e algoritmo de aprendizagem preguiçosa), a determinação da ordem do modelo, a estimação dos parâmetros, os 5 tipos de estratégias, além das métricas utilizadas para a validação dos resultados.

Nos Capítulos 4 e 5, os resultados e as discussões da UHE Rosal e Três Marias são apresentados, respectivamente. É feita uma comparação entre o desempenho dos modelos obtidos pelo ARX e do algoritmo de aprendizagem preguiçoso com os 5 tipos de estratégias de previsão, analisando-se os índices de desempenho.

Finalmente, no Capítulo 6, as discussões dos resultados, conclusões englobando todo o trabalho e propostas para futuras pesquisas são apresentados.

## 2 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo, os conceitos necessários para compreensão deste trabalho serão brevemente descritos. Inicia-se com o conceito de séries temporais, Seção 2.1. A Seção 2.2 descreve os conceitos Hidrológicos e a importância dos Recursos Hídricos na atualidade, seguindo pela descrição de Bacias Hidrográficas (Seção 2.3). Uma breve descrição sobre Modelagem Hidrológica é feita na Seção 2.4. Na última parte deste capítulo (Seção 2.5), uma breve revisão sobre modelagem de sistemas é apresentado.

#### 2.1 Séries Temporais

Previsão de séries temporais na atualidade ainda é um grande desafio em diversas áreas da ciência. Diversas perguntas estão cada vez mais frequentes e comuns, como: Será que a bolsa de valores vai subir? Vai chover amanhã? Pode-se saber quando ocorrerá uma enchente? O valor do petróleo vai subir? As respostas para essas perguntas pode significar muito: maior lucratividade, redução de custo, menor prejuízo, melhor planejamento, entre outros.

Ao se lidar com o problema de previsão, um dos elementos fundamentais é a obtenção de uma série temporal que descreve o fenômeno sob investigação. Uma série temporal pode ser descrita como um conjunto de observações realizadas de forma sequencial ao longo de um determinado intervalo de tempo (não necessariamente igualmente espaçadas) (Box et al., 2008). Os dados passados trazem informações relevantes sobre o que irá ocorrer no futuro, pois pode existir uma correlação entre as variáveis em diversos instantes. Visto que os modelos obtidos a partir desses dados não é garantia de acerto, sempre existirá incerteza associada nas previsões futuras.

Uma série temporal é considerada contínua quando a coleta dos dados é realizada continuamente no tempo. Discreta quando a coleta desses dados é realizada em tempos específicos, geralmente equiespaçados. Além disso, a variável observada pode assumir valores discretos ou contínuos (de Souza, 2008). Uma série temporal pode ser escrita da

seguinte forma:

$$y_1, y_2, y_3, ..., y_{n-1}, y_n$$
 (2.1)

ou

$$y_t, t = 1, 2, ..., n.$$
 (2.2)

Assim como em (Figueredo, 2008) pode-se dizer que modelar uma série temporal consiste na identificação do processo gerador da série e na estimação de parâmetros do modelo que o representa e a avaliação da qualidade do diagnóstico.

De acordo com (Box et al., 2008), pode-se citar os principais objetivos em se estudar análise de séries temporais da seguinte forma:

- Investigar o mecanismo gerador de série temporal; por exemplo, analisando uma série de alturas de ondas, surge o interesse de como estas ondas foram geradas;
- Fazer previsões de valores futuros da série de vendas, produção ou estoque, ou a longo prazo, como para séries populacionais, de produtividade, etc;
- Descrever apenas o comportamento da série; neste caso, a construção do gráfico, a verificação da existência de tendências, ciclos e variações sazonais, a construção de histogramas e diagramas de dispersação, podem ser ferramentas úteis;
- Procurar periodicidades relevantes nos dados.

As abordagens de previsão de séries temporais existentes na literatura podem ser organizadas da seguinte forma, conforme (de Souza, 2008):

- Técnicas Descritivas: Ao se analisar uma ou mais séries temporais a representação gráfica dos dados sequencialmente ao longo do tempo é fundamental e pode revelar padrões de comportamento importantes. A tendência de crescimento (ou decrescimento), padrões cíclicos, alterações estruturais, observações aberrantes, entre outros, são geralmente identificados;
- *Modelos lineares*: incluem modelos probabilísticos, análise espectral, métodos não paramétricos (alisamento ou suavização), modelos de espaço de estados, séries multivariadas, estudos longitudinais e processos de longa dependência;
- Modelos não-lineares: englobam modelos não lineares gerais (redes neurais artificiais, sistemas nebulosos, filtro de Kalman estendido, modelos híbridos), modelos pré-definidos, modelos com volatilidade variável, entre outros.

Para estudar uma série temporal é importante compreender as leis que geram a série, ou seja, conhecer as leis físicas, biológicas ou químicas que atuam no sistema. Especificamente neste caso, por se tratar de séries temporais hidrológicas é importante ter um conhecimento prévio de conceitos como: hidrologia, bacias hidrográficas e modelos hidrológicos. Nas próximas seções estes conceitos serão brevemente descritos.

#### 2.2 Hidrologia

A hidrologia é a ciência que estuda os fenômenos naturais complexos do ciclo hidrológico. A análise quantitativa e qualitativa dos processos como precipitação, evaporação, infiltração e o escoamento em rios se torna difícil devido ao grande número de fatores que os influenciam (Tucci, 2005).

Segundo Tucci (2007), a hidrologia busca solucionar situações que cercam a utilização dos recursos hídricos, preservação do meio ambiente e ocupação da bacia hidrográfica. Pode atuar em diversas áreas como: planejamento e gerenciamento da bacia hidrográfica, abastecimento de água, drenagem urbana, aproveitamento hidrelétrico entre outros.

A utilização dos recursos hídricos é de tal forma que vai desde o uso doméstico, até chegar nas indústrias, onde é aplicável no funcionamento de máquinas e na geração de energia elétrica. Onde passa pelo uso rural, no qual é utilizada para irrigação e criação de animais (Batista, 2009).

Em seu trabalho, Batista (2009) relata que compreender o ciclo hidrológico possibilita ao homem simular o comportamento da água nas bacias hidrográficas, para que possa ter um conhecimento antecipado das alterações climáticas e do uso do solo. Surgindo assim o conceito de simulação hidrológica, que pode ser representada por equações matemáticas, sendo a unidade territorial a bacia hidrográfica no qual fornecerá as respostas da bacia em termos de vazão, com relação a umidade do solo em resposta à precipitação. Portanto para melhor compreensão deste ciclo é importante conhecer o sistema em estudo, que será descrito na seção abaixo.

#### 2.3 Bacia Hidrográfica

Tucci (2007) define bacia hidrográfica como uma área que contribui por gravidade para os rios de forma que toda a vazão efluente seja descarregada por uma simples saída. Segundo (Tucci, 2005), pode-se conceituar uma bacia hidrográfica como um sistema que ligado a uma entrada (precipitação), por meio de diversos processos hidrológicos, transforma a precipitação em vazão. A formação do sistema hidrológico utiliza-se diversas características: solo, vegetação, topografia, entre outros.

Para se construir um modelo hidrológico utiliza-se como objeto de estudo uma bacia hidrográfica, que reune as superfícies onde se recebem e despejam água sobre um ou mais canais de escoamento que desembocam numa única saída. Ela pode ser subdividida utilizando vários tipos de abordagem considerando suas características espacialmente distribuídas, podendo constituir a unidade espacial para modelos agregados por meio do qual consideram para toda a bacia, as propriedades médias (Rennó, 2004).

Pode-se dizer que um modelo nada mais é do que a representação de um sistema. Por isso, é importante conhecer a fundo o sistema a ser modelo, neste contexto a modelagem hidrológica é descrita na próxima seção.

#### 2.4 Modelagem Hidrológica

Para melhor representar o comportamento de uma ou mais bacias hidrográficas, devido às limitações das técnicas de medições (pois não se pode medir tudo o que gostaria de saber sobre sistemas hidrológicos), e desejando conhecer medições que não estão disponíveis (como no futuro). Necessita-se, portanto, de um meio de extrapolação a partir das medições conhecidas no espaço e no tempo, utilizando-se modelos hidrológicos, ferramenta desenvolvida pela ciência, para prever condições diferentes das observadas.

A simulação hidrológica é limitada pela diversidade física da bacia e dos processos envolvidos, tendo como consequência o surgimento de um grande número de modelos diferenciando-se pelas prioridades de representação dos processos, dos dados utilizados, discretização e dos objetivos a serem alcançados. Vale lembrar que nenhum modelo aumentará as informações existente nos dados, mas poderá extrair da melhor forma possível as informações já existentes. Por meio dos dados é que se encontra os parâmetros reduzindo as incertezas dos mesmos na estimativa das variáveis hidrológicas (Tucci, 2005). O sucesso de um modelo hidrológico depende demasiadamente dos dados disponíveis para configurá-lo e conduzi-lo (Beven, 2012)

De acordo com (Tucci, 2005) os modelos utilizados no gerenciameneto dos recursos hídricos podem ser classificados em:

- Modelos de comportamento: são modelos que descrevem o comportamento do sistema. É utilizado para prever a resposta de um sistema sujeito a diferentes entradas ou devido a algumas alterações em suas características.
- Modelos de otimização: Este modelo procura obter as melhores soluções de um sistema em nível de projeto.
- Modelos de planejamento: Avalia as condições globais do sistema. O modelo de planejamento analisa as soluções meramente hidráulicas, hidrológicas ou econômicas, mas engloba também a quantificação sócio-econômica e ambiental. Esta técnica utiliza tanto os modelos de comportamento quanto os de otimização de diferentes áreas.

 ${\bf A}$  Tabela 2.1 mostra exemplos dos modelos utilizados no gerenciamento dos recursos hídricos.

Tabela 2.1: Alguns modelos utilizados no gerenciamento dos recursos hídricos.

Nome Precipitação-Vazão	Tipo  determinístico; empírico; con-	Estrutura Comportamento	Características Calcula a vazão de uma bacia a partir da precipitação	Usos  extensão de séries de vazão; dimensionamento; previsão em
Vazão-Vazão	nísti			terra extensão de séries de vazões; di-
	empírico; con- ceitual		partir de um ponto a montante	mensionamento; previsão de cheia
Geração estocástica de vazão	estocástico		calcula a vazão com base nas características da série histórica	dimensionamento do volume de um reservatório
Fluxo saturado	determinístico		determina o movimento, vazão potencial de águas subterrêneas à partir de dados de realimentação, bombeamento, etc	capacidade de bombeamento; nível do lençol freático; iteração rio-aquífero, etc
Hidrodinâmico	determinístico		sintetiza vazões em rios e rede de canais	simulação de alterações do sistema; efeitos de escoamento de jusante
Qualidade de Água de rios e reservatórios	determinístico		simula a concentração de parâmetros de qualidade da água	impacto de efluentes; eutrofização de reservatórios; condições ambientais
Rede de canais e condutos	determinístico	Comportamento e otimização	otimiza o diâmetro dos condutos e verifica as condições de projeto	rede abastecimento de água; rede de irrigação
Operação de reservatórios	estocástico, de- terminístico		determina a operação ótima de sistemas de reservatórios	usos múltiplos
Planejamento e gestão de sistemas múltiplos	estocástico, de- terminístico	Comportamento, otimização e pla-	simula condições de projeto e operação de sistemas (usa vários	Reservatórios, canais, estações de tratamento, irrigação, navegação
		nejamento	modelos)	fluvial, etc

#### 2.5 Modelagem de Sistemas

Modelagem Matemática é a área do conhecimento que representa sistemas reais, por meio de modelos, com o objetivo de prever o seu comportamento, podendo ser empregada em diversas áreas, biologia, hidrologia, economia, física, engenharia, química, entre outras.

Os modelos matemáticos podem assumir diferentes formas. Um modelo pode ser mais adequado que outros, ou seja, de acordo com o sistema considerado e das ciscunstâncias particulares, há modelos mais representativos que outros.

Por exemplo, Ogata (2011) diz que nos problemas de controle ótimo é interessante utilizar representações de espaço de estados. Por outro lado, para a análise da resposta transitória ou da resposta em frequência de um sistema linear, invariante no tempo, de entrada e de saída únicas, a representação pela função de transferência pode ser mais conveniente que qualquer outra. Após obter o modelo matemático de um sistema, para análise e síntese do mesmo, utilizam-se várias ferramentas analíticas e de computação.

Assim como (Box et al., 2008), pode-se dizer que um modelo é uma descrição probabilística de uma série temporal que depende do usuário decidir como usar esse modelo. O modelo que representa uma série, não necessariamente, conduz a um procedimento de previsão.

A modelagem de sistemas pode ser aplicada em várias áreas e para vários problemas. Citam-se como exemplos: na forma da asa de um avião, para crescimento de bactérias, em um sistema econômico, uma cultura agrícola, em um estudo populacional, entre outros.

Modelo nada mais é que a simplificação do mundo real que contém as características principais do mesmo, podendo ser real ou abstrato. Os modelos matemáticos podem ser classificados de acordo com o nível de conhecimento *a priori* utilizado na seleção de sua estrutura (Ljung, 1987):

- modelos caixa-branca ("white-box");
- modelos caixa-cinza ("grey-box");
- modelos caixa-preta ("black-box");

Os modelos caixa-branca têm suas estruturas completamente ajustadas a partir de informações conhecidas a priori. A função matemática que descreve o comportamento dinâmico do sistema original é previamente conhecida. Os modelos caixa-cinza são indentificados utilizando algum conhecimento a priori para simplificar os algoritmos de seleção de estrutura. Por fim, a identificação de modelos caixa-preta não utiliza nenhuma informação conhecida a priori. A estrutura destes modelos pode ser ajustada dentro de famílias conhecidas por apresentar boa flexibilidade na modelagem de sistemas (Ljung, 1987).

Os modelos podem ser classificados em duas classes (Box et al., 2008): os paramétricos e os não paramétricos. Para modelos paramétricos toda a análise é feita no domínio do tempo. Entre todos os paramétricos os mais usuais são: os modelos de erro (ou regressão), os modelos autoregressivos - médias móveis (ARMA) e os modelos autoregressivos - integrados - médias móveis (ARIMA). Já para os não paramétricos, os mais utilizados são: a função de auto-covariância (ou auto-correlação) e sua transformada de Fourier, o espectro (Box et al., 2008).

Os modelos Box-Jenkins (modelo ARIMA) estão entre os principais modelos para previsão de séries temporais (Box et al., 2008).

As principais etapas utilizadas para determinação de modelos são (Aguirre, 2007):

- Testes dinâmicos e coleta de dados;
- Escolha da representação matemática a ser usada;
- Seleção da estrutura do modelo;
- Estimação de parâmetros;
- Validação do modelo.

Conforme descrito nesta seção, existem diversos métodos e ferramentas, que são utilizadas na identificação de sistemas. A seguir são descritas sucintamente algumas dessas ferramentas que foram e ainda são muito usadas na literatura.

#### Redes Neurais Artificiais

As redes neurais artificiais são ferramentas amplamente utilizada na modelagem de sistemas. Diversos autores utilizam as RNAs para modelagem de sistemas, inclusive na modelagem de processos hidrológicos (Batista, 2009; Kentel, 2009; Piotrowski e Napiorkowski, 2011). Ela pode ser definida como uma rede (estrutura de processamento) passível de implementação, composta de unidades interconectadas (neurônios artificiais), sendo que cada neurônio apresenta um comportamento específico de entrada e saída, determinado pelas interconexões com outras unidades, dentro de um raio de vizinhaça (Kovács, 2000).

#### Lógica Fuzzy

A lógica clássica, por meio de metodologias bem estabelecidas, separa um conjunto de dados, que por diversas vezes pode ser um processo complicado onde não reflete a realidade do problema a ser modelado. A lógica nebulosa surgiu para modelar matematicamente as informações imprecisas. Sen (2010) descreve em seu livro a modelagem de séries hidrológicas utilizando a lógica Fuzzy, pois segundo ele os sistemas hidrológicos possuem

informações subjetivas que são difíceis de modelar sem utilizar a teoria dos conjuntos nebulosos.

## Preditor Linear Local (PLL)

O PLL é uma técnica de modelagem local. É comumente utilizado para predição de séries temporais caóticas. Se comparado com vários métodos, esta técnica é promissora pois sua execução é relativamente simples.

As etapas para a obtenção dos modelos são: i) reconstrução do espaço de estados do sistema; ii) aproximação da função local. O PLL diferentemente de muitos outros modelos, trabalha com a série imersa no espaço de estados. O objetivo deste método é encontrar nas séries os estados que definem a trajetória do sistema por aproximação local. Inicialmente determina-se o número de vizinhos, a seguir utiliza-se os valores selecionados para fazer a predição (Silva, 2004).

Uma das técnicas de modelagem utilizadas no presente trabalho é um tipo de preditor local, ou seja, o método de aprendizagem preguiçoso. O mesmo será descrito com mais detalhes no próximo capítulo, na Seção 3.2.

# 3 Identificação de Sistemas

Este capítulo apresentam-se todas as etapas de identificação de sistemas utilizadas. Na Seção 3.1, os dados são descritos. Na Seção 3.2 encontra-se a representação matemática utilizada, o ARX e o algoritmo de aprendizagem preguiçoso. A Seção 3.3 descreve a determinção da ordem do modelo. Na Seção 3.4, será revisadas técnicas de estimação dos parâmetros: o mínimos quadrados convencional e o recursivo. Aliado a essas ferramentas, aplicaram 5 tipos de estratégias presentes na literatura (são ferramentas recentes que ainda não foram exploradas por vários pesquisadores), com o intuito de melhorar a predição do modelo. Essas estrátégias serão descritas na Seção 3.5. Finalmente na Seção 3.6 são apresentados os índices de desempenho utilizados para a validação dos resultados.

## 3.1 Apresentação dos dados

Os dados utilizados neste trabalho são de duas bacias hidrográficas: Usina Hidrelétrica Rosal (UHE Rosal) e Usina Hidrelétrica Três Marias (UHE Três Marias). As mesmas são descritas abaixo.

#### UHE de Rosal

A UHE de Rosal foi adquirida pela CEMIG em dezembro de 2004, sendo a primeira usina da CEMIG fora do estado de Minas Gerais. Está localizada no Itabapoana, município de São José do Calçado no sul do Espírito Santo, na divisa com o Rio de Janeiro. Por ser de pequeno porte e consequentemente de dinâmica rápida quando comparada a bacias como São Simão e outras, a amostragem diária utilizada pode dificultar a modelagem. Foram utilizados como dados de entrada os valores de precipitação e de saída os valores de vazão. Os mesmos referem-se ao período do dia 1 de março de 1975 a 31 de março de 2012. As Figuras 3.1 e 3.2 mostram esses valores.

É importante visualizar as séries temporais disponíves de vazão desta bacia. Por meio da Figura 3.3, percebe-se que os rios diferem no tamanho devido à faixa de valores das

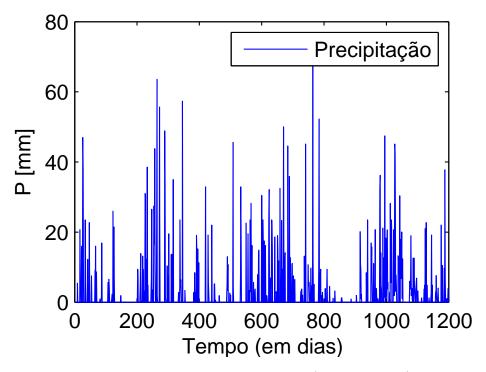


Figura 3.1: Série temporal de precipitação P (dada em mm), UHE Rosal.

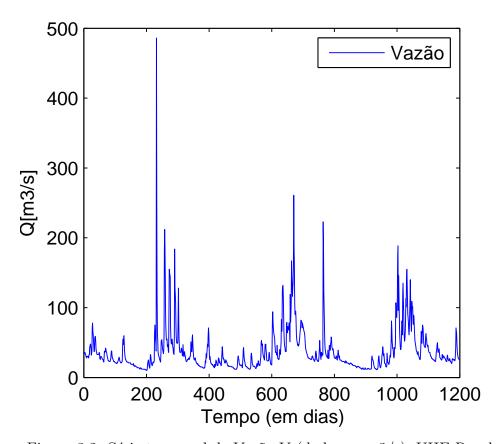


Figura 3.2: Série temporal de Vazão V (dada em m3/s), UHE Rosal.

vazões. A série escolhida foi a de maior vazão e consequentemente de maior correlação com a precipitação.

Pelo fato dos dados terem comportamento estocástico, é difícil obter um modelo que se adapte a essas séries hidrológicas. Há uma parte da série que é regular onde não há interferência da presença de chuva, portanto mais fácil de prever e outra, que devido à presença de chuva é mais difícil de prever.

O acúmulo em vazão devido a precipitação é rapidamente sentido quando se trata de uma bacia pequena, ou seja, o efeito da chuva passa rápido, por isso um atraso pequeno se torna interessante (atraso utilizado igual a 3). A Tabela 3.1 apresenta uma breve análise estatística de todas as séries disponíveis.

Ao analisar a série de vazão utilizada, Figura 3.2, observa-se que há uma sazonalidade marcada com chuvas concentradas nos meses de Dezembro a Fevereiro. Quando se analisa todo o conjunto de dados, percebe-se a presença de uma sazonalidade móvel, pois as amplitudes sazonais mudam ao longo do tempo. Nos anos mais recentes é detectada nos meses de Janeiro a Março.

Posto de Medição	Tipo	Média	Mínimo	Máximo
UHE Rosal	Vazão	45,63	6	636
Guaçuí Ponte	Vazão	11,5	5	99,56
Fazenda Maó	Vazão	21	4,67	279,18
UHE Rosal	Precipitação	3,64	0	117,97
Guaçuí Ponte	Precipitação	2,88	0	115
Fazenda Maó	Precipitação	2,64	0	82,22

Tabela 3.1: Características estatísticas das séries temporais da UHE Rosal.

### UHE de Três Marias

A UHE Três Marias está localizada na Bacia do rio São Francisco, região norte de Minas Gerais. Ela é considerada de grande importância para o Brasil, devido à sua localização para o sistema interligado nacional e ao seu grande reservatório, um dos maiores da CEMIG. Ao contrário da UHE Rosal a UHE de Três Marias é de grande porte e possui pouca massa de dados, dados recentes. Foram utilizados como dados de entrada os valores de precipitação e de saída os valores de vazão. Os mesmos referem-se ao período do dia 16 de junho de 1999 a 31 de janeiro de 2011. As Figuras 3.4 e 3.5 representam esses valores.

A Tabela 3.2 apresenta uma análise estatística de algumas das séries disponíveis desta bacia. Apesar de ser uma bacia de grande porte e consequentemente de dinâmica lenta, verificou-se que o atraso 3 foi suficiente para a modelagem.

Pela Figura 3.5, vê-se que há uma sazonalidade marcada com chuvas concentradas nos meses de Dezembro a Março. É possível visualizar na Figura 3.6 e na Tabela 3.2, que apenas as séries de Andorinhas e Porto Pará são as de maiores vazões e apesar do posto

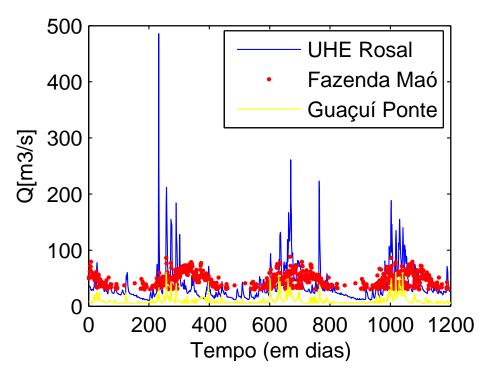


Figura 3.3: Séries temporais de Vazão V (dada em m3/s), disponíveis da UHE Rosal.

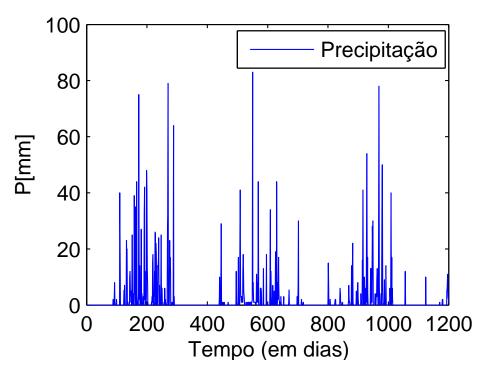


Figura 3.4: Série temporal de precipitação P (dada em mm), UHE Três Marias.

de Andorinhas possuir uma vazão um pouco maior, utiliza-se a do Porto Pará, pois suas localizações são próximas e as chuvas entre eles são parecidas. Esta vazão é utilizada com a precipitação de maior correlação.

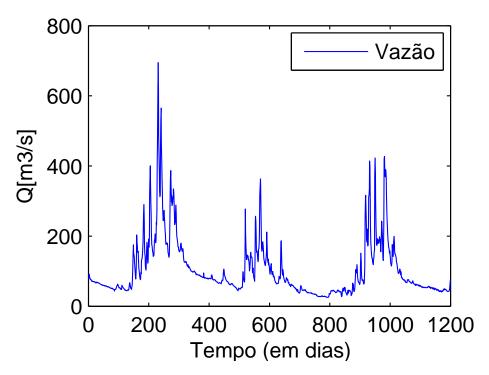


Figura 3.5: Série temporal de Vazão V (dada em m3/s), UHE Três Marias.

Tabela 3.2: Características estátísticas das séries temporais da UHE Três Marias.

Posto de Medição	Tipo	Média	Mínimo	Máximo
Andorinhas	Vazão	235,82	30,6	1750
Porto Pará	Vazão	128,82	25,79	1211
Mesquita	Vazão	121,21	19,34	1338
Indaiá	Vazão	36,83	3,59	641,83
Major	Vazão	20,41	0	449,2
BR040	Vazão	71,11	7	100
Indaiá	Precipitação	3,17	0	138
UHE Três Marias	Precipitação	2,85	0	85
BR040	Precipitação	3,21	0	127
Mesquita	Precipitação	3,2	0	86
Porto Pará	Precipitação	3,13	0	107
Andorinhas	Precipitação	3,19	0	94

## 3.2 Escolha da representação Matemática

### Moldelo ARX

Na identificação de sistemas lineares encontram-se diversos modelos como: ARX (autoregressivo com entradas eXógenas), ARMAX (autoregressivo com média móvel e entradas exógenas) e modelos de Box-Jenkins, entre outros (Box et al., 2008). Por ser amplamente utilizado na literatura especializada, optou-se pelo ARX, modelo autoregressivo com entradas externas (AutoRegressive with eXogenous inputs) para compará-lo posterior-

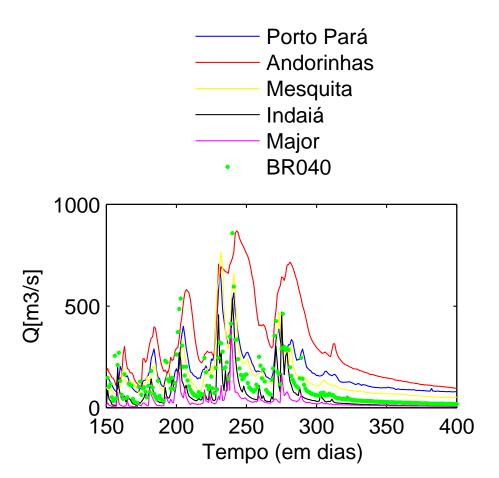


Figura 3.6: Séries temporais de Vazão V (dada em m3/s), disponíveis da UHE Três Marias.

mente com o algoritmo de aprendizagem preguiçoso (Lazy Learning Algorithm). Segundo (Aguirre, 2007) a equação do modelo ARX pode ser descrita da seguinte forma:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + v(k)$$
(3.1)

onde A(q) e B(q) são polinômios arbitrários em função do operador de atraso q, u(k) é o sinal de entrada e y(k) o sinal de saída. Vê-se que o ruído v(k) aparece diretamente na equação. Uma forma alternativa de representar a estrutura do modelo ARX, baseada na equação do erro previsto, pode ser escrita pela seguinte equação:

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}v(k)$$
(3.2)

Como o ruído adicionado à saída não é branco, ou seja, neste modelo o ruído é modelado como ruído branco filtrado por um modelo autoregressivo. O Fluxograma 3.7 mostra os passos para o algoritmo ARX.

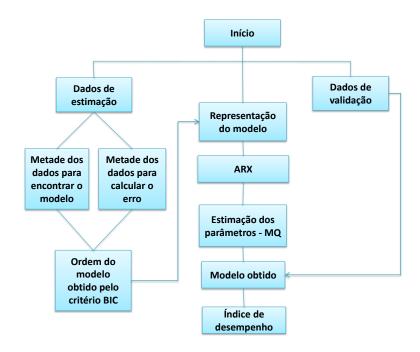


Figura 3.7: Fluxograma com passos de execução do ARX

### Algoritmo de Aprendizagem Preguiçoso

Nesta Seção descreve-se a técnica de modelagem do algoritmo de aprendizagem preguiçoso. Grande parte das ferramentas utilizadas são do toolbox disponibilizado por Taieb et al. (2012). Apenas para as estratégias MIMO e DIRMO, desenvolveu-se o código baseado no artigo desses autores, visto que as funções disponíveis no toolbox são somente para uma única entrada.

O algoritmo de aprendizagem preguiçoso é um caso particular do algoritmo de aprendizagem local. Esse algoritmo se torna interessante devido algumas características próprias. Taieb et al. (2012) afirmam que o LL (algoritmo de aprendizagem preguiçoso) não assume qualquer conhecimento a priori sobre o processo subjacente aos dados. Essa é uma característica bastante atraente quando se analisa conjuntos de dados reais. Além de um número reduzido de suposições, este método possui capacidade de aprendizagem *online* e a capacidade de se adequar a não-estacionaridade que porventura houver, desde que haja um conjunto suficiente de dados.

A vantagem de implementar este método é que a função alvo é aproximada localmente. Com esta aproximação local, os modelos têm capacidade de resolver múltiplos problemas simultaneamente e lidar com mudanças na dinâmica que, porventura, ocorrem. Sua desvantagem está na armazenagem de todo o conjunto de dados disponíveis, o que pode resultar em grande esforço computacional.

Conforme descrito por Birattari e Bontempi (1999), o algoritmo de aprendizagem preguiçoso é uma técnica que adia todo o cálculo até que se tenha um pedido explícito de previsão. Cada vez que uma predição é solicitada para um ponto de consulta específico, um conjunto de modelos locais é identificado, com diferentes números de vizinhos e podendo ter polinômios de diferentes graus. Segundo os autores, o algoritmo de Mínimos Quadrados Recursivo é utilizado para a estimação dos parâmetros dos modelos locais.

Os vizinhos (largura de banda) mais próximos do ponto de consulta são encontrados de acordo com a distância de Manhattan (Possui este nome por causa das ruas quadriculadas da ilha de Manhattan. Essa distância corresponde a soma da diferença de cada ponto). Esses vizinhos são utilizados para estimar um modelo local, que retorna uma previsão. O modelo local é então descartado e o processo é repetido a partir do início.

## Algoritmo de Aprendizagem preguiçoso - Saída Única

Para a aprendizagem preguiçosa de saída única, o usuário determina o mínimo e o máximo número de vizinhos, kmin e kmax. Por conseguinte, o algoritmo calcula uma estimativa  $y_q(k)$  para cada número de vizinhos. Escolhe-se o melhor modelo utilizando o erro de validação cruzada,  $e_{LOO}(k)$  (Leave-one-out (LOO)). Este erro fornece uma estimativa confiável da capacidade de generalização. Este processo é repetido k vezes gerando-se um esforço computacional muito grande. Portanto, os autores utilizam um procedimento estatístico que tem um menor esforço computacional denominado Estatística PRESS (Soma dos quadrados preditos), para calcular o  $e_{LOO}(k)$  com o intuito de diminuir o esforço computacional. No caso do modelo constante, conforme descrito por (Taieb et al., 2012), o  $e_{LOO}(k)$  para a estimativa  $y_q(k)$  do ponto de consulta q é calculado da seguinte maneira:

$$e_{LOO}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} (e_j(k))^2,$$
 (3.3)

onde o  $e_j(k)$  representa o erro obtido pela anulação do vizinho j do ponto de consulta  $x_q(j \in 1, ..., k)$ . Se a saída do k-ésimo vizinho mais próximo de  $x_q$  for  $y_{[1]}, ..., y_{[k]}$  então,  $e_j(k)$  é definido como:

$$e_{j}(k) = y_{[j]} - \frac{\sum_{i=1(i\neq j)}^{k} y_{[i]}}{k-1}$$

$$= \frac{(k-1)y_{[j]} - \sum_{i=1(i\neq j)}^{k} y_{[i]}}{k-1}$$

$$= \frac{(k-1)y_{[j]} + y_{[j]} - y_{[j]} - \sum_{i=1(i\neq j)}^{k} y_{[i]}}{k-1}$$

$$= \frac{ky_{[j]} - \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}}{k-1}$$

$$= k\frac{y_{[j]} - y_{q}^{(k)}}{k-1}.$$
(3.4)

Percebe-se que se usar a equação 3.4, o processo será repetido k vezes, visto que o somatório é repetido para cada índice j. Portando usando-se a estatística PRESS, representada pela equação 3.5, evita-se um grande esforço computacional, pois o somatório é substituído pelo  $y_q^{(k)}$  calculado anteriormente. Isso demonstra que a estatística PRESS é um método eficiente para o erro LOO.

Após avaliar todos os cálculos dos modelos locais com diferentes números de vizinhos, a melhor estimativa é selecionada a partir da minimização do erro LOO. Finalmente a predição da saída do  $x_q$  é retornada.

#### Algoritmo de Aprendizagem preguiçoso - Múltiplas Saídas

Com a utilização de estratégias de múltiplas saídas, necessita-se de técnicas de modelagem de múltiplas saídas, onde a saída não é mais um escalar e sim um vetor. Conforme apresentado por Taieb et al. (2012), similar ao caso de uma única saída, são utilizados critérios parecidos com as técnicas de uma única saída para avaliar e comparar os modelos locais de diferentes números de vizinhos.

Esse processo para múltiplas saídas é representado pelo Algoritmo 1. A saída é um vetor de dimensão l (l será igual a H na estratégia MIMO ou igual a s na estratégia DIRMO)<sup>1</sup>. Similarmente ao algoritmo anterior, utiliza o erro LOO de validação cruzada como critério para estimar a capacidade de generalização do modelo, de modo que o erro LOO seja agregação dos erros obtidos em cada saída (linha 5). Diferentemente do algoritmo utilizado para uma única saída (por exemplo na estratégia Direta, onde tem-se uma única tarefa com diferentes sáida.), o mesmo número de vizinhos é selecionado para todas as saídas (como por exemplo na estratégia MIMO).

 $<sup>^1</sup>$  Apesar das variáveis H e s serem mencionadas nesta parte do texto, elas serão explicadas nas seções 3.5 e 3.5, páginas: 31 e 32.

```
Algorithm 1: Algoritmo de Aprendizagem preguiçoso - Múltiplas Saídas
```

```
Entrada: D = (x_i, y_i) \in (\Re^d x \Re^l) com i \in 1, ..., M

Entrada: x_q \in \Re^d ponto de consulta.

Entrada: Kmax, representa o máximo número de vizinhos.

Saída: \hat{y_q}, predição da saída (vetores) do ponto de consulta x_q.

1 Ordena o conjunto de vetores x_i de acordo com a distância x_q.

2 [j] representa o índice do jth vizinhos mais próximos de x_q.

for K \in [2, ..., Kmax] do
 y_q^k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_{[j]} 
 E_{LOO}(k) = \frac{1}{l} \sum_{h=l}^l e_{LOO}^l(K) \text{ onde } e_{LOO}^l(K) \text{ é definido pela equação (2.19).} 
end
 7 k^* = argmin_{k \in [2, ..., Kmax]} E_{LOO}(K). 
 8 \hat{y_q} = y_q^{k^*}. 
 9 \text{ retorna } \hat{y_q}.
```

#### Seleção do Modelo

Conforme descrito anteriormente, para cada ponto de consulta gera-se um conjunto de previsões  $y_q^{(2)}, y_q^{(3)}, ..., y_q^{(Kmax)}$ , cada uma das estimativas foram obtidas com diferentes números de vizinhos. Para cada uma dessas previsões, calculou-se o erro  $\{e_{LOO}(2), e_{LOO}(3), ..., e_{LOO}(Kmax)\}$ . A seleção do modelo é obtida com a melhor estimativa  $\hat{y}_q$  do ponto de consulta  $x_q$ . Assim pode-se dizer que consiste em comparar o conjunto de modelos e selecionar o melhor por meio dos testes de erro.

O Fluxograma 3.8 mostra os passos do algoritmo de aprendizagem preguiçoso.

## 3.3 Ordem do modelo

A escolha da ordem do modelo é de suma importância. Se uma ordem menor que a do sistema real for utilizada, o modelo não possuirá a complexidade estrutural necessária para reproduzir a dinâmica do sistema. E se a ordem do modelo for maior do que a necessária, a estimação de parâmetros será provavelmente mal condicionada (Lopes, 2008). Portanto a determinação da ordem do modelo é um dos critérios mais importantes na determinação da estrutura do modelo.

Na literatura técnica existem diversos critérios de informação para determinar a ordem do modelo, KIC (Kullback Information Criterion)(Seghouane et al., 2003), AIC (Akaike Information Criterion)(Akaike, 1973), BIC (Bayesian Information Criterion)(Schwarz, 1978), MDL (Minimum Description Length)(Rissanen, 1978), entre outros. Neste trabalho, utiliza-se o critério de informação de Bayes (BIC), um método consistente, pois

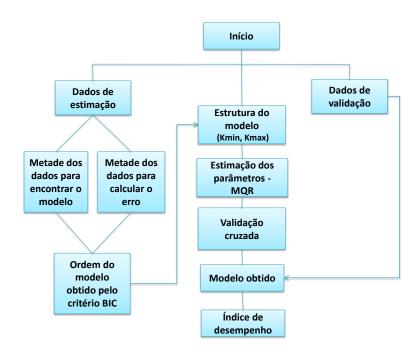


Figura 3.8: Fluxograma com passos de execução do algoritmo de aprendizagem preguiçoso.

tem capacidade de escolher o modelo com a ordem correta com probabilidade 1 quando o número de amostras tende ao infinito (Seghouane et al., 2003).

Quando têm-se um pequeno conjunto de dados, o ideal é utilizar o critério de Akaike, para um grande conjunto de dados recomenda-se o critério de informação de Bayes (Emiliano et al., 2010; Sobral e Barreto, 2011). Na verdade nenhum método é garantido que irá de fato funcionar bem, pois seu desempenho depende do número de parâmetros, tamanho de amostra, complexidade e tamanho dos dados, entre outros (Sobral e Barreto, 2011). Vale ressaltar que esses critérios geram um melhor modelo baseado no conjunto de modelos encontrado pelo mesmo, ou seja, se todos os modelos forem ruins eles só irão mostrar o menos pior. Portanto esses critérios devem auxiliar e não ser um único meio de escolha. É importante escolher o modelo com o menor número possível de parâmetros (princípio da parcimônia).

O critério de informação de Bayes (BIC) pode ser representado pela seguinte equação:

$$BIC(n_{\Theta}) = Nln[\sigma_{erro}^{2}(n_{\theta})] + n_{\theta}lnN, \tag{3.6}$$

onde N é o número de dados,  $\sigma_{erro}^2(n_{\theta})$  é a variância do erro de modelagem e  $n_{\theta}$  é o número de parâmetros do modelo. Por meio das Figuras 3.9 e 3.10, observa-se que o 'joelho' formado em ambos os gráficos mostram que o índice BIC passa por um mínimo que representa a melhor ordem do modelo. Portanto, a ordem do modelo tanto para a UHE Rosal quanto para UHE Três Marias escolhida é 3.

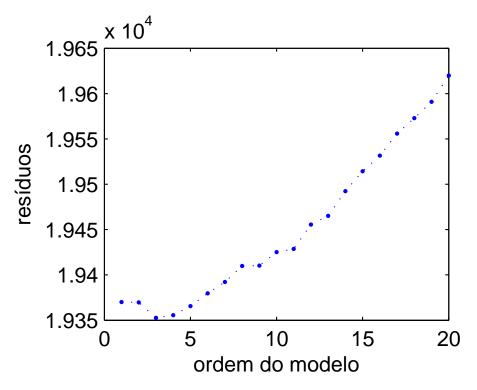


Figura 3.9: Critério de informação de Bayes para UHE Rosal

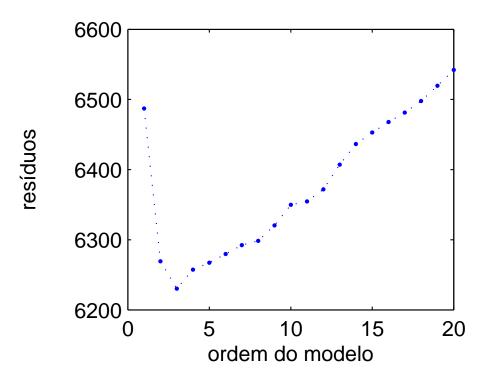


Figura 3.10: Critério de informação de Bayes para UHE Três Marias

## 3.4 Estimação de Parâmetros

Um dos métodos básicos utilizados para a estimação de parâmetros é o dos mínimos quadrados. Porém, esse método pode apresentar problemas de convergência quando ocorre

baixa persistência de excitação. Neste caso, para resolver este problema, utiliza-se o fator de regularização de Tikhonov (Leung et al., 1999), que será trado posteriormente com mais detalhes. Esta seção descreve o Mínimos Quadrados, ferramenta utilizada para estimação dos parâmetros dos modelos obtidos pelo ARX e Mínimos Quadrados Recursivo, utilizado para estimação dos parâmetros dos modelos obtidos pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso.

### O estimador de Mínimos Quadrados - MQ

Carl Friedrich Gauss, em 1809, publicou um artigo demonstrando que a melhor maneira de determinar um parâmetro desconhecido de uma equação é minimizando a soma dos quadrados dos resíduos, mais tarde chamado de Mínimos Quadrados. Para melhor descrevê-lo utiliza-se o método descrito por Aguirre (2007) em seu livro.

Considere o seguinte modelo

$$y = x^T \Theta + e \tag{3.7}$$

onde  $\Theta$  é o vetor de parâmetros, y a variável dependente, x o vetor de variáveis independentes e e representa o erro (incertezas, etc.). Ao representar o resultado de forma matricial como uma equação de regressão onde  $\xi$  são os resíduos, pode-se reescrever a equação anterior como:

$$y = X\hat{\Theta} + \xi \tag{3.8}$$

A solução dos mínimos quadrados é alcançada através da minimização dos erros, portanto o somatório do quadrado dos erros é representado pela equação 3.9:

$$J_{MQ} = \sum_{i=1}^{N} \xi(i)^2 = \xi^T \xi = \|\xi\|^2$$
(3.9)

Ao substituir  $\xi$  na equação 3.9:

$$J_{MQ} = (y - X\hat{\Theta})^T (y - X\hat{\Theta})$$

$$= y^T y - y^T X \hat{\Theta} - \hat{\Theta}^T X^T y + \hat{\Theta}^T X^T \hat{\Theta}.$$
(3.10)

Para a minimização da função custo  $J_{MQ}$ , resolve a derivada parcial  $(\partial J_{MQ}/\partial \hat{\Theta}) = 0$ .

$$\frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\Theta}} = -(y^T X)^T - X^T y + (X^T X + X^T X) \hat{\Theta} 
= -X^T y - X^t y + 2X^T X \hat{\Theta}$$
(3.11)

Logo,

$$\hat{\Theta} = [X^T X]^{-1} X^T y \tag{3.12}$$

Para que  $\hat{\Theta}$  seja mínimo, é necessário que

$$\frac{\partial^2 J_{MQ}}{\partial \hat{\Theta}^2} = 2X^T X > 0. \tag{3.13}$$

Ou seja, a equação seguinte é a estimação de  $\hat{\Theta}$  por meio dos mínimos quadrados (MQ).

$$\hat{\Theta}_{MQ} = arg_{\Theta}minJ_{MQ} 
= [X^TX]^{-1}X^Ty$$
(3.14)

## Mínimos Quadrados Recursivo -MQR

Estimação recursiva é uma técnica que processa os dados medidos de um determinado sistema de forma sequencial, fornecendo novas estimativas para as variáveis desejadas a cada iteração do algoritmo. O método dos Mínimos Quadrados Recursivo é comumente utilizado em aplicações online em sistemas com parâmetros constantes e desconhecidos (Maitelli e Yoneyama, 2002). A seguir deriva-se o estimador MQ recursivo baseado em (Aguirre, 2007).

Dada a equação de regressão  $y(k) = \psi^T(k-1)\hat{\Theta} + \xi(k)$ , com a seguinte sequência de dados: onde y(k) é a variável dependente e  $\psi(k-1)$  o vetor de regressores para k=1,... estima-se  $\hat{\Theta}$  de forma recursiva por meio das seguintes equações:

$$\hat{\Theta}_{MQk} = \left[ \sum_{i=1}^{k} \psi(i-1)\psi^{T}(i-1) \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{k} \psi(i-1)y(i) \right]$$
(3.15)

$$P_k = \left[\sum_{i=1}^k \psi(i-1)\psi^T(i-1)\right]^{-1}, \tag{3.16}$$

$$P_k^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{k=1} \psi(i-1)\psi^T(i-1)\right] + \psi(i-1)\psi^T(i-1)$$
 (3.17)

$$= P_{k-1}^{-1} + \psi(i-1)\psi^{T}(i-1), \tag{3.18}$$

onde  $P_k$  é a matriz de covariância. O estimador 3.15 pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\hat{\Theta}_k = P_k \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \psi(i-1)y(i) + \psi(k-1)y(k) \right]$$
(3.19)

Para o instante k-1, tem-se:

$$\left[\sum_{i=1}^{k-1} \psi(i-1)\psi^{T}(i-1)\right] \hat{\Theta}_{k-1} = \left[\sum_{i=1}^{k-1} \psi(i-1)y(i)\right], \tag{3.20}$$

Para melhor visualização substitui-se o lado esquerdo da equação por  $P_{k-1}^{-1}\hat{\Theta}_{k-1}$ 

$$\hat{\Theta}_{k} = P_{k} \left[ P_{k-1}^{-1} \hat{\Theta}_{k-1} + \psi(k-1)y(k) \right] 
= P_{k} \left[ (P_{k}^{-1} - \psi(k-1)\psi^{T}(k-1))\hat{\Theta}_{k-1} + \psi(k-1)y(k) \right] 
= \hat{\Theta}_{k-1} - P_{k}\psi(k-1)\psi^{T}(k-1)\hat{\Theta}_{k-1} + P_{k}\psi(k-1)y(k) 
= \hat{\Theta}_{k-1} + P_{k}\psi(k-1) \left[ y(k) - \psi^{T}(k-1)\hat{\Theta}_{k-1} \right] 
= \hat{\Theta}_{k-1} + K_{k}\eta(k),$$
(3.21)

onde  $K_k = P_k \psi(k-1)$  representa a matriz de ganho e  $\eta(k) = y(k) - \psi^T(k-1)\hat{\Theta}_{k-1}$  é a inovação no instante k. Por ser inviável calcular a inversão da matriz  $P_k$  a cada iteração do algoritmo, utiliza-se assim a seguinte equação:

$$P_k = P_{k-1} - P_{k-1}\psi(k-1)(\psi^T(k-1)P_{k-1}\psi(k-1) + 1)^{-1}\psi^T(k-1)P_{k-1}, \quad (3.22)$$

assim pode-se reescrever  $K_k$  da seguinte forma:

$$K_{k} = P_{k-1}\psi(k-1) - \frac{P_{k-1}\psi(k-1)\psi^{T}(k-1)P_{k-1}\psi(k-1)}{\psi^{T}(k-1)P_{k-1}\psi(k-1) + 1}$$

$$= \frac{P_{k-1}\psi(k-1)}{\psi^{T}(k-1)P_{k-1}\psi(k-1) + 1}.$$
(3.23)

Portanto o Estimador de Mínimos Quadrados Recursivo pode ser representado pelas sequintes equações:

$$K_k = \frac{P_{k-1}\psi_k}{\psi_k^T P_{k-1}\psi_k + 1}; (3.24)$$

$$\hat{\Theta}_k = \hat{\Theta}_{k-1} + K_k[y(k) - \psi_k^T \hat{\Theta}_{k-1}];$$
 (3.25)

$$P_k = P_{k-1} - K_k \psi_k^T P_{k-1}. (3.26)$$

## Regularização de Tikhonov

Como os dados de entrada utilizados na pesquisa são referentes à precipitação de chuva diária, e a mesma é concentrada em determinadas épocas do ano, esses dados possuem

vários valores iguais a zero e portanto assim a matriz de covariância utilizada para calcular os parâmetros por meio dos MQR (Seção 3.4) para o algoritmo de aprendizagem preguiçoso é mal condicionada. Para resolver esse problema opta-se pela regularização de Tikhonov. A regularização foi utilizada na bacia hidrográfica de Rosal na função quadrática nas estratégias Recursiva e DirRec e, na bacia de Três Marias em todas as estratégias.

Com base no artigo Leung et al. (1999) utiliza-se neste trabalho, o fator de regularização de Tikhonov sem o fator de esquecimento pois o LL, para cada amostra, descarta o modelo anterior e utiliza um número limitado de amostras.

## 3.5 Tipos de Estratégias de Previsão

Apesar de autores como Box et al. (2008) apresentarem diversas ferramentas para modelagem e análise de séries temporais, além de métodos para construção, classificação, testes e análise de modelos estocásticos e consequentemente métodos para predição. Vê-se, na literatura especializada, crescente necessidade de estudos sobre os tipos de estratégias possíveis de se aplicadar em predição a longo prazo de séries temporais (Taieb et al., 2012). Nesta Seção serão apresentadas 5 tipos de estratégias disponíveis na literatura: Recursiva, Direta, DirRec, MIMO e DIRMO.

#### Recursiva

A estratégia Recursiva, também conhecida como Iterada, pode ser considerada como a estratégia mais antiga e intuitiva conforme relatado por (Haibin et al., 2006; Sorjamaa et al., 2007). Nela um único modelo (f) é treinado para executar predição de um passo à frente. Sorjamaa e Lendasse (2006) explicam, em seu trabalho, que o mesmo modelo é utilizado para as próximas predições, sendo que a predição anterior passa a ser entrada do passo seguinte e assim sucessivamente de forma que a predição de um passo à frente é aplicada muitas vezes, de forma recursiva. A estratégia Recursiva para três passos à frente pode ser exemplificada pelas seguintes equações:

$$\hat{y}(t+1) = f(y(t), y(t-1), y(t-2), y(t-3))$$

$$\hat{y}(t+2) = f(\hat{y}(t+1), y(t), y(t-1), y(t-2))$$

$$\hat{y}(t+3) = f(\hat{y}(t+2), \hat{y}(t+1), y(t), y(t-1))$$
(3.27)

A grande desvantagem é que a estratégia Recursiva é sensível à acumulação de erros com o horizonte de previsão (Taieb et al., 2012). Para uma melhor visualização desta estratégia um exemplo com predição de 8 passos à frente é fornecido:

Dado o modelo,

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-3)$$
(3.28)

e o vetor de entrada y sendo,

$$y = [y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad y(3) \quad y(4) \quad y(5) \quad y(6) \quad y(7) \quad y(8) \quad y(9) \quad y(10)]$$
 (3.29)

Pode-se, então, estimar 8 passos à frente da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(3) \\ \hat{y}(4) \\ \hat{y}(5) \\ \hat{y}(6) \\ \hat{y}(7) \\ \hat{y}(8) \\ \hat{y}(9) \\ \hat{y}(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) \\ \hat{y}(3) & y(2) & y(1) \\ \hat{y}(4) & \hat{y}(3) & y(2) \\ \hat{y}(5) & \hat{y}(4) & \hat{y}(3) \\ \hat{y}(6) & \hat{y}(5) & \hat{y}(4) \\ \hat{y}(7) & \hat{y}(6) & \hat{y}(5) \\ \hat{y}(8) & \hat{y}(7) & \hat{y}(6) \\ \hat{y}(9) & \hat{y}(8) & \hat{y}(7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

### Estratégia Direta

Diferentemente da estratégia Recursiva, a estratégia Direta não utiliza recursão no cálculo das predições, impedindo assim a acumulação de erros introduzidos na primeira. A estratégia Direta utiliza diferentes modelos para cada passo de predição, mas sempre tendo como entrada os dados reais medidos (Sorjamaa e Lendasse, 2006). A estratégia Direta pode ser descrita por:

$$\hat{y}(t+1) = f_1(y(t), y(t-1), y(t-2), y(t-3))$$

$$\hat{y}(t+2) = f_2(y(t), y(t-1), y(t-2), y(t-3))$$

$$\hat{y}(t+3) = f_3(y(t), y(t-1), y(t-2), y(t-3))$$
(3.30)

Como descrito em Sorjamaa e Lendasse (2006), nota-se que a cada passo de tempo um modelo é incorporado com entradas e estruturas próprias. Em princípio acredita-se que o aumento de complexidade, devido ao número de modelos a serem identificados, que depende do número de passos de predição desejado, pode ser compensado pela ausência de erro acumulativo.

Um exemplo de predição de 3 passos à frente utilizando esta estratégia é mostrado: Considere y o vetor de entrada, representado pela equação a seguir:

$$y = [y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad y(3) \quad y(4) \quad y(5) \quad y(6) \quad y(7) \quad y(8) \quad y(9) \quad y(10)]$$
 (3.31)

A) predição de 1 passo à frente:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-3)$$
(3.32)

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(3) \\ \hat{y}(4) \\ \hat{y}(5) \\ \hat{y}(6) \\ \hat{y}(7) \\ \hat{y}(8) \\ \hat{y}(9) \\ \hat{y}(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) \\ y(3) & y(2) & y(1) \\ y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ y(6) & y(5) & y(4) \\ y(7) & y(6) & y(5) \\ y(8) & y(7) & y(6) \\ y(9) & y(8) & y(7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

B) Predição de 2 passos à frente:

$$y(k) = b_1 y(k-1) + b_2 y(k-2) + b_3 y(k-3)$$
(3.33)

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(4) \\ \hat{y}(5) \\ \hat{y}(6) \\ \hat{y}(7) \\ \hat{y}(8) \\ \hat{y}(9) \\ \hat{y}(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) \\ y(3) & y(2) & y(1) \\ y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ y(6) & y(5) & y(4) \\ y(7) & y(6) & y(5) \\ y(8) & y(7) & y(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

C) Predição de 3 passos à frente:

$$y(k) = c_1 y(k-1) + c_2 y(k-2) + c_3 y(k-3)$$
(3.34)

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(5) \\ \hat{y}(6) \\ \hat{y}(7) \\ \hat{y}(8) \\ \hat{y}(9) \\ \hat{y}(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) \\ y(3) & y(2) & y(1) \\ y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ y(6) & y(5) & y(4) \\ y(7) & y(6) & y(5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Note que o conjunto de parâmetros é diferente em cada interação.

## Estratégia DirRec

Esta estratégia pode ser entendida como a junção da Recursiva e da Direta, combinando os melhores aspectos de ambas. A DirRec utiliza um modelo diferente para cada passo,

similar a Direta, e atualiza o conjunto das variáveis de entrada com os valores das predições anteriores, como na Recursiva. Ela pode ser escrita pelas seguintes equações:

$$\hat{y}(t+1) = f_1(y(t), y(t-1), y(t-2), y(t-3))$$

$$\hat{y}(t+2) = f_2(\hat{y}(t+1), y(t), y(t-1), y(t-2), y(t-3))$$

$$\hat{y}(t+3) = f_3(\hat{y}(t+2), \hat{y}(t+1), y(t), y(t-1), y(t-2), y(t-3))$$
(3.35)

Abaixo é descrita a predição utilizando-se a estratégia DirRec para 3 passos à frente, considerando y um vetor de entrada descrito na seguinte equação:

$$y = [y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad y(3) \quad y(4) \quad y(5) \quad y(6) \quad y(7) \quad y(8) \quad y(9) \quad y(10)]$$
 (3.36)

Têm-se:

A) Predição de 1 passo à frente:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-3)$$
(3.37)

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(3) \\ \hat{y}(4) \\ \hat{y}(5) \\ \hat{y}(6) \\ \hat{y}(7) \\ \hat{y}(8) \\ \hat{y}(9) \\ \hat{y}(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) \\ y(3) & y(2) & y(1) \\ y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ y(6) & y(5) & y(4) \\ y(7) & y(6) & y(5) \\ y(8) & y(7) & y(6) \\ y(9) & y(8) & y(7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

B) Predição de 2 passos à frente:

$$y(k) = b_1 y(k-1) + b_2 y(k-2) + b_3 y(k-3) + b_4 y(k-4)$$
(3.38)

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(4) \\ \hat{y}(5) \\ \hat{y}(6) \\ \hat{y}(7) \\ \hat{y}(8) \\ \hat{y}(9) \\ \hat{y}(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}(3) & y(2) & y(1) & y(0) \\ \hat{y}(4) & y(3) & y(2) & y(1) \\ \hat{y}(5) & y(4) & y(3) & y(2) \\ \hat{y}(6) & y(5) & y(4) & y(3) \\ \hat{y}(7) & y(6) & y(5) & y(4) \\ \hat{y}(8) & y(7) & y(6) & y(5) \\ \hat{y}(9) & y(8) & y(7) & y(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

C) Predição de 3 passos à frente:

$$y(k) = c_1 y(k-1) + c_2 y(k-2) + c_3 y(k-3) + c_4 y(k-4) + c_5 y(k-5)$$
(3.39)

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(5) \\ \hat{y}(6) \\ \hat{y}(7) \\ \hat{y}(8) \\ \hat{y}(9) \\ \hat{y}(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}(4) & \hat{y}(3) & y(2) & y(1) & y(0) \\ \hat{y}(5) & \hat{y}(4) & y(3) & y(2) & y(1) \\ \hat{y}(6) & \hat{y}(5) & y(4) & y(3) & y(2) \\ \hat{y}(7) & \hat{y}(6) & y(5) & y(4) & y(3) \\ \hat{y}(8) & \hat{y}(7) & y(6) & y(5) & y(4) \\ \hat{y}(9) & \hat{y}(8) & y(7) & y(6) & y(5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

### Estratégia MIMO

A estratégia MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas) foi introduzida por (Bontempi, 2008) e (Bontempi e Taieb, 2011) em seus trabalhos. A estratégia MIMO é diferente das anteriores devido a sua capacidade de múltiplas saídas. Na estratégia MIMO apenas um único modelo (f) de múltiplas entradas e múltiplas saídas é identificado. A estratégia surgiu com o intuito de evitar a modelagem com uma única saída na qual se faz necessário saber a dependência com valores ainda não conhecidos. Desse modo acredita-se que há diminuição ou mesmo eliminação das dependências estocásticas entre valores futuros.

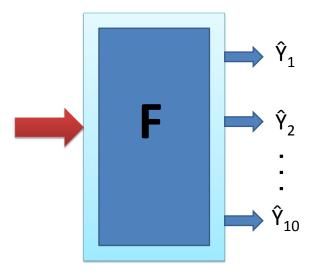


Figura 3.11: Diagrama da estratégia MIMO

A estratégia MIMO pode ser representada pela Figura 3.11 e pela equação abaixo:

$$[\hat{y}(t+H), ..., \hat{y}(t+1)] = \hat{f}(y(t), ..., y(t-d+1))$$
(3.40)

onde H é o horizonte de predição e d o atraso máximo do modelo escolhido. Esta estratégia evita a independência condicional, suposição feita pela estratégia direta, bem como a acumulação de erros como na recursiva (Bontempi e Taieb, 2011). Segundo os autores, ela tem sido aplicada com sucesso em problemas de predição de séries reais. A necessidade de preservar as dependências estocásticas usando um único modelo tem sua desvantagem, uma vez que restringe todos os horizontes a serem previstos com uma mesma estrutura de modelo. Essa desvantagem é a principal motivação para o surgimento de uma nova estratégia: DIRMO. Antes de apresentá-la têm-se, logo abaixo, um exemplo para predição de 8 passo à frente, considerendo y o vetor de entrada, representado pela seguinte equação:

$$y = [y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad y(3) \quad y(4) \quad y(5) \quad y(6) \quad y(7) \quad y(8) \quad y(9) \quad y(10)]$$
 (3.41)

A predição de 7 passos à frente é feita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(3) & \hat{y}_2(3) & \hat{y}_3(3) & \hat{y}_4(3) & \hat{y}_5(3) & \hat{y}_6(3) & \hat{y}_7(3) \\ \hat{y}_1(4) & \hat{y}_2(4) & \hat{y}_3(4) & \hat{y}_4(4) & \hat{y}_5(4) & \hat{y}_6(4) & \hat{y}_7(4) \\ \hat{y}_1(5) & \hat{y}_2(5) & \hat{y}_3(5) & \hat{y}_4(5) & \hat{y}_5(5) & \hat{y}_6(5) & \hat{y}_7(5) \\ \hat{y}_1(6) & \hat{y}_2(6) & \hat{y}_3(6) & \hat{y}_4(6) & \hat{y}_5(6) & \hat{y}_6(6) & \hat{y}_7(6) \\ \hat{y}_1(7) & \hat{y}_2(7) & \hat{y}_3(7) & \hat{y}_4(7) & \hat{y}_5(7) & \hat{y}_6(7) & \hat{y}_7(7) \\ \hat{y}_1(8) & \hat{y}_2(8) & \hat{y}_3(8) & \hat{y}_4(8) & \hat{y}_5(8) & \hat{y}_6(8) & \hat{y}_7(8) \\ \hat{y}_1(9) & \hat{y}_2(9) & \hat{y}_3(9) & \hat{y}_4(9) & \hat{y}_5(9) & \hat{y}_6(9) & \hat{y}_7(9) \\ \hat{y}_1(10) & \hat{y}_2(10) & \hat{y}_3(10) & \hat{y}_4(10) & \hat{y}_5(10) & \hat{y}_6(10) & \hat{y}_7(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) \\ y(3) & y(2) & y(1) \\ y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ y(6) & y(5) & y(4) \\ y(7) & y(6) & y(5) \\ y(8) & y(7) & y(6) \\ y(9) & y(8) & y(7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 & a_1^6 & a_1^7 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 & a_2^6 & a_2^7 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 & a_3^6 & a_3^7 \end{bmatrix}$$

## Estratégia DIRMO

Esta estratégia visa preservar os aspectos mais atraentes das estratégias Direta e MIMO. Tomando uma abordagem intermediária, DIRMO prevê o horizonte H em blocos, onde cada bloco é previsto de forma MIMO. Assim a tarefa de previsão de H passos à frente é decomposta em n previsões de múltiplas saídas (n = H/s) e cada saída de tamanho s (Taieb et al., 2009). Sendo N o número de observações e p o número de modelos.

$$[y(t+p*s),...,y(t+(p-1)*s+1)] = f_p(y(t),...,y(t-d+1))$$
(3.42)

onde  $t \in d, ..., N-H, p \in 1, ..., n \in f_p : \Re^d \to \Re^s$  se s > 1

As H previsões são retornadas pelos n modelos de aprendizagem conforme:

$$[\hat{y}(t+p*s),...,\hat{y}(t+(p-1)*s+1)] = \hat{f}_p(y(N),...,y(N-d+1))$$
(3.43)

Conforme explicado pelos autores, quando o valor de s é 1, a quantidade de previsões n é igual a H, correspondendo a estratégia Direta (Figura 3.12). E quando o valor de s é H,

o número de previsões n é equivalente a 1, correspondendo a estratégia MIMO (Figura 3.14). Entre os dois extremos, tem-se uma configuração intermediária dependendo do valor de s (Figura 3.13).

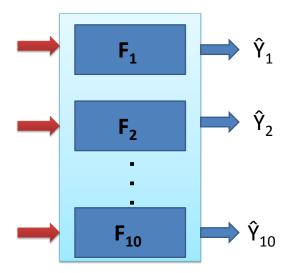


Figura 3.12: Diagrama da estratégia DIRMO, H=10 e s=1, portanto n=10 (DIRMO=Direta).

Um exemplo utilizando a estratégia DIRMO para predição de 10 passos à frente em várias janelas é mostrado abaixo.

Considere y o vetor de entrada, representado pela seguinte equação:

$$y = [y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad y(3) \quad y(4) \quad y(5) \quad y(6) \quad y(7) \quad y(8) \quad y(9) \quad y(10)]$$
 (3.44)

A predição de 8 passos à frente em janelas são:

#### A) Janela de 2 passos

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{1}(3) & \hat{y}_{2}(3) \\ \hat{y}_{1}(4) & \hat{y}_{2}(4) \\ \hat{y}_{1}(5) & \hat{y}_{2}(5) \\ \hat{y}_{1}(6) & \hat{y}_{2}(6) \\ \hat{y}_{1}(7) & \hat{y}_{2}(7) \\ \hat{y}_{1}(8) & \hat{y}_{2}(8) \\ \hat{y}_{1}(9) & \hat{y}_{2}(9) \\ \hat{y}_{1}(10) & \hat{y}_{2}(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) \\ y(3) & y(2) & y(1) \\ y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ y(6) & y(5) & y(4) \\ y(7) & y(6) & y(5) \\ y(8) & y(7) & y(6) \\ y(9) & y(8) & y(7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1}^{1} & a_{1}^{2} \\ a_{2}^{1} & a_{2}^{2} \\ a_{3}^{1} & a_{3}^{2} \end{bmatrix}$$

### B) Janela de 4 Passos

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(3) & \hat{y}_2(3) & \hat{y}_3(3) & \hat{y}_4(3) \\ \hat{y}_1(4) & \hat{y}_2(4) & \hat{y}_3(4) & \hat{y}_4(4) \\ \hat{y}_1(5) & \hat{y}_2(5) & \hat{y}_3(5) & \hat{y}_4(5) \\ \hat{y}_1(6) & \hat{y}_2(6) & \hat{y}_3(6) & \hat{y}_4(6) \\ \hat{y}_1(7) & \hat{y}_2(7) & \hat{y}_3(7) & \hat{y}_4(7) \\ \hat{y}_1(8) & \hat{y}_2(8) & \hat{y}_3(8) & \hat{y}_4(8) \\ \hat{y}_1(9) & \hat{y}_2(9) & \hat{y}_3(9) & \hat{y}_4(9) \\ \hat{y}_1(10) & \hat{y}_2(10) & \hat{y}_3(10) & \hat{y}_4(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) \\ y(3) & y(2) & y(1) \\ y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ y(6) & y(5) & y(4) \\ y(7) & y(6) & y(5) \\ y(8) & y(7) & y(6) \\ y(9) & y(8) & y(7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_1^3 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \end{bmatrix}$$

### C) Janela de 8 passos

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(3) & \hat{y}_2(3) & \hat{y}_3(3) & \hat{y}_4(3) & \hat{y}_5(3) & \hat{y}_6(3) & \hat{y}_7(3) \\ \hat{y}_1(4) & \hat{y}_2(4) & \hat{y}_3(4) & \hat{y}_4(4) & \hat{y}_5(4) & \hat{y}_6(4) & \hat{y}_7(4) \\ \hat{y}_1(5) & \hat{y}_2(5) & \hat{y}_3(5) & \hat{y}_4(5) & \hat{y}_5(5) & \hat{y}_6(5) & \hat{y}_7(5) \\ \hat{y}_1(6) & \hat{y}_2(6) & \hat{y}_3(6) & \hat{y}_4(6) & \hat{y}_5(6) & \hat{y}_6(6) & \hat{y}_7(6) \\ \hat{y}_1(7) & \hat{y}_2(7) & \hat{y}_3(7) & \hat{y}_4(7) & \hat{y}_5(7) & \hat{y}_6(7) & \hat{y}_7(7) \\ \hat{y}_1(8) & \hat{y}_2(8) & \hat{y}_3(8) & \hat{y}_4(8) & \hat{y}_5(8) & \hat{y}_6(8) & \hat{y}_7(8) \\ \hat{y}_1(9) & \hat{y}_2(9) & \hat{y}_3(9) & \hat{y}_4(9) & \hat{y}_5(9) & \hat{y}_6(9) & \hat{y}_7(9) \\ \hat{y}_1(10) & \hat{y}_2(10) & \hat{y}_3(10) & \hat{y}_4(10) & \hat{y}_5(10) & \hat{y}_6(10) & \hat{y}_7(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) \\ y(3) & y(2) & y(1) \\ y(3) & y(2) & y(1) \\ y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ y(6) & y(5) & y(4) \\ y(7) & y(6) & y(5) \\ y(8) & y(7) & y(6) \\ y(9) & y(8) & y(7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 & a_1^6 & a_1^7 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 & a_2^6 & a_2^7 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 & a_3^6 & a_3^7 \end{bmatrix}$$

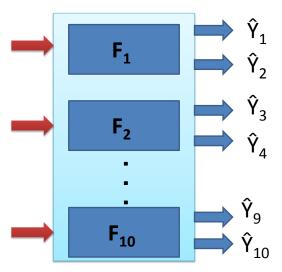


Figura 3.13: Diagrama da estratégia DIRMO, H=10 e s=2, portanto n=5 (configuração intermediária).

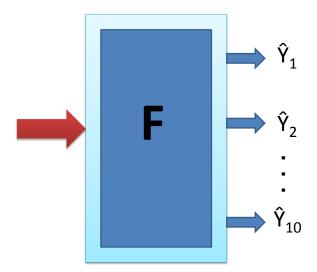


Figura 3.14: Diagrama da estratégia DIRMO, H=10 e s=10, portanto n=1 (DIRMO=MIMO).

## Análise Comparativa

Na Figura 3.15, conforme demonstrado em Taieb et al. (2012), vê-se que a estratégia DirRec é a junção da Direta com a Recursiva e a estratégia DIRMO é a junção da Direta com a MIMO. Dependendo da estratégia utilizada um ou vários modelos serão necessários. A Tabela 3.3 mostra uma comparação entre as 5 estratégias mencionadas anteriormente, suas vantagens e desvantagens e esforço computacional.

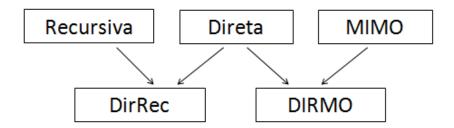


Figura 3.15: Relação entre as cinco estratégias de previsão

ESTRATÉGIAS	VANTAGENS	DESVANTAGENS	TEMPO COMPUTACIONAL
Recursiva	Não há presença de ruidos	Sensibilidade a acu- mulação de erros de estimativa, uma vez que os valores esti- mados são cada vez mais usados quando se aproxima mais do fu- turo.	+
Direta	Não há acumulação de erros pois não usa va- lores aproximados	Maior complexidade funcional a fim de mo- delar a dependência estocástica.	++++
DirRec	Combina os melhores aspectos da estratégia Recursiva e Direta.	O conjunto de entrada cresce linearmente com H.	++++
MIMO	Evita a independência condicional entre os valores futuros e a acumulação de erros, treinando um único modelo de produção múltipla.	Reduz a flexibilidade: mesma estrutura de modelos para todos os horizontes.	++
DIRMO	Trade-off entre a preservação da dependência estocástica e valores futuros, tendo uma maior flexibilidade do preditor.	Possui um parâmetro de estimação adicio- nal.	+++

Tabela 3.3: Tabela comparativa, mostra os aspectos positivos e negativos das 5 estratégias, onde a quantidade do sinal + representa o tempo computacional gasto para cada estratégica. Tabela adaptada de Taieb et al. (2012)

# 3.6 Índices de Desempenho

No proceso de identificação, a validação do modelo é a última parte a ser realizada, nela verifica se o modelo comporta de maneira suficientemente satisfatória com relação aos dados de estudo. As métricas utilizadas hoje para avaliar a qualidade das previsões de vazão são baseadas no erro entre a série simulada e a observada, e independentemente da medida utilizada sempre se compara esses valores ponderando essas diferenças de forma particular. Normalmente, os melhores modelos são considerados para menores valores de erro, mas isso não quer dizer que uma boa predição para um determinado usuário é considerada verdadeira para outros.

Existem diversos índices de desempenho que são utilizados para quantificar a quali-

dade para predição de séries temporais (a qualidade do ajuste do modelo obtido a partir dos dados reais). Neste trabalho serão utilizados alguns índices listados em (Zambrano-Bigiarini, 2010).

## Erro Absoluto Médio (MAE)

O MAE faz o cálculo do erro absoluto médio entre as séries simulada (S) e observada (O) a partir da equação:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} | (S_i - O_i) |$$
 (3.45)

onde N é o tamanho da amostra de dados disponíveis.

## Erro Quadrático Médio (MSE)

O MSE faz o cálculo do erro quadrático médio entre as séries simulada e observada por meio da seguinte equação:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (S_i - O_i)^2$$
 (3.46)

## Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio (RMSE)

O RMSE extrai a raiz quadrada do erro quadrático médio e pode ser representado conforme a equação abaixo:

$$RMSE = \sqrt[2]{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (S_i - O_i)^2}$$
 (3.47)

## Percent Bias (PBIAS)

O índice PBIAS mede a tendência média da vazão simulada em relação à vazão observada, podendo ser maior ou menor que esta. O valor ideal para este índice é 0; um valor positivo indica uma tendência subestimada (Yapo, Gupta e Sorooshian, 1996). O valor retornado em percentual é dado por:

$$PBIAS = 100 \frac{\sum_{i=1}^{N} (S_i - O_i)}{\sum_{i=1}^{N} (O_i)}$$
(3.48)

## RMSE - observations standard deviation (RSR)

O RSR normaliza o índice RMSE utilizando o desvio padrão da série observada. Seu valor poderá variar de 0 a  $\infty$ , isso indica que as séries observada e simulada, são iguais. Quanto menor o valor de RSR menor será o RMSE e melhor será o modelo ajustado. O índice RSR é calculado a partir da relação entre o RMSE e o desvio padrão da série observada, como apresentado na equação abaixo:

$$RSR = 100 \frac{\sqrt[2]{\sum_{i=1}^{N} (S_i - O_i)^2}}{\sqrt[2]{\sum_{i=1}^{N} (O_i - \bar{O})^2}}$$
(3.49)

onde  $\bar{O}$  barra representa a média de O.

## Eficiência de Nash-Sutcliffe (NSE)

O NSE corresponde a uma estatística normalizada da variância do resíduo comparado com a variância dos dados observados. NSE=1 corresponde a uma aproximação perfeita dos dados observados, 1>NSE>0 indica que a aproximação do modelo é melhor do que a média dos dados abservados e NSE<0 indica que a média dos dados observados é um preditor melhor do que o modelo ajustado. A equação 3.50 que representa esse índice é mostrada abaixo:

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} (S_i - O_i)^2}{\sum_{i=1}^{N} (O_i - \bar{O})^2}$$
(3.50)

## Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE)

O índice MAPE fornece uma medida da acurácia do modelo ajustado. Quanto mais próximo de zero melhor é o modelo. Segue abaixo a equação 3.51 que representa o índice:

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{o_i - S_i}{o_i} \right| X100$$
 (3.51)

Os índices descritos acima são utilizados nos Capítulos 4 e 5 para mensurar o desempenho dos modelos obtidos.

# 4 Estudo de Caso 1

Este capítulo apresenta os resultados e discussões da UHE Rosal. Na Seção 4.1 os resultados são apresentados e discutidos de forma a se definir qual algoritmo aliado a melhor estratégia obteve o melhor desempenho. Inicialmente retrata os resultados parciais em cada algoritmo para cada tipo de estratégia e posteriormente a melhor estratégia para aquele determinado algoritmo.

## 4.1 Resultados e Discussões - UHE Rosal

Para uma melhor compreensão dos resultados obtidos é importante relembrar alguns pontos apresentados nos capítulos anteriores. Por se tratar de modelagem hidrológica, os modelos utilizados podem ser classificados como modelos de comportamento, conforme descrito no Capítulo 2. As séries hidrológicas utilizadas são de precipitação e vazão, sendo entrada e saída respectivamente. Metade da série foi utilizada para identificação, e a outra metade para validação; ver Seção 3.1.

Os modelos foram obtidos pela modelagem ARX e pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso (maiores detalhes na Seção 3.2). Baseado no critério de Bayes, Seção 3.3, a ordem dos modelos utilizados foi 3 (Figura 3.9). Para a estimação dos parâmetros aplicou-se os mínimos quadrados para o ARX e os mínimos quadrados recursivo para o algoritmo de aprendizagem preguiçoso.

É importante dizer que no LL, para a função quadrática (especificamente nas estratégias Recursiva e DirRec), aplica-se a regularização de Tikhonov, detalhes na Seção 3.4. Na validação, aplicam-se os 5 tipos de estratégias mencionados na Seção 3.5. Para isso, são utilizadas 7 métricas (Seção 3.6) que quantificam os resultados na predição de até 10 passos à frente. Os resultados foram dispostos em forma de tabela nos quais se comparam os índices de desempenho para cada passo. As mesmas estão disponibilizadas no Apêndice A.

## Algoritmo de aprendizagem preguiçoso

Ao utilizar o algoritmo de aprendizagem preguiçoso, para comparação dos resultados, simula-se as quatro funções matemáticas disponíveis no toolbox: função constante, linear, quadrática e a constante-linear-quadrática (clq). O número de vizinhos foi escolhido pelo método de tentativa e erro, sendo que para esta bacia utilizou-se o mínimo número de vizinhos igual 70 e o máximo igual a 200. Para a estratégia MIMO e DIRMO desenvolveu-se um código para caso multivariável, baseado no trabalho de Taieb et al. (2012), pois o toolbox disponível serve somente para uma única saída.

A escolha do número de vizinhos é arbitrária, por isso o próprio algoritmo utiliza um número variável para cada ponto, de modo que escolhe o "melhor" modelo de acordo com o número de pontos, ou seja, compara o conjunto de modelo obtidos e seleciona o melhor por meio dos testes de erro (detalhes na Seção 3.2). Se esse número for grande, poderá levar em consideração dados que não deveriam, mas neste caso, como a série temporal é longa (quase 7000 pontos para estimação), a quantidade de dados disponíveis possibilita a escolha de um número maior de vizinhos. Se escolher um número pequeno de vizinhos é o mesmo que utilizar pouca informação para a obtenção do modelo e dar muito peso a informação daqueles poucos vizinhos, o modelo filtrará menos o ruído das medições.

No primeiro momento descreve-se qual a melhor função para cada estratégia e posteriormente qual a melhor estratégia ao se utilizar o algoritmo de aprendizagem preguiçoso.

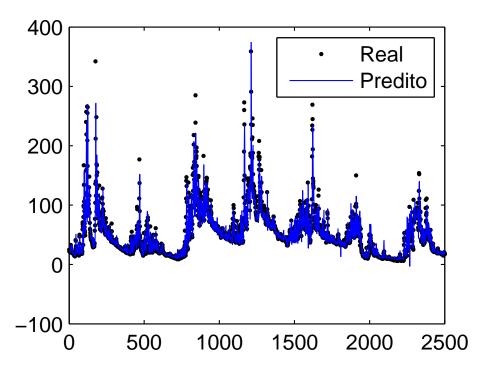


Figura 4.1: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia Direta e Função Linear - 2 passos à frente

#### Estratégia Direta

De acordo com os resultados obtidos para a estratégia Direta, Tabela 4.1, ao se analisar os índices de desempenho, a função constante obteve menores valores no MAPE a partir do terceiro passo, para o MAE a partir do segundo passo, para o MSE e RMSE a partir do quarto passo, menor RSR de 1 a 3 passos e para o NSE de 1 a 4 passos. Os resultados indicam que a função constante teve desempenho superior nesses índices. Já a função linear teve menor MAPE no primeiro e segundo passo, menor MAE no primeiro passo, menor MSE, PBIAS e RMSE no primeiro e segundo passo.

Tabela 4.1: Resultados parciais da estratégia Direta (em passos), utilizando-se dados de validação.

	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
Função Linear	1 a 2	1	1 a 2	1 a 2	1 a 2		
Função Constante	3 a 10	2 a 10	4 a 10	4 a 10		1 a 3	1 a 4
Função Quadrática					3 a 10	4 a 10	6 a 10
Função Clq			3	3			5

A função quadrática teve menor valor de PBIAS a partir do terceiro passo, menor RSR a partir do quarto passo e menor NSE de 6 até 10 passos. A função clq teve menor MSE e RMSE no terceiro passo e menor NSE no quinto passo. Estes resultados podem ser visualizados na Tabela 4.1.

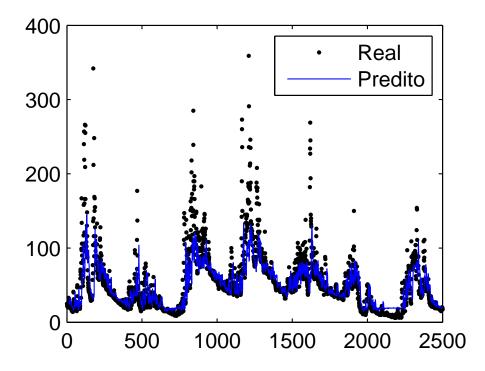


Figura 4.2: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia Direta e Função Constante - 10 passos à frente

Considerando apenas os índices MAPE e MAE, para um pequeno horizonte de predição, a função linear é a melhor indicada, como mostra a Tabela 4.1. A Figura 4.1 ilustra a predição de 2 passos à frente para a função linear. Para um horizonte maior de predição a função constante é a melhor opção, porém pela Figura 4.2, percebe-se que em algum momento o modelo se perdeu, o modelo neste caso têm dificuldade de acompanhar os picos. Será visto à frente que para o mesmo horizonte de predição o modelo obtido pelo ARX acompanha melhor os picos de vazão.

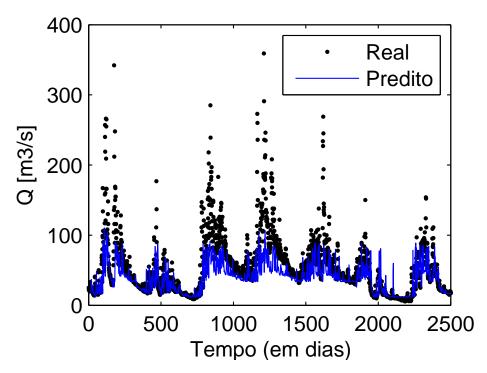


Figura 4.3: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia Recursiva e Função Constante - 10 passos à frente

#### Estratégia Recursiva

Ao se analisar os resultados para a estratégia Recursiva, a função linear obteve menor índice MAPE no horizonte de 1 a 10 passos à frente, menor MAE e RSR somente no primeiro passo, MSE e RMSE no primeiro e segundo passo e de 1 até 10 passos menor PBIAS. A função constante teve menor MAE a partir do segundo passo, MSE e RMSE a partir do terceiro passo e de 1 até 4 passos menor NSE. A quadrática teve menor índice apenas no NSE para o 5 até 8 passos. A função clq teve menor RSR a partir do segundo passo e menor NSE em 9 e 10 passos. Estes resultados estão representados na Tabela 4.2.

Para essa estratégia, pode-se dizer que a função linear e constante são as melhores escolhas ao considerar os índices MAPE e MAE. É importante notar que apesar deste resultado, o modelo não consegue acompanhar forma desejável os picos de vazão, como mostra a Figura 4.3

Tabela 4.2: Resultados parciais da estratégia Recursiva (em passos), utilizando-se dados de validação.

	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
Função Linear	1 a 10	1	1 a 2	1 a 2	1 a 10	1	
Função Constante		2 a 10	3 a 10	3 a 10			1 a 4
Função Quadrática							5 a 8
Função Clq						2 a 10	9 a 10

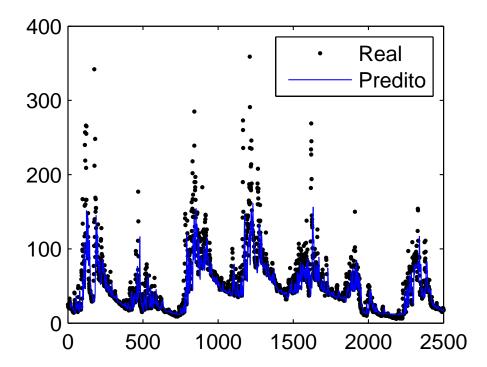


Figura 4.4: Predição de Vazão Q (dada em m3/s, utilizando-se os dados de validação) - Estratégia DirRec e Função Constante - 10 passos à frente

#### Estratégia DirRec

Quando os resultados para a estratégia DirRec são analisados, vê-se que a função constante teve menor MAPE a partir do terceiro passo, menor MAE, MSE e RMSE a partir do segundo passo e menor NSE de 1 até 8 passos. Para função linear têm-se menor MAPE e PBIAS no primeiro e no segundo passo, menor MAE, MSE e RMSE no primeiro passo, e menor RSR de 1 a 7 e 9 passos. Já a função quadrática teve menores valores apenas para o NSE, de 9 a 10 passos. A clq teve menor PBIAS em 3 até 10 passos e menor RSR em 8 e 10 passos.

Para a utilização da estratégia DirRec, considerando os índices MAPE e MAE, as funções linear e constante são a melhor opção (Veja Tabela 4.3). Para essa estratégia, o modelo obtido pela função constante representa melhor os dados para em uma predição de 10 passos à frente ao se comparar com o estratégia Recursiva, como mostra a Figura 4.4.

Tabela 4.3: Resultados parciais da estratégia DirRec (em passos), utilizando-se dados de validação.

	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
Função Linear	1 a 2	1	1	1	1 a 2	1 a 7, 9	
Função Constante	3 a 10	2 a 10	2 a 10	2 a 10			1 a 8
Função Quadrática							9 a 10
Função Clq					3 a 10	8 e 10	

### Estratégia MIMO e DIRMO

Os resultados obtidos tanto para a estratégia MIMO quanto para a estratégia DIRMO foram os mesmos, utilizando-se uma janela de 10 passos na DIRMO. A função constante teve menor MAE de 3 a 10 passos e menor NSE no terceiro e quarto passo. A função linear teve menor MAPE de 1 a 3 e 5 passos, menor MAE 1 e 2 passos, menor MSE e RMSE 1 a 3, 5, 8 e 9 passos, menor PBIAS para 10 passos a frente, menor RSR em 1 a 3 passos e menor NSE no quinto passo. A função quadrática teve menor PBIAS de 1 a 9 passos, menor RSR de 5 a 10 passos, menor NSE em 1, 2 e 7 a 10 passos. A função clq teve menor MAPE em 4, 6 a 10 passos, menor MSE e RMSE em 4, 6, 7 e 10 passos, menor RSR no quarto passo, e menor NSE no sexto passo. Pode-se dizer que para essas duas estratégias, analisando os índices MAPE e MAE, as funções linear, constante e clq são as melhores opções.

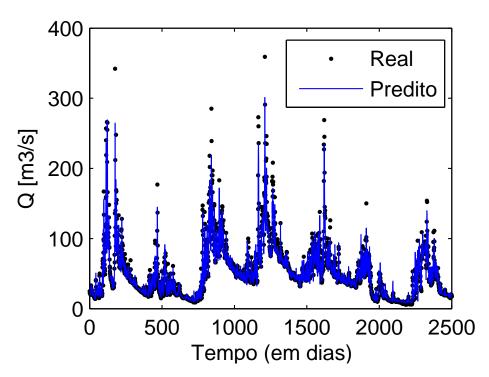


Figura 4.5: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia MIMO/DIRMO e Função Linear - 1 passo à frente

Tabela 4.4: Resultados parciais das estratégias MIMO e DIRMO (em passos), utilizandose dados de validação.

	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
Função Linear	1 a 3, 5	1, 2	1  a  3, 5, 8, 9	1  a  3, 5, 8, 9	10	1 a 3	5
Função Constante		3 a 10					3, 4
Função Quadrática					1 a 9	5 a 10	1,2,7 a 10
Função Clq	4, 6 a 10		4, 6, 7, 10	4, 6, 7, 10		4	6

A Figura 4.5 mostra como o modelo da função linear representa de forma adequada os dados para predição de 1 passo. A Figura 4.6 apresenta o modelo, da função constante, para predição de 10 passos à frente. Conforme descrito anteriormente, pode-se dizer que para cada índice há uma função e uma estratégia que juntas representam melhor os dados e levam a uma melhor predição para um determinado horizonte.

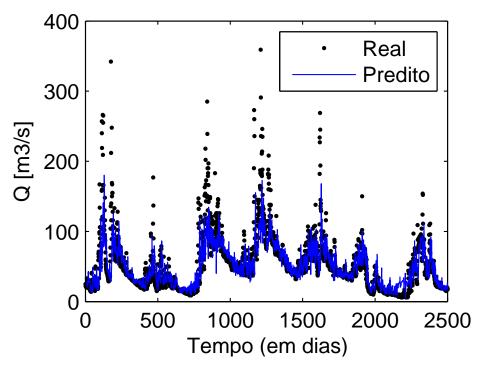


Figura 4.6: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia MIMO/DIRMO e Função Constante - 10 passos à frente

#### Comparação e análise das estratégias

A partir dos resultados parciais acima conclui-se que, para os índices MAPE, MSE e o RMSE de 4 até 10 passos à frente, a estratégia Direta com a função constante apresenta o menor valor dos índices, portanto melhor modelo. A Figura 4.2 mostra este resultado. Ainda para esta mesma estratégia, ao se analisar a função quadrática, obteve-se menor índice PBIAS no nono passo e com a função clq, menor NSE apenas no quinto passo.

Para um horizonte de predição menor vê-se que, tanto para a estratégia MIMO quanto para a DIRMO, a função linear teve menor MAPE no primeiro e no segundo passo, sendo que, para o MAE e RSR, somente no primeiro passo. O índice MSE teve menor valor no segundo e terceiro passo e para o RMSE de 1 a 3 passos à frente. A Figura 4.5 mostra a predição de 1 passo para as estratégias MIMO e DIRMO utilizando-se a função linear. Ainda para esta mesma estratégia com função quadrática, teve menor PBIAS para 6 e 8 passos, e menor NSE para 1 e 2 passos. Para a função contante, menor NSE apenas no 4 passoo, na função clq apenas no 6 passo.

A estratégia DirRec para a função constante teve menor MAE de 2 até 10 passos, menor MAPE somente no terceiro passo e menor NSE apenas no sétimo passo. A Figura 4.4 representa essa estratégia para predição de 10 passo à frente com função constante. Para a função clq menor PBIAS de 3 a 5, 7 e 10 passos à frente, e menor RSR apenas no oitavo e décimo passo. Com a função linear, menor RSR para 3 a 7, 9 passo. Com a função quadrática, menor NSE em 9 e 10 passos.

Para a estratégia Recursiva, com função linear, menor MSE apenas no primeiro passo. Com a função clq, menor RSR no segundo passo, menor NSE no terceiro passo com a função constante e menor índice no oitavo passo com a função quadrática.

Tabela 4.5: Análise do Índice MAPE com relação a todas estratégias (em passos), utilizando-se dados de validação.

	Direta	Recursiva	DirRec	MIMO/DIRMO
Função linear				1 e 2
Função Constante	4 a 10		3	
Função Quadrática				
Função Clq				

Tabela 4.6: Análise do Índice MAE com relação a todas estratégias (em passos) utilizandose dados de validação.

	Direta	Recursiva	DirRec	MIMO/DIRMO
Função linear				1
Função Constante			2 a 10	
Função Quadrática				
Função Clq				

Devido a diversidade dos resultados e considerando apenas os índices de maior interesse, MAPE e MAE, pode-se afirmar que, para horizontes menores de predição a estratégia MIMO/DIRMO com função linear e a DirRec com função constante são ideais. Para horizontes maiores de predição, a estratégia Direta e DirRec, com a função constante são a melhor opção (Ver Tabela 4.5 e 4.6).

#### ARX

De acordo com os resultados reportados nas tabelas do Apêndice A, pode-se concluir que as estratégias Direta, MIMO e DIRMO apresentam o mesmo desempenho considerando todas as predições, ou seja, de 1 a 10 passos à frente. Isso ocorre devido aos modelos serem lineares nos parâmtros, ou seja, os resultados obtidos pelo mínimos quadrados foram os mesmos. Por outro lado, quando os mesmos são comparadas às estratégias Recursiva e a DirRec, estas últimas apresentam desempenho superior. A Figura 4.7 mostra a comparação do índice MAPE da estrtégia DirRec com a Recursiva.

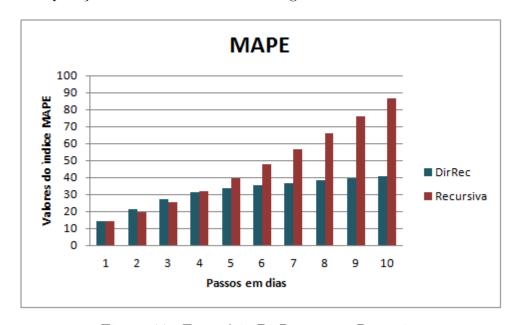


Figura 4.7: Estratégia DirRec versus Recursiva

Quando o índice MAPE é analisado, vê-se, Figura 4.7, que de 1 até 10 passos à frente, com exceção do segundo passo e do terceiro passo, a estratégia DirRec obteve valores de índices menores, o que significa que uma mesma estratégia de modelagem pode gerar resultados diferentes e portanto a estratégia de predição deve ser escolhida entre várias opções. No segundo e no terceiro passo a estratégia Recursiva teve um valor menor do que aqueles apresentados pela estratégia DirRec. Note, entretanto, que somente para esses passos a estratégia Recursiva obteve melhor resultado (Ver Figuras 4.7 e 4.8).

Ao se analisar o índice MAE, vê-se que de 1 até 7 passos à frente, a estratégia Recursiva teve menores valores de erro absoluto médio. E de 8 até 10 passos à frente, a estratégia DirRec obteve valores menores. Nos índices MSE e RME e RSR a estratégia Recursiva obteve valores menores se comparada com a DirRec. Isso significa que a estratégia Recursiva foi superior a DirRec nesses índices. Conjectura-se aqui que a estratégia Recursiva, por meio de seu modelo, pode melhor representar os dados em questão.

Ao se comparar os índices PBIAS e NSE, vê-se que a estratégia DirRec foi superior a Recursiva, o que reforça o comentário anterior. As Figuras 4.9 e 4.10 mostram a previsão de 10 passos à frente para a estratégia Recursiva e para a estratégia DirRec res-

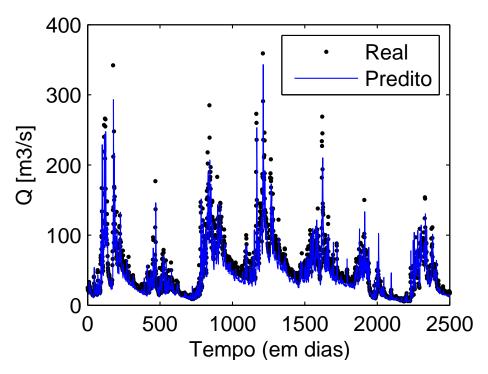


Figura 4.8: Predição de Vazão Q<br/>(dada em m $3/\mathrm{s})$ - Modelo ARX - Estratégia Recursiva - 3 passos à frente

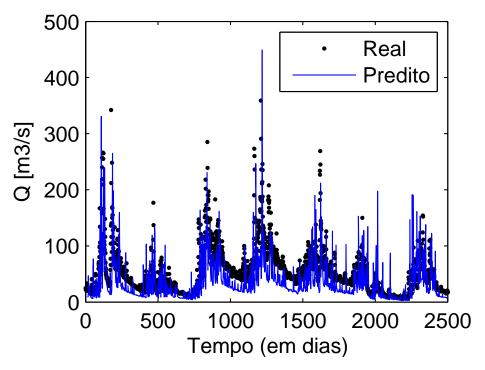


Figura 4.9: Predição de Vazão Q<br/>(dada em m3/s) - Modelo ARX -Estratégia Recursiva - 10 passos à frente

pectivamente. Note que na estratégia DirRec (Figura 4.10) a série observada foi melhor representada.

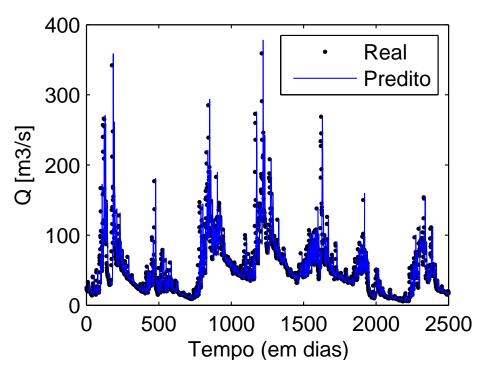


Figura 4.10: Predição de Vazão Q(dada em m3/s) - Modelo ARX - Estratégia DirRec - 10 passos à frente

### Algoritmo de aprendizagem preguiçoso versus ARX

Analisando o índice MAPE e considerando apenas um passo, o modelo ARX aliado a estratégia DirRec é a melhor opção como mostra a Tabela 4.7 e Figura 4.11. Para dois e três passos à frente, o mesmo modelo aliado à estratégia Recursiva seria a melhor escolha (Veja Figura 4.8 e Tabela 4.7). Ainda para este mesmo índice, mas considerando agora horizontes maiores de predição, os modelos obtidos pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso, utilizando a função constante aliado a estratégia Direta, pode ser considerado o mais indicado (Ver Figura 4.2 e Tabela 4.7).

Por outro lado, ao verificar o índice MAE constata-se que o modelo ARX juntamente com a estratégia Recursiva é o mais indicado para previsão de dois a cinco passos à frente conforme ilustrado na Tabela 4.8 e Figura 4.12. O modelo obtido pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso utilizando a função linear com a estratégia MIMO é a melhor opção para predição de um passo à frente (Tabela 4.8 e Figura 4.5). Para o caso de seis à dez passos à frente, o modelo obtido pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso utilizando a função constante e com a estratégia DirRec é a melhor opção (Figura 4.4 e Tabela 4.8).

Tabela 4.7: Análise do Índice MAPE com relação a todas estratégias (em passos) utilizando-se dados de validação.

	Direta	Recursiva	$\operatorname{DirRec}$	MIMO/DIRMO
Função linear				
Função Constante	4 a 10			
Função Quadrática				
Função Clq				
ARX		2 e 3	1	

Tabela 4.8: Análise do Índice MAE com relação a todas estratégias (em passos) utilizandose dados de validação.

	Direta	Recursiva	DirRec	MIMO/DIRMO
Função linear				1
Função Constante			6 a 10	
Função Quadrática				
Função Clq				
ARX		2 a 5		

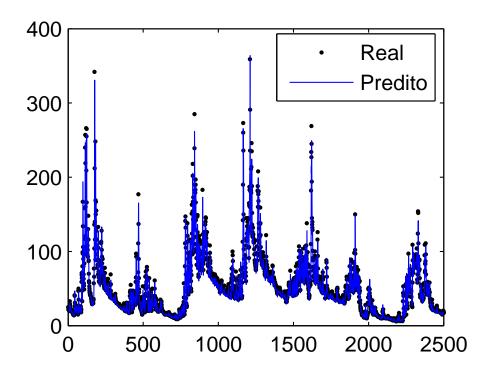


Figura 4.11: Predição de Vazão Q<br/>(dada em m $3/\mathrm{s})$ - Modelo ARX - Estratégia Dir Rec<br/> - 1 passo à frente

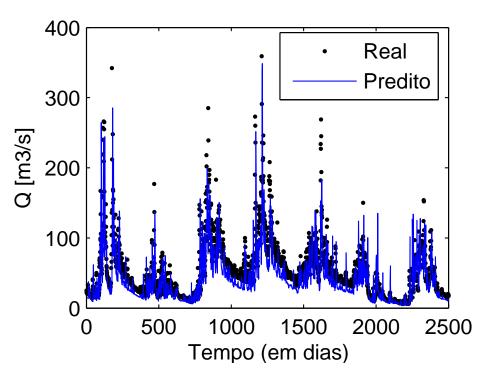


Figura 4.12: Predição de Vazão Q<br/>(dada em m3/s) - Modeo ARX - Estratégia Recursiva - 5 passos à frente

# 5 Estudo de Caso 2

Este capítulo apresenta os resultados e discussões da UHE Três Marias apresentada na Seção 3.1. Os resultados são mostrados e discutidos de forma a se definir qual algoritmo aliado a melhor estratégia obteve um melhor desempenho. Inicialmente os resultados parciais em cada algoritmo para cada estratégia são apresentados e posteriormente a melhor estratégia para aquele determinado algoritmo é determinada.

## 5.1 Resultados e Discussões - UHE Três Marias

Os mesmos critérios utilizados para análise dos resultados no Capítulo 4 se aplicam neste capítulo. Metade dos dados são utilizados para identificação e a outra metade para validação (detalhes sobre os dados na Seção 3.1). Apesar de serem bacias com dinâmicas diferentes, a ordem dos modelos utilizados são 3, conforme explicado na Seção 3.3.

É importante dizer que no LL para a função quadrática (para as 5 estratégias) aplicase a regularização de Tikhonov, isso se dá devido ao mal condicionamento da matriz de covariância (detalhes na Seção 3.4). Na validação aplica-se os cinco tipos de estratégias mencionados na Seção 3.5. Para isso são utilizadas 7 métricas (Seção 3.6) que quantificam os resultados na predição de até 10 passos à frente. Os resultados foram dispostos em forma de tabelas onde se comparam os índices de desempenho para cada passo. As mesmas estão disponibilizadas no Apêndice B.

## Algoritmo de aprendizagem preguiçoso

Assim como no Capítulo 4, para comparação dos resultados, simulam-se as quatro funções disponíveis no toolbox: função constante, linear, quadrática e a constante-linear-quadrática (clq). O número de vizinhos foram escolhidos pelo método de tentativa e erro, sendo que para esta bacia utilizou-se o mínimo número de vizinhos igual 100 e o máximo igual a 300, diferentemente da UHE Rosal. Devido a base de dados disponíveis para esta bacia

ser recente e em menor quantidade, utiliza-se um maior número vizinhos com o intuito de aumentar a representatividade do modelo.

Para a estratégia MIMO e DIRMO desenvolveu-se um código para o caso de múltiplas saídas, baseado no artigos de Taieb et al. (2012), pois o toolbox disponível possui somente funções para caso de uma única saída. Por isso escolhe apenas o máximo número de vizinhos (Algoritmo 1), visto que neste caso o mínimo número de vizinhos sempre começa com valor 2.

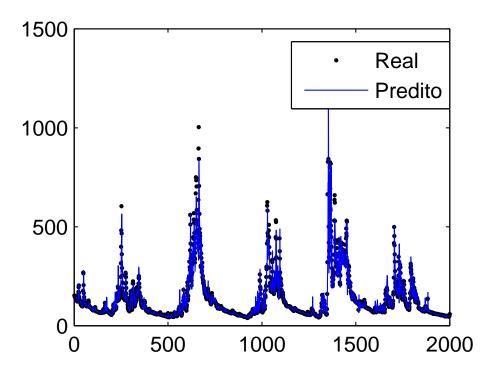


Figura 5.1: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia Direta e Função Linear - 2 passos à frente

#### Estratégia Direta

Na estratégia Direta ao se analisar o índice MAPE, ve-se que a função linerar teve o menor índice de 1 até 10 passos (Figuras 5.1 e 5.2). Isso implica dizer que, ao analisar este índice, vê-se que a melhor função a se utilizar é a linear. Quando o índice MAE para os primeiros 5 passos é analisado, a função linear é a melhor indicada. De 6 a 10 passos à frente a função constante teve menor valor (Figura 5.3). Ao verificar o índice MSE, a função linear é a melhor indicada para previsão no horizonte de 1 a 10 passos à frente. Essa função ainda é indicada quando deseja-se fazer predição para esse mesmo horizonte no caso do índice RMSE.

Ao analisar os resultados utilizando o índice PBIAS, para 1 e 2 passos à frente a função clq é a que representa melhor os dados, a partir do quarto até o décimo passo a função linear pode ser considerada a melhor. Analisando o índice RSR a função linear teve menor

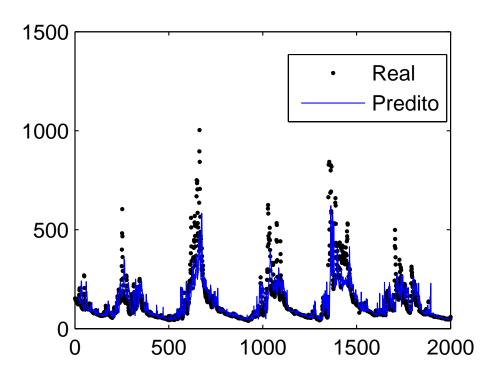


Figura 5.2: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia Direta e Função Linear - 10 passos à frente

	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
Função Linear	1 a 10	1 a 5	1 a 10	1 a 10	4 a 10	1 a 10	6 a 9
Função Constante		6 a 10					1 a 3
Função Quadrática							4, 5 e 10
Função Clq					1 a 2		

Tabela 5.1: Resultados parciais da estratégia Direta (em passos).

valor no horizonte de 1 a 10 passos à frente. Finalmente verifica-se que para o NSE no horizonte de 1 à 3 passos à frente, a função constante teve menor índice, para 4, 5 e 10 passos à frente a quadrática teve menores valores e de 6 a 9 passos a função linear teve melhor desempenho. A Tabela 5.1 representa melhor esses resultados.

Considerando apenas os índices MAPE e MAE, as funções linear e constante são a melhor opção quando deseja-se utilizar a estratégia Direta. Pelas Figuras 5.2 e 5.3 percebe-se que o modelo obtido pela função constante, apesar de ter obtido menor MAE, não consegue acompanhar os picos de vazão. O modelo da função linear representa melhor quando se compara com o mesmo.

#### Estratégia Recursiva

Ao se analisar os resultados obtidos para a *estratégia Recursiva*, quando verifica-se o índice MAPE, a função linear é a melhor indicada em todo o horizonte de predição, 1 a 10 passos à frente (Veja Figura 5.4). Quando analisa-se o MAE, para horizontes pequenos de

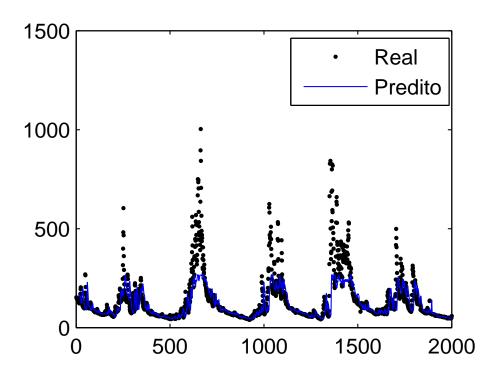


Figura 5.3: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia Direta e Função Constante - 10 passos à frente

predição (1 a 3 passos à frente), a função linear teve melhor desempenho. Para horizontes maiores de predição (4 a 10 passos à frente), o modelo da função constante representa melhor os dados (Veja Figura 5.5). No índice MSE para todo o horizonte de predição (1 a 10 passos à frente) a função constante teve menor índice, portanto melhor desempenho. Quando analisa-se o índice RMSE nos primeiros 4 passos, a função linear teve melhor desempenho, já de 5 a 7 passos à frente a função clq foi melhor; para 8 e 9 passos a função quadrática e para 10 passos a função constante.

Tabela 5.2: Resultados parciais da estratégia Recursiva (em passos).

	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
Função Linear	1 a 10	1 a 3		1 a 4		1 a 3	6
Função Constante		4 a 10	1 a 10	10			1 a 3
Função Quadrática				8 e 9			4 e 5
Função Clq				5 a 7	1 a 10	4 a 10	7 a 10

O índice PBIAS em todo o horizonte de predição teve a função clq como melhor opção. Se o índice RSR for analisado nos primeiros passos (1 a 3 passos à frente) a função linear teve menor índice, e de 4 a 10 passos à frente a função clq teve menor valor. Para o índice NSE, de 1 a 3 passos à frente a função constante representa melhor os dados. Nos passos 4 e 5 a função quadrática, no sexto passo a função linear, e de 7 a 10 passos à frente a função clq. Para esta estratégia, pode-se dizer que as funções constante e linear são a melhor escolha quando considera-se os índices MAPE e MAE. Apesar disso vê-se,

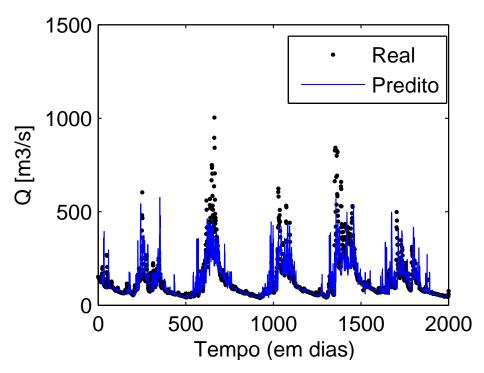


Figura 5.4: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia Recursiva e Função Linear - 10 passos à frente

Figuras 5.4 e 5.5, que o modelo obtido pela função linear representa melhor os dados, ou seja, acompanha melhor os picos.

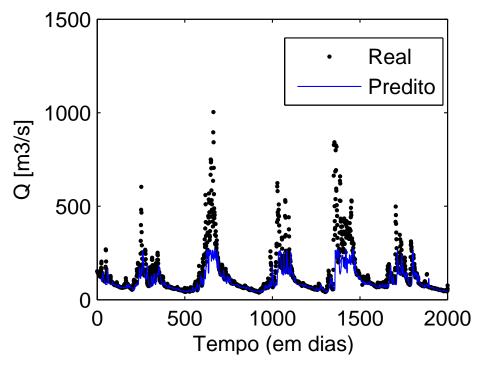


Figura 5.5: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia Recursiva e Função Constante - 10 passos à frente

#### Estratégia DirRec

De acordo com os resultados obtidos para a estratégia DirRec, ao se analisar o índice MAPE vê-se que de 1 a 3 e de 6 a 8 passos à frente, a função linear teve menor índice, já de 4, 5 e 10 passos à frente a função clq tever melhor desempenho e apenas para o nono passo a função constante teve menor MAPE. Analisando o índice MAE, de 1 a 3 passos à frente, a função linear teve melhor desempenho, de 4 a 10 passos à frente a função constante teve menor valor. Quando se analisa o MSE, de 1 a 3 passos à frente a função linear teve menor índice, de 4, 7 a 10 passos à frente a função constante e para os passos 5 e 6 a função quadrática. No índice RMSE para 1 e 3 passos à frente a função linear teve valores menores, para 4, 7 a 10 passos à frente a função constante teve melhor desempenho, 5 e 6 passos à frente para a função quadrática e apenas no segundo passo para a clq.

	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
Função Linear	1 a 3, 6 a 8	1 a 3	1 a 3	1 e 3	2 a 8	1, 3, 7 a 9	
Função Constante	9	4 a 10	4, 7 a 10	4, 7 a 10			1 a 4
Função Quadrática			5 e 6	5 e 6			5 a 10
Função Clq	4, 5 e 10			2	1, 9 e 10	2, 4 a 6, 10	

Tabela 5.3: Resultados parciais da estratégia DirRec (em passos).

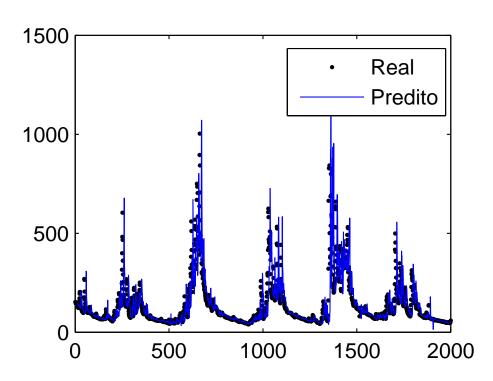


Figura 5.6: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia DirRec e Função Clq - 10 passos à frente

Para 1, 9 e 10 passos à frente a função clq teve menor PBIAS, 2 a 8 passos a função

linear. No índice RSR, 1, 3, 7 a 9 passos à frente a função linear teve menor valor, 2, 4 a 6 e 10 passos à frente foi a clq. Quando analisa-se o NSE de 1 a 4 passos à frente a função constante teve menor índice e de 5 a 10 passos à frente a quadrática. Para a utilização desta estratégia, considerando os índices MAPE e MAE, as funções linear, constante e clq são a melhor opção. Pelas Figuras 5.7 e 5.6, nota-se que o modelo obtido pela função Clq representa melhor os dados quando se considera 10 passos à frente.

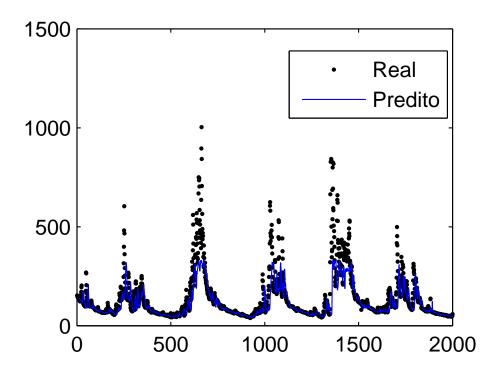


Figura 5.7: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia DirRec e Função Constante - 10 passos à frente

#### Estratégia MIMO e DIRMO

Os resultados obtidos tanto para a estratégia MIMO quanto para a estratégia DIRMO foram iguais, utilizando-se janela de 10 passos na DIRMO. Quando analisa-se o índice MAPE em todo o horizonte de predição (1 a 10 passos à frente), a função linear teve melhor desempenho (Ver Figura 5.10). Se analisar o índice MAE para 1 a 10 passos à frente, a função clq teve menores valores (Veja Figuras 5.8 e 5.9). A função linear teve menor índice MSE, RMSE e PBIAS, para todo o horizonte de predição (1 a 10 passo à frente). Conjectura-se que para esses índices a função linear é a melhor indicada, Figuras 5.11 e 5.10.

Analisando o RMSE de 1 a 7, 9 e 10 passos, a função linear teve menores valores e para 1, 7 e 8 passos a função clq teve menores valores. A função constante teve menor NSE de 1 a 4 passos, a função quadrática para o quinto passo, a linear para 6, 7, 9 e 10 passos e a função clq para 7 e 8 passos. Por meio da Tabela 5.4 há uma melhor visualização dos

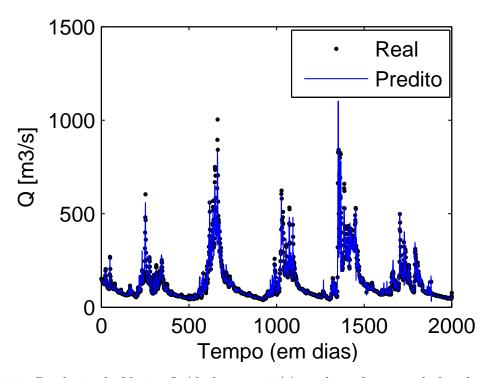


Figura 5.8: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia MIMO/DIRMO e Função Clq- 2 passos à frente

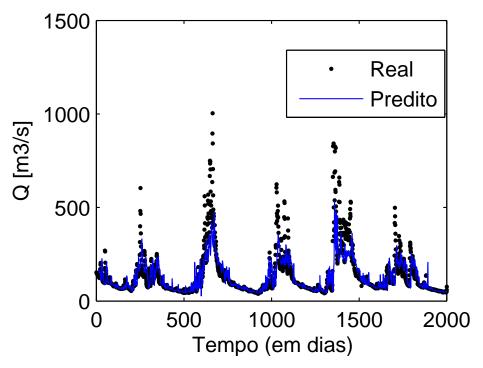


Figura 5.9: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia MIMO/DIRMO e Função Clq - 10 passos à frente

resultados. Pode-se dizer que para essas duas estratégias, as funções linear e clq são a melhor opção quando analisa-se os índices MAPE e MAE.

Tabela 5.4: Resultados parciais das estratégias MIMO e DIRMO (em passos).

	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
Função Linear	1 a 10		1 a 10	1 a 10	1 a 10	1 a 7, 9 e 10	6, 7, 9 e 10
Função Constante							1 a 4
Função Quadrática							5
Função Clq		1 a 10				1, 7 e 8	7 e 8

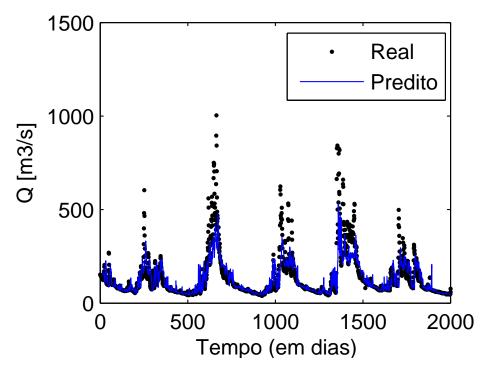


Figura 5.10: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia MIMO/DIRMO e Função Linear - 10 passos à frente

#### Comparação e análise das estratégias

Conclui-se por meio dos resultados obtidos anteriormente, que ao se analisar o índice MAPE para 1, 3, 5, 6, 7 e 10 a função linear aliada a estratégia MIMO ou DIRMO teve valores menores. Apenas para o segundo passo a função linear aliada a estratégia DirRec teve menor índice. No quarto passo a função clq com a DirRec teve menor valor e para 8 e 9 passos a função linear com a estratégia Direta.

Tabela 5.5: Análise do Índice MAPE com relação a todas estratégias (em passos).

	Direta	Recursiva	DirRec	MIMO/DIRMO
Função linear	8 e 9		2	1, 3, 5, 6, 7, 10
Função Constante				
Função Quadrática				
Função Clq			4	

Para um menor horizonte de predição, a estratégia Direta para a função linear teve

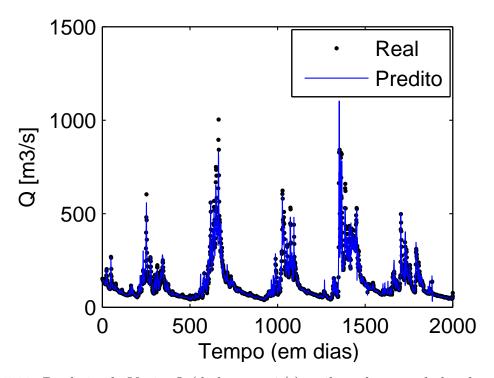


Figura 5.11: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia MIMO/DIRMO e Função Linear- 2 passos à frente

menor MAE no primeiro passo e tanto estratégia MIMO quanto a DIRMO para a função clq teve menor valor de 2 a 4 passos à frente. De 5 a 10 passos, a estratégia DirRec para função constante é a melhor apção. Ao se analisar o índice MSE em todo o horizonte de predição (1 a 10 passos à frente) a estratégia Recursiva para a função constante, teve menores índices se comparada com as demais. A estratégia MIMO para a função linear teve menor RMSE de 1 a 4 e 7 a 10 passos, a estratégia Direta com a mesma função teve menor valor em 5 e 6 passos.

Tabela 5.6: Análise do Índice MAE com relação a todas estratégias (em passos).

	Direta	Recursiva	DirRec	MIMO/DIRMO
Função linear	1			
Função Constante			5 a 10	
Função Quadrática				
Função Clq				2 a 4

Ao analisar o índice PBIAS para um horizonte de predição de 1 passo, tanto a estratégia Direta quanto a Recursiva, a função linear teve menor valor. Para a estratégia DirRec, a função linear de 2 a 8 passos e ainda na mesma estratégia, 9 e 10 passos a função clq. Ve-se que, tanto para a estratégia MIMO ou DIRMO, a função linear teve menor RSR no primeiro passo. A estratégia DirRec para a função clq de 2, 4 a 6, 10 passos e ainda para esta mesma estratégia a função linear de 3, 7 a 9 passos. Para o índice NSE, estratégia DirRec para a função constante teve melhor valor no primeiro e quarto passo,

e para a função quadrática no nono e décimo passo. A estratégia Direta para a função constante no primeiro e terceiro passo, e para a função linear no sexto passo. A estratégia MIMO para a função quadrática no quinto passo. A estratégia Recursiva para a função clq no sétimo e oitavo passo.

Ao analisar apenas os índice MAPE e MAE, a estratégia Direta com função constante é a melhor apção para 1, 8 e 9 passos à frente. A estratégia DirRec com a função linear quando deseja-se prever 2 passos à frente, com a função clq para 4 passos à frente e com a função constante de 5 a 10 passos à frente. A estratégia MIMO OU DIRMO com a função linear para 1, 3, 5, 6, 7 e 10 passos à frente e com a função clq para 2 a 4 passos.

#### ARX

De acordo com os resultados reportados nas tabelas do Apêndice B.1 vê-se que as estratégias Direta, MIMO e DIRMO apresentaram o mesmo desempenho considerando todo o horizonte de predição (1 a 10 passos à frente). Isso ocorre devido aos modelos serem lineares nos parâmetros, ou seja, os resultados obtidos pelo mínimos quadrados foram o mesmo. A Figura 5.12 mostra a comparação do índice MAPE da estrtégia DirRec com a Direta, MIMO e DIRMO.

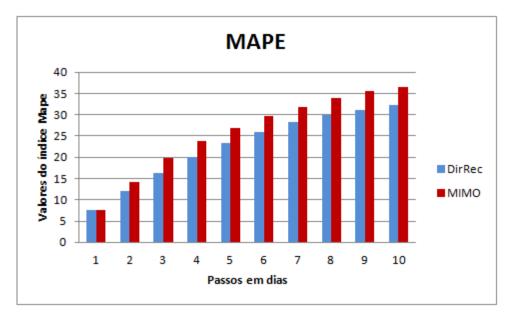


Figura 5.12: Estratégia DirRec versus MIMO, DIRMO e Direta

Quando o índice MAPE (Figura 5.12) é analisado, de 1 até 10 passos à frente, a estratégia DirRec teve melhor desempenho se comparada com as demais. As Figuras 5.13 e 5.14 ilustram estes valores. Se o índice MAE for analisado a estratégia DirRec teve desempenho superior de 2 a 4 passos (Figura 5.13), e de 5 a 10 passos à frente as estratégias Direta, MIMO e DIRMO, tiveram menores índices. Para o índice MSE ve-se que, no primeiro e no segundo passo, a estratégia Recursiva teve menor valor, e para 3 a 10 passos à frente a estratégia Direta, MIMO e DIRMO, tiveram melhor desempenho.

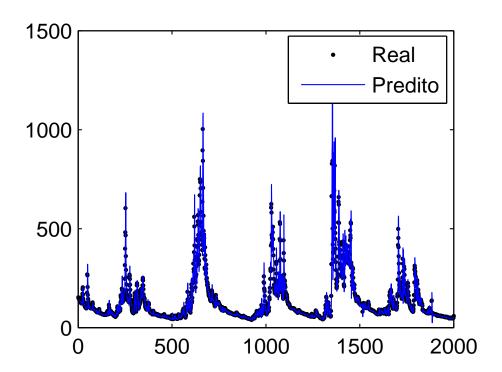


Figura 5.13: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia DirRec - 2 passos à frente

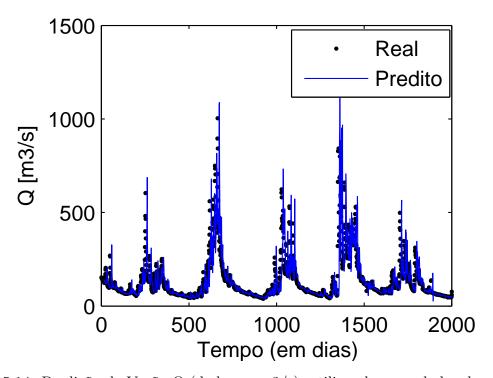


Figura 5.14: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia DirRec - 10 passos à frente

Para o índice RMSE analisando o primeiro e segundo passo a estratégia Recursiva teve menor índice e para 3 a 10 passos à frente as estratégias Direta, MIMO e DIRMO tiveram

os mesmos índices, portanto melhor desempenho. No caso dos índices o PBIAS e RSR, a estratégia DirRec teve desempenho superior no horizonte de 2 a 10 passos à frente. Para esses índices a estratégia Recursiva representa melhor os dados por meio de seu modelo.

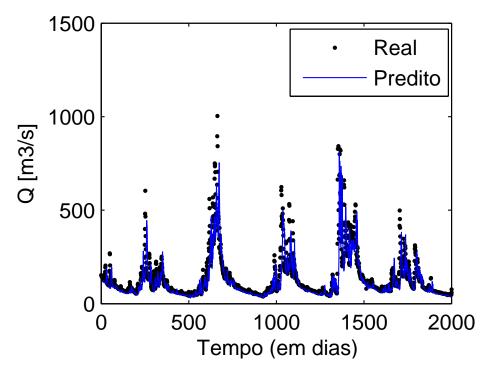


Figura 5.15: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia Direta MIMO e DIRMO - 10 passos à frente

Para o NSE de 2 a 5 passos as estratégias Direta, MIMO e DIRMO teve menores índices e 6 a 10 passos a estratégia recursiva teve menores valores. Note que em poucos casos a estratégia recursiva teve melhor desempenho. Os modelos obtidos pelo ARX representam melhor os picos de vazão.

## Algoritmo de aprendizagem preguiçoso versus ARX

Ao analisar apenas o índice MAPE (Veja Tabela 5.7), vê-se que o modelo obtido pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso é a melhor opção, para 1, 3, 5, 6, 7, e 10 passos à frente, aliado a estratégia MIMO ou DIRMO, com a função linear (Veja Figura 5.10). Ainda para este mesmo índice, a etratégia DirRec para a função linear, teve desempenho superior no segundo passo (Veja Figura 5.16). A mesma estratégia com a função clq é a melhor opção apenas para 4 passos à frente como mostra a Figura 5.17. Para o oitavo e nono passo, a função linear aliada a estratégia Direta seria a melhor escolha (Ver Figura 5.18).

Ao verificar o índice MAE (Ver Tabela 5.8) constata-se, também, que o modelo obtido pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso é a melhor escolha. Para o caso de um passo à frente, o modelo aliado a estratégia Direta com função constante teve menor índice. Para

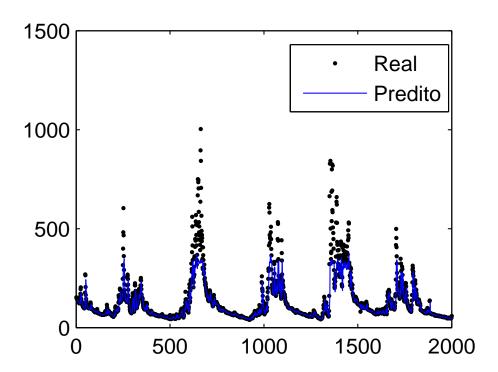


Figura 5.16: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia DirRec - Função Constante - 2 passos à frente

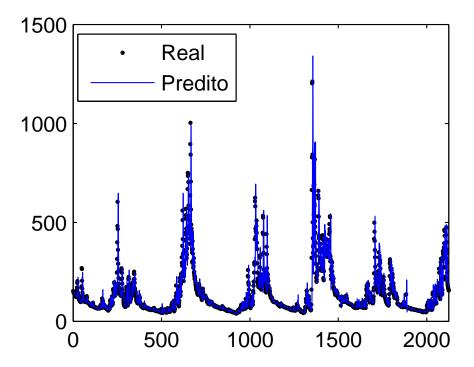


Figura 5.17: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia DirRec - Função Clq - 4 passos à frente

o segundo, terceiro e quarto passo, a estratégia MIMO ou DIRMO, com a função clq é a melhor opção, como mostra a Figura 5.8. Para o mesmo índice, quando deseja-se um

Tabela 5.7: Análise do Índice MAPE com relação a todas estratégias (em passos) utilizando-se dados de validação.

	Direta	Recursiva	DirRec	MIMO/DIRMO
Função linear	8 e 9		2	1,3,5,6,7 e 10
Função Constante				
Função Quadrática				
Função Clq			4	
ARX				

Tabela 5.8: Análise do Índice MAE com relação a todas estratégias (em passos) utilizandose dados de validação.

	Direta	Recursiva	DirRec	MIMO/DIRMO
Função linear	1			
Função Constante			5 a 10	
Função Quadrática				
Função Clq				2 a 4
ARX				

horizonte maior de predição (5 a 10 passos à frente), o modelo obtido pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso usando a função constante com a estratégia DirRec representa melhor os dados (Veja Figura 5.7).

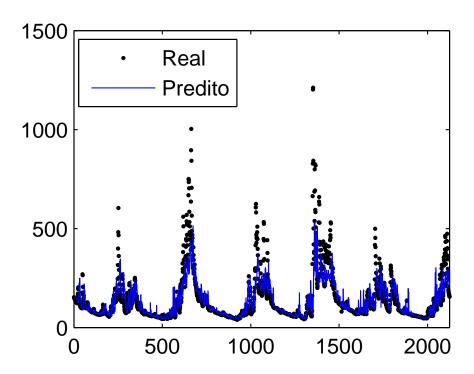


Figura 5.18: Predição de Vazão Q (dada em m3/s), utilizando-se os dados de validação - Estratégia Direta - Função Linear - 8 passos à frente

Para esta bacia, quando compara-se o modelo obtido pelo ARX e o modelo obtido

pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso, nota-se que o LL apresenta desempenho superior (Ver Tabelas 5.5 e 5.6). Por ser uma bacia de dinâmica lenta, os dados são bem amostrados, possibilitando o uso de técnicas de modelagem mais elaboradas.

# 6 Conclusões

Obter modelos capazes de predizer a evolução de sistemas multipassos à frente é um dos grandes desafios quando se lida com predição de séries temporais, especialmente quando os dados coletados não são bem amostrados. A busca por modelos que possam extrair da melhor forma possível as informações existentes nos dados é de grande importância em diversas áreas do conhecimento.

Neste contexto, um dos grandes desafios é a modelagem de séries hidrológicas. De modo geral, quase todos os processos hidrológicos contêm uma parte estocástica que na maioria das vezes, está associada a uma parte determinística. Os modelos hidrológicos têm desempenho limitado não só pela quantidade e qualidade dos dados hidrológicos, mas também pela dificuldade de formulação matemática de alguns fenômenos.

A obtenção de uma boa predição multipassos à frente não é uma solução trivial, pois quanto maior o horizonte de previsão, maior é a incerteza associada. Por isso, para alcançar este objetivo, não só o algoritmo utilizado bem como a estratégia aplicada para a determinação da predição devem ser considerados. Neste trabalho, visando a obter o melhor desempenho do algoritmo utilizado no difícil problema de predição de séries reais de vazão, discutiram-se 5 estratégias de predição multipassos à frente hoje disponíveis na literatura técnica: Direta, Recursiva, DirRec, MIMO e DIRMO.

O objetivo deste trabalho foi analisar e comparar diferentes representações para modelagem e posterior predição de séries de vazão k-passos à frente em bacias hidrográficas à luz de 5 tipos de estratégias para comparar o desempenho das mesmas segundo a uma determinada métrica. Os resultados alcançados com a metodologia proposta, que foram listados nos Capítulos 4 e 5, mostram que não existe uma única representação para o problema em questão com o melhor desempenho para todo o horizonte de predição desejado, mas sim várias representações em que cada uma delas será melhor para um ou mais horizontes.

Ao se analisar os resultados de modo geral, os mesmos apontam que, quanto menor a bacia, pior é o desempenho dos modelos encontrados. Isso se deve ao tamanho da bacia que consequentemente influencia sua dinâmica. Por outro lado, o tempo de amostragem

dos dados, 24 horas, não parece ser suficiente para representar de forma satisfatória a vazão dos rios dessas bacias. O mesmo não parece acontecer para o caso de bacias de grande porte.

Pode-se, entretanto, concluir que no caso de bacias hidrográficas de dinâmicas rápidas como a do Capítulo 4, o modelo ARX é melhor indicado para horizontes menores de predição, além de possuir maior capacidade de representação dos picos de vazão. Se uma concessionária de energia necessitasse de um horizonte pequeno de predição poderia assim considerar um modelo simples e que exija pouco esforço computacional. Quando deseja-se ter horizontes maiores de predição, modelos mais elaborados como o algoritmo de aprendizagem preguiçoso.

Para uma bacia de dinâmica lenta como descrita no capítulo 5, tanto para horizontes menores de predição quanto para maiores, modelos mais elaborados como o do algoritmo de aprendizagem preguiçoso, são mais indicados quando se analisa os índices de interesse das concessionárias de energia, MAPE e MAE. Apesar dos modelos obtidos pelo ARX não apresentarem menores índices, o mesmo possui uma maior capacidade de acompanhar os picos de vazão da série. Os resultados para este tipo específico de bacia apontam que é importante utilizar funções específicas aliadas a um tipo específico de estratégia.

Note que os modelos obtidos pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso apresentam dificuldades de simulação dos picos de vazões para os dois tipos de bacias estudadas neste trabalho. Isso se deve ao fato da complexidade da ferramenta utilizada, visto que os modelos obtidos pelo ARX não apresentou o mesmo problema em questão.

Em suma, a escolha de diferentes modelos aliados a diferentes estratégias multi-passos à frente é uma alternativa viável e que pode levar a resultados melhores para o índice de desempenho escolhido no problema de predição de séries temporais.

## 6.1 Proposta para trabalhos futuros

Os resultados obtidos neste trabalho indicam que vale a pena considerar diferentes estratégias para predição de vários passo à frente. Dando continuidade a essa linha de raciocínio, sugerem-se alguns aspectos que ainda podem ser explorados:

- utilizar outras ferramentas para predição de séries reais de vazão, como por exemplo Redes Neurais e compará-la com o algoritmo de aprendizagem preguiçoso utilizado neste trabalho;
- aprofundar os estudos nos modelos obtidos pelo algoritmo de aprendizagem preguiçoso;
- buscar diferentes formas para encontrar os vizinhos de forma otimizada;
- implementar modelos cuja saída seja determinada pela junção do ARX e LL.

# A Apêndice

## A.1 Tabelas UHE Rosal

## Algoritmo de aprendizagem preguiçosa

Tabela A.1: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	14,8467	7,4609	301,4209	17,3615	7,9084	0,5434	0,7047
2	21,6321	10,3014	493,8281	22,2222	9,0685	0,7437	0,4470
3	26,7098	12,2109	632,1557	25,1427	9,0580	0,8857	0,2155
4	29,9299	$13,\!4725$	722,0603	26,8712	8,2243	0,9802	0,0392
5	31,9366	14,2481	780,0961	27,9302	7,5174	1,0490	-0,1004
6	33,4918	$14,\!8744$	824,3456	28,7114	6,9066	1,0966	-0,2025
7	34,9230	$15,\!4321$	863,8435	29,3912	6,5152	1,1374	-0,2937
8	36,0637	$15,\!8865$	893,5271	29,8919	6,0706	1,1645	-0,3560
9	37,4251	16,3589	925,4939	30,4219	5,9458	1,2012	-0,4428
10	$38,\!4859$	16,7000	$947,\!6329$	30,7836	5,9772	1,2272	-0,5061

Tabela A.2: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	12,7411	6,4958	188,1129	13,7154	1,0452	0,3529	0,8754
2	21,2398	10,4994	441,7580	21,0180	1,9085	0,5788	0,6650
3	27,0988	12,9510	631,5362	25,1304	2,2949	0,7414	0,4503
4	31,0617	14,3612	749,0648	27,3690	2,8035	0,8703	0,2425
5	33,4520	15,3532	818,3122	28,6062	2,7209	0,9597	0,0790
6	35,0328	15,9150	865,8101	29,4247	2,8315	1,0201	-0,0407
7	37,2578	$16,\!5702$	912,3229	30,2047	2,8113	1,0783	-0,1628
8	$39,\!4372$	17,0692	951,7086	30,8498	2,9395	1,1240	-0,2635
9	39,2574	17,5878	977,6347	31,2672	2,4431	1,1573	-0,3394
10	42,1719	17,9316	998,2142	31,5945	2,3052	1,1867	-0,4082

Tabela A.3: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	24,4010	8,3955	346,8779	18,6247	-1,2542	0,4413	0,8052
2	43,4066	13,2628	$709,\!1580$	26,6300	-2,3693	0,6228	0,6121
3	85,3648	16,4355	1105,3000	33,2456	-1,9261	0,7706	0,4061
4	160,1841	$18,\!4502$	1284,6000	35,8412	-1,5539	0,8594	$0,\!2615$
5	70,7944	20,3642	2011,3000	44,8475	-1,6509	0,9576	0,0831
6	$99,\!3266$	20,6760	1458,7000	38,1933	-1,1433	0,9761	0,0473
7	139,4634	21,9167	2473,5000	49,7339	-1,6624	1,0059	-0,0119
8	92,8330	22,4059	2369,0000	48,6721	-2,1439	1,0101	-0,0203
9	$114,\!5174$	22,8117	2111,1000	45,9469	-0,1015	1,0400	-0,0817
10	99,0450	23,2484	2311,9000	48,0825	$0,\!1278$	1,0664	-0,1372

Tabela A.4: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	13,1105	6,5121	190,5826	13,8052	1,0940	0,3545	0,8743
2	21,5259	10,4955	456,7898	21,3726	2,1823	0,5842	0,6587
3	26,9848	12,8314	631,1605	25,1229	2,9598	0,7442	0,4462
4	31,4464	14,1289	752,5846	27,4333	$4,\!2537$	0,8791	0,2272
5	32,6483	14,9106	825,7758	28,7363	4,9079	0,9761	0,0473
6	$35,\!2583$	$15,\!4533$	880,4523	29,6724	4,9058	1,0382	-0,0779
7	36,8766	15,8901	889,5855	29,8259	4,8128	1,0865	-0,1804
8	38,6742	16,3796	939,1811	30,6461	5,3129	1,1418	-0,3038
9	46,0590	16,9316	962,7506	31,0282	4,6380	1,1679	-0,3640
10	41,6312	17,2772	977,3069	31,2619	4,3620	1,1961	-0,4307

Tabela A.5: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	14,8467	7,4609	301,4000	17,3615	7,9084	0,5434	0,7047
2	21,9316	10,3752	500,7000	22,3758	11,4146	0,7618	0,4197
3	27,7464	$12,\!4506$	668,2000	25,8505	14,8399	0,9604	0,0777
4	31,9944	13,8698	787,7000	28,0658	17,5014	1,1080	-0,2276
5	35,2408	14,9012	882,4000	29,7049	19,9932	1,2344	-0,5237
6	37,7246	15,6271	956,4000	30,9263	22,1464	1,3372	-0,7881
7	40,0780	16,2878	1024,7000	32,0104	24,0230	1,4284	-1,0403
8	$42,\!3242$	$16,\!8712$	1081,1000	32,8801	25,7217	1,5047	-1,2642
9	44,4102	17,3183	1131,4000	33,6368	27,1921	1,5687	-1,4609
10	$46,\!4547$	17,7857	1176,2000	34,2956	28,6209	1,6240	-1,6375

Tabela A.6: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	12,7411	6,4958	188,1000	13,7154	1,0452	0,3529	0,8754
2	21,1204	10,5560	447,4000	21,1516	1,8534	0,5723	0,6724
3	26,9422	13,4222	682,5000	26,1256	1,9855	0,7240	$0,\!4758$
4	31,3178	15,4452	874,1000	29,5652	1,8664	0,8277	0,3149
5	34,7626	17,0738	1021,8000	31,9661	1,6573	0,8940	0,2007
6	37,0417	18,0643	$1127,\!2000$	$33,\!5734$	1,4814	0,9348	$0,\!1262$
7	38,8925	18,8802	1230,5000	35,0780	1,1873	0,9699	0,0592
8	$40,\!5712$	19,5963	1310,1000	36,1950	0,9571	0,9955	$9 \cdot 10^{-3}$
9	$42,\!4677$	20,2459	1367,4000	36,9784	0,8515	1,0129	-0,0259
10	44,0458	20,7646	1440,2000	37,9499	0,7721	1,0331	-0,0673

Tabela A.7: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	13,3070	6,9760	238,2000	15,4322	1,2756	0,4018	0,8386
2	21,3802	10,8116	478,8000	21,8817	2,2962	0,5991	0,6411
3	28,0362	13,7060	706,7000	26,5831	2,5836	0,7494	0,4384
4	33,1136	15,8015	901,2000	30,0199	2,3412	0,8460	0,2842
5	36,7558	17,2217	1014,5000	31,8505	$2,\!2597$	0,9029	0,1847
6	39,7357	18,2878	$1122,\!8000$	33,5081	2,0401	0,9426	0,1115
7	42,3839	19,2093	1230,5000	35,0789	1,8806	0,9773	0,0448
8	44,9740	19,7361	1283,7000	35,8284	2,0363	1,0021	$-4.2 \cdot 10^{-3}$
9	48,2231	20,3063	1345,2000	36,6772	2,1553	1,0267	-0,0540
10	$51,\!2740$	20,8061	1416,4000	37,6357	2,1758	1,0432	-0,0883

Tabela A.8: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	13,1105	6,5121	190,6000	13,8052	1,0940	0,3545	0,8743
2	21,4250	10,5841	452,9000	21,2816	2,0266	0,5705	0,6745
3	27,8033	13,4642	$695,\!2000$	26,3658	2,3438	0,7236	$0,\!4765$
4	32,0769	15,4975	883,8000	29,7283	2,4236	0,8274	0,3154
5	35,5912	17,1147	1029,9000	32,0921	2,2926	0,8938	0,2012
6	38,1362	18,1318	1139,3000	33,7535	2,2138	0,9342	0,1273
7	40,0953	18,9885	1248,0000	$35,\!3265$	2,0063	0,9690	0,0611
8	42,2609	19,7719	1344,2000	36,6637	1,8508	0,9936	0,0127
9	44,2166	20,3971	1396,8000	37,3740	1,8941	1,0104	-0,0209
10	$45,\!8499$	20,8928	1462,9000	38,2477	1,9534	1,0296	-0,0600

Tabela A.9: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	13,1105	6,5121	190,6000	13,8052	1,0940	0,3545	0,8743
2	21,4250	10,5841	452,9000	21,2816	2,0266	0,5705	0,6745
3	27,8033	13,4642	$695,\!2000$	26,3658	2,3438	0,7236	$0,\!4765$
4	32,0769	15,4975	883,8000	29,7283	2,4236	0,8274	0,3154
5	35,5912	17,1147	1029,9000	32,0921	2,2926	0,8938	0,2012
6	38,1362	18,1318	1139,3000	33,7535	2,2138	0,9342	0,1273
7	40,0953	18,9885	1248,0000	35,3265	2,0063	0,9690	0,0611
8	42,2609	19,7719	1344,2000	36,6637	1,8508	0,9936	0,0127
9	44,2166	20,3971	1396,8000	37,3740	1,8941	1,0104	-0,0209
10	45,8499	20,8928	1462,9000	38,2477	1,9534	1,0296	-0,0600

Tabela A.10: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DirRec, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	14,8467	7,4609	301,4209	17,3615	7,9084	0,5434	0,7047
2	21,4241	10,2078	479,0469	21,8871	7,4906	0,6880	$0,\!5267$
3	26,5400	12,1020	623,7303	24,9746	8,0254	0,7942	0,3692
4	29,9157	13,2845	722,2208	26,8742	8,6454	0,8640	0,2534
5	32,0357	13,9011	784,9072	28,0162	9,5989	0,9183	$0,\!1567$
6	33,6113	14,3349	833,2646	28,8663	10,4956	0,9572	0,0837
7	35,1665	14,7934	881,4241	29,6888	11,5488	1,0021	$-4.3 \cdot 10^{-3}$
8	36,6278	$15,\!1505$	919,9928	30,3314	12,3981	1,0365	-0,0743
9	38,1950	15,4920	958,7392	30,9635	13,4172	1,0724	-0,1500
10	39,7545	15,8148	991,2792	31,4846	14,7837	1,1192	-0,2526

Tabela A.11: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DirRec, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	12,7411	6,4958	188,1129	13,7154	1,0452	0,3529	0,8754
2	$21,\!3757$	10,7428	491,9787	22,1806	0,8214	0,5773	0,6667
3	27,1665	13,3044	700,2120	26,4615	-0,3374	0,6814	0,5357
4	33,4514	15,1180	870,4207	29,5029	-0,8101	0,7465	0,4427
5	$34,\!3525$	16,1431	979,8664	31,3028	-0,8792	0,7844	0,3847
6	$35,\!6733$	16,9858	1068,9000	32,6937	-1,2239	0,8161	0,3339
7	37,3230	17,3677	1141,8000	33,7901	-0,8477	0,8396	0,2951
8	39,7028	17,9999	1222,7000	34,9672	-1,0622	0,8563	0,2667
9	$40,\!8705$	18,3511	1283,6000	35,8267	-0,8051	0,8753	0,2338
10	41,8947	18,6627	1330,2000	36,4725	-0,4161	0,8973	0,1949

Tabela A.12: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DirRec, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	13,9407	7,3387	277,9776	16,6727	2,5839	0,4459	0,8011
2	27,4408	11,1996	$554,\!2500$	23,5425	3,6104	0,6547	$0,\!5714$
3	28,6351	13,1604	696,1176	26,3840	4,3816	0,7395	$0,\!4532$
4	33,7340	14,3542	827,6009	28,7681	5,4611	0,8156	0,3348
5	$34,\!3783$	15,0130	890,2473	29,8370	6,0993	0,8467	0,2831
6	37,4328	15,8225	1065,9000	32,6480	$5,\!5381$	0,8703	0,2426
7	42,1602	16,0381	1026,3000	32,0362	6,9408	0,9001	0,1898
8	$40,\!1865$	16,3421	1051,4000	$32,\!4257$	8,1096	0,9420	0,1126
9	40,8328	16,5824	1080,0000	32,8627	9,1980	0,9852	0,0293
10	$41,\!2828$	16,8610	1124,5000	$33,\!5336$	9,8943	0,9988	$2,4\cdot10^{-3}$

Tabela A.13: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DirRec, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	13,1105	6,5121	190,5826	13,8052	1,0940	0,3545	0,8743
2	22,6245	10,8291	496,1822	$22,\!2751$	0,9362	0,5806	0,6629
3	28,6850	13,3890	$716,\!6545$	26,7704	-0,0509	0,6858	0,5297
4	34,1818	15,1442	873,6985	29,5584	-0,4948	0,7478	0,4407
5	34,5254	16,1645	981,4493	31,3281	-0,4586	0,7862	0,3819
6	36,4810	17,0108	1077,9000	32,8313	-0,8221	0,8181	0,3307
7	40,6810	17,4195	1162,9000	34,1017	-0,4486	0,8430	0,2894
8	41,3435	17,9767	1222,6000	34,9651	-0,6925	0,8556	0,2680
9	43,4816	18,3155	1285,5000	35,8539	-0,2825	0,8768	0,2312
10	43,3102	18,6183	1327,1000	36,4296	-0,1131	0,8965	0,1962

Tabela A.14: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	14,0429	7,2058	270,5000	16,4456	5,3129	0,4623	0,7863
2	22,0982	10,5727	518,4000	22,7692	8,7191	0,6918	0,5214
3	28,5407	12,7248	705,2000	$26,\!5547$	11,7254	0,8658	$0,\!2503$
4	32,9600	13,9939	830,0000	28,8089	14,0025	0,9896	0,0207
5	36,1225	14,8547	905,5000	30,0914	15,9447	1,0891	-0,1862
6	38,6645	$15,\!4269$	$952,\!5000$	30,8624	17,3624	1,1701	-0,3692
7	40,6691	15,8914	996,2000	31,5627	18,5532	1,2372	-0,5306
8	42,2628	16,2932	1029,3000	32,0833	19,0283	1,2700	-0,6128
9	43,7790	16,6894	1052,8000	32,4476	19,1012	1,2890	-0,6616
10	44,6629	17,0272	1065,8000	32,6464	18,2096	1,2895	-0,6629

Tabela A.15: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	12,5906	6,4799	185,8870	13,6340	0,8432	0,3515	0,8764
2	20,8016	10,3876	432,9606	20,8077	1,7389	0,5747	0,6698
3	26,6908	12,8383	622,9561	24,9591	2,3294	0,7387	$0,\!4544$
4	30,2936	14,2130	743,5236	27,2676	3,0233	0,8693	0,2443
5	32,9063	15,1838	813,1141	28,5152	3,2342	0,9531	0,0915
6	34,7901	15,7210	858,1288	29,2938	3,4626	1,0137	-0,0276
7	36,4841	16,2656	902,4710	30,0412	3,8785	1,0699	-0,1448
8	37,7989	16,7403	930,8641	30,5101	3,8342	1,1098	-0,2316
9	38,8909	17,2570	961,9841	31,0159	3,5051	1,1410	-0,3020
10	39,9271	17,6967	986,0129	31,4008	2,9183	1,1699	-0,3687

Tabela A.16: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	23,2442	10,2543	948,3000	30,7943	0,2175	0,6604	0,5638
2	$33,\!2737$	14,6003	1350,8000	36,7534	$0,\!4391$	0,7907	$0,\!3748$
3	45,0265	16,6724	1397,1000	37,3776	0,8915	0,8487	$0,\!2797$
4	96,6487	18,2381	$1527,\!8000$	39,0876	0,8134	0,9065	$0,\!1783$
5	59,1840	19,5646	1703,9000	$41,\!2786$	$0,\!4686$	0,9473	0,1026
6	87,2491	19,8746	$1701,\!5000$	41,2489	-0,0578	0,9720	0,0552
7	$84,\!5747$	20,2857	1498,5000	38,7108	0,6311	0,9967	$6.6 \cdot 10^{-3}$
8	$75,\!4292$	20,6640	$1576,\!3000$	39,7026	0,6086	1,0039	$-7,7\cdot10^{-3}$
9	122,0112	21,3459	1775,2000	42,1332	2,7341	1,0254	-0,0514
10	72,8355	22,7593	2181,3000	46,7048	3,5417	1,0698	-0,1444

Tabela A.17: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Constante-linear-quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	12,8210	6,5686	191,2564	13,8295	0,9757	0,3572	0,8724
2	21,0063	10,4181	436,7225	20,8979	1,9198	0,5779	0,6660
3	26,8014	12,8276	623,4666	24,9693	2,5560	0,7394	$0,\!4533$
4	30,1740	14,1688	741,4763	27,2301	3,1688	0,8672	0,2479
5	33,1015	15,1044	813,6758	28,5250	3,4088	0,9511	0,0954
6	34,7163	15,6361	856,2025	29,2609	3,6399	1,0101	-0,0202
7	36,2657	16,1806	898,1479	29,9691	3,9632	1,0626	-0,1290
8	37,6712	16,6686	932,6529	30,5394	4,0556	1,1050	-0,2211
9	38,8862	17,1854	962,7591	31,0284	3,8165	1,1368	-0,2922
10	39,9168	17,6063	984,4739	31,3763	3,1860	1,1655	-0,3583

Tabela A.18: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	14,0429	7,2058	270,5000	16,4456	5,3129	0,4623	0,7863
2	22,0982	10,5727	518,4000	22,7692	8,7191	0,6918	0,5214
3	28,5407	12,7248	705,2000	26,5547	11,7254	0,8658	$0,\!2503$
4	32,9600	13,9939	830,0000	28,8089	14,0025	0,9896	0,0207
5	36,1225	14,8547	905,5000	30,0914	15,9447	1,0891	-0,1862
6	38,6645	$15,\!4269$	$952,\!5000$	30,8624	17,3624	1,1701	-0,3692
7	40,6691	15,8914	996,2000	$31,\!5627$	$18,\!5532$	1,2372	-0,5306
8	42,2628	16,2932	1029,3000	32,0833	19,0283	1,2700	-0,6128
9	43,7790	16,6894	1052,8000	32,4476	19,1012	1,2890	-0,6616
10	44,6629	17,0272	1065,8000	32,6464	18,2096	1,2895	-0,6629

Tabela A.19: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	12,5906	6,4799	185,8870	13,6340	0,8432	0,3515	0,8764
2	20,8016	10,3876	432,9606	20,8077	1,7389	0,5747	0,6698
3	26,6908	12,8383	622,9561	24,9591	2,3294	0,7387	$0,\!4544$
4	30,2936	14,2130	$743,\!5236$	27,2676	3,0233	0,8693	0,2443
5	32,9063	15,1838	813,1141	28,5152	3,2342	0,9531	0,0915
6	34,7901	15,7210	858,1288	29,2938	3,4626	1,0137	-0,0276
7	36,4841	16,2656	902,4710	30,0412	3,8785	1,0699	-0,1448
8	37,7989	16,7403	930,8641	30,5101	3,8342	1,1098	-0,2316
9	38,8909	17,2570	961,9841	31,0159	3,5051	1,1410	-0,3020
10	39,9271	17,6967	986,0129	31,4008	2,9183	1,1699	-0,3687

Tabela A.20: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	23,2442	10,2543	948,3000	30,7943	0,2175	0,6604	0,5638
2	$33,\!2737$	14,6003	1350,8000	36,7534	$0,\!4391$	0,7907	0,3748
3	45,0265	16,6724	1397,1000	37,3776	0,8915	0,8487	$0,\!2797$
4	96,6487	18,2381	$1527,\!8000$	39,0876	0,8134	0,9065	$0,\!1783$
5	59,1840	19,5646	1703,9000	$41,\!2786$	$0,\!4686$	0,9473	0,1026
6	87,2491	19,8746	$1701,\!5000$	41,2489	-0,0578	0,9720	0,0552
7	84,5747	20,2857	1498,5000	38,7108	0,6311	0,9967	$6.6 \cdot 10^{-3}$
8	$75,\!4292$	20,6640	1576,3000	39,7026	0,6086	1,0039	$-7.7\cdot10^{-3}$
9	122,0112	21,3459	1775,2000	42,1332	2,7341	1,0254	-0,0514
10	$72,\!8355$	22,7593	2181,3000	46,7048	3,5417	1,0698	-0,1444

Tabela A.21: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Constante-linear-quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 70 e máximo igual a 200)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	12,8210	6,5686	191,2564	13,8295	0,9757	0,3572	0,8724
2	21,0063	10,4181	436,7225	20,8979	1,9198	0,5779	0,6660
3	26,8014	12,8276	623,4666	24,9693	2,5560	0,7394	$0,\!4533$
4	30,1740	14,1688	741,4763	27,2301	3,1688	0,8672	0,2479
5	33,1015	15,1044	813,6758	28,5250	3,4088	0,9511	0,0954
6	34,7163	15,6361	856,2025	29,2609	3,6399	1,0101	-0,0202
7	36,2657	16,1806	898,1479	29,9691	3,9632	1,0626	-0,1290
8	37,6712	16,6686	$932,\!6529$	30,5394	4,0556	1,1050	-0,2211
9	38,8862	17,1854	962,7591	31,0284	3,8165	1,1368	-0,2922
10	39,9168	17,6063	984,4739	31,3763	3,1860	1,1655	-0,3583

## $\mathbf{ARX}$

Tabela A.22: Modelo ARX - Estratégia Direta

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	14,2481	6,7464	188,6061	13,7334	3,4066	0,3461	0,8802
2	24,5074	10,8475	442,4382	21,0342	7,0060	$0,\!5509$	0,6965
3	32,0927	13,3731	648,6842	25,4693	10,1937	0,6909	0,5226
4	37,4026	14,7946	785,1579	28,0207	13,0162	0,7854	0,3832
5	41,1032	15,6242	875,0065	29,5805	15,3292	0,8501	0,2773
6	43,3998	16,0103	$932,\!8598$	30,5428	$17,\!1587$	0,8960	0,1972
7	45,3437	16,4489	991,2680	31,4844	18,5196	0,9387	0,1189
8	46,8062	16,7506	1035,8000	32,1844	19,7860	0,9733	0,0528
9	48,4969	17,0635	1074,8000	32,7849	20,5601	0,9988	$2,3 \cdot 10^{-3}$
10	50,4129	17,4340	1110,8000	33,3286	$21,\!3265$	1,0214	-0,0433

Tabela A.23: Modelo ARX - Estratégia Recursiva

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	14,2481	6,7464	188,6061	13,7334	3,4066	0,3461	0,8802
2	19,3071	8,1719	217,6297	14,7523	6,7644	$0,\!3794$	0,8560
3	$25,\!2828$	9,7132	262,0399	16,1876	9,5912	$0,\!4166$	0,8265
4	32,0227	11,3682	324,1831	18,0051	12,3335	$0,\!4605$	0,7879
5	$39,\!5264$	13,0783	402,7309	20,0682	15,0499	0,5081	0,7419
6	47,6644	14,7666	$491,\!9704$	$22,\!1804$	17,6762	0,5538	0,6933
7	56,4015	16,3791	588,2073	$24,\!2530$	20,2003	0,5956	0,6452
8	65,7752	17,9029	689,0241	26,2493	22,6274	0,6332	0,5990
9	75,8243	19,3419	792,3290	28,1483	24,9567	0,6666	0,5557
10	86,5743	20,6821	896,3785	29,9396	27,1860	0,6959	0,5157

Tabela A.24: Modelo ARX - Estratégia DirRec

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	14,2481	6,7464	188,6061	13,7334	3,4066	0,3461	0,8802
2	21,2223	10,2995	463,5953	21,5313	3,7426	0,5371	0,7115
3	26,9869	12,7744	704,4090	26,5407	3,5949	0,6622	0,5615
4	31,0455	14,3896	869,7922	29,4922	3,3920	0,7372	0,4566
5	33,5323	$15,\!3760$	974,8146	31,2220	3,2274	0,7793	0,3928
6	$35,\!3261$	15,9453	$1038,\!5000$	32,2255	3,0669	0,8037	0,3541
7	36,7402	16,4954	1106,7000	33,2669	2,8548	0,8282	0,3141
8	$38,\!1560$	17,0117	1171,4000	34,2261	2,8163	0,8510	$0,\!2757$
9	39,4625	17,5120	1236,8000	35,1687	2,6502	0,8727	0,2385
10	40,8218	17,9581	1286,7000	35,8710	2,5817	0,8890	0,2097

Tabela A.25: Modelo ARX - Estratégia MIMO

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	14,2415	6,7472	188,7764	13,7396	3,4092	0,3461	0,8802
2	24,4993	10,8492	442,7974	21,0428	7,0049	$0,\!5508$	0,6966
3	32,0837	13,3749	649,1470	25,4784	10,1891	0,6909	0,5227
4	37,4000	14,7978	$785,\!6745$	28,0299	13,0084	0,7854	0,3832
5	41,0931	15,6252	875,4549	29,5881	15,3220	0,8501	$0,\!2774$
6	$43,\!3775$	16,0087	933,1457	30,5474	17,1506	0,8959	0,1973
7	45,3294	16,4487	$991,\!5155$	31,4883	18,5078	0,9386	0,1189
8	$46,\!8054$	16,7507	1036,1000	$32,\!1879$	19,7794	0,9732	0,0528
9	48,5016	17,0648	1075,0000	32,7872	$20,\!5605$	0,9988	$2,3 \cdot 10^{-3}$
10	50,4129	17,4340	1110,8000	$33,\!3286$	$21,\!3265$	1,0214	-0,0433

Tabela A.26: Modelo ARX - Estratégia DIRMO

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	14,2415	6,7472	188,7764	13,7396	3,4092	0,3461	0,8802
2	24,4993	10,8492	442,7974	21,0428	7,0049	$0,\!5508$	0,6966
3	32,0837	13,3749	649,1470	$25,\!4784$	10,1891	0,6909	0,5227
4	37,4000	14,7978	$785,\!6745$	28,0299	13,0084	0,7854	0,3832
5	41,0931	15,6252	875,4549	29,5881	15,3220	0,8501	$0,\!2774$
6	$43,\!3775$	16,0087	933,1457	30,5474	17,1506	0,8959	0,1973
7	45,3294	16,4487	$991,\!5155$	31,4883	18,5078	0,9386	0,1189
8	$46,\!8054$	16,7507	1036,1000	$32,\!1879$	19,7794	0,9732	0,0528
9	48,5016	17,0648	1075,0000	32,7872	20,5605	0,9988	$2,3 \cdot 10^{-3}$
10	50,4129	17,4340	1110,8000	33,3286	21,3265	1,0214	-0,0433

# B Apêndice

### B.1 Tabelas UHE Três Marias

#### Algoritmo de aprendizagem preguiçosa

Tabela B.1: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	11,7468	22,0121	4239,7000	65,1133	12,7509	0,7967	0,3653
2	16,0053	27,3869	$5188,\!5000$	72,0315	14,2240	0,9203	$0,\!1530$
3	19,4871	31,3682	5949,6000	77,1336	14,2379	1,0023	$-4.5 \cdot 10^{-3}$
4	22,7791	34,9870	6780,8000	82,3456	14,2997	1,1003	-0,2106
5	25,6721	37,7369	7445,3000	86,2864	14,1499	1,1791	-0,3903
6	28,1050	40,0288	7974,1000	89,2977	14,1499	1,2536	-0,5714
7	29,9460	41,7244	8364,7000	$91,\!4587$	14,3150	1,3148	-0,7288
8	31,3176	42,9872	8719,0000	$93,\!3758$	14,7228	1,3686	-0,8730
9	32,3219	43,9053	8989,6000	94,8137	15,0139	1,4063	-0,9776
10	33,2710	44,6964	9289,9000	96,3839	15,8207	1,4565	-1,1215

Tabela B.2: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	6,6702	8,4442	955,3000	30,9074	1,1096	0,2611	0,9318
2	11,7968	21,1069	2474,7000	49,7461	2,5116	$0,\!4554$	0,7926
3	16,4914	28,4933	4176,6000	64,6268	4,2420	0,6638	$0,\!5593$
4	20,5578	33,5247	5404,4000	$73,\!5147$	5,2191	0,8240	0,3211
5	22,7131	37,3612	6262,7000	79,1373	$5,\!1756$	0,9273	0,1401
6	25,3494	40,7402	7090,5000	84,2050	4,8500	1,0036	$-7.3\cdot10^{-3}$
7	27,1421	42,9787	7538,9000	86,8266	4,4408	1,0554	-0,1138
8	28,5088	44,1812	$7862,\!2000$	88,6693	4,5217	1,0899	-0.1878
9	29,7375	45,7170	8190,2000	90,4997	4,4769	1,0946	-0,1981
10	$30,\!5297$	47,1669	8444,2000	91,8923	4,2447	1,1002	-0,2105

Tabela B.3: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	8,8057	15,8686	2180,0000	46,6910	5,3676	0,4636	0,7851
2	15,6041	25,0778	4001,0000	$63,\!2536$	7,7312	0,6762	0,5428
3	23,7301	31,8529	5534,4000	74,3933	9,1264	0,8196	0,3282
4	24,6400	37,2998	6975,9000	83,5216	10,3900	0,9592	0,0799
5	28,4812	40,8447	8029,6000	89,6080	10,1290	1,0456	-0,0933
6	30,7360	44,0918	9390,0000	96,9020	9,6872	1,0847	-0,1766
7	39,7035	44,9339	9383,7000	96,8694	10,9663	1,1146	-0,2424
8	35,7115	$45,\!5549$	$9329,\!2000$	96,5877	10,8423	1,1334	-0,2847
9	35,2030	47,0815	$9255,\!5000$	96,2053	12,2894	1,1777	-0,3870
10	$44,\!3568$	$49,\!1750$	10950,0000	104,6435	11,4962	1,0907	-0,1896

Tabela B.4: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Direta, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	6,7481	12,2420	978,6895	31,2840	1,0746	0,2642	0,9302
2	12,5334	21,3512	2505,8000	50,0576	2,4902	$0,\!4579$	0,7903
3	17,1044	28,9589	4320,6000	65,7310	4,5108	0,6702	0,5508
4	$21,\!5762$	33,8636	5470,6000	73,9634	5,9818	0,8270	0,3161
5	24,0180	37,6868	6422,7000	80,1415	6,4633	0,9421	0,1124
6	26,0522	41,8931	9943,3000	99,7160	6,9064	1,0140	-0,0282
7	28,2182	$42,\!4572$	7724,3000	87,8878	6,5487	1,0754	-0,1565
8	29,3104	43,4490	7967,1000	89,2587	6,5342	1,1062	-0,2236
9	30,9936	45,2653	8469,8000	92,0315	$6,\!2513$	1,1119	-0,2363
10	37,2669	$46,\!4360$	8565,7000	$92,\!5509$	6,3902	1,1183	-0,2507

Tabela B.5: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	11,7468	22,0121	424,0000	65,1133	12,7509	0,7967	0,3653
2	$15,\!5638$	26,2272	480,2000	69,2982	15,0227	0,8720	0,2395
3	19,9223	31,1390	$619,\!1000$	78,6826	19,0771	1,0827	-0,1723
4	23,8181	34,6725	719,2000	84,8062	$22,\!1037$	1,2310	-0,5153
5	27,3407	37,4562	807,8000	89,8781	25,0124	1,3747	-0,8899
6	30,4050	39,5696	871,3000	93,3457	27,3831	1,4782	-1,1849
7	33,1018	$41,\!3725$	923,8000	96,1126	29,6246	1,5693	-1,4626
8	$35,\!5350$	43,0834	970,0000	98,4880	31,8297	1,6560	-1,7425
9	37,5736	44,3910	1010,1000	$100,\!5029$	34,0236	1,7420	-2,0345
10	39,4400	$45,\!5438$	$1051,\!4000$	$102,\!5354$	$36,\!3084$	1,8353	-2,3682

Tabela B.6: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	6,6702	12,1078	955,0000	30,9074	1,1096	0,2611	0,9318
2	12,0206	21,4932	2483,0000	49,8310	2,4140	$0,\!4549$	0,7931
3	16,6405	29,4002	4269,0000	65,3411	3,5474	0,6440	0,5852
4	20,0893	34,7537	5664,0000	$75,\!2579$	4,5114	0,7855	0,3830
5	23,1457	38,7601	6843,0000	82,7198	5,1983	0,8921	0,2041
6	26,1193	$42,\!4561$	7976,0000	89,3098	5,6000	0,9763	0,0469
7	28,6654	$45,\!5706$	8937,0000	$94,\!5363$	5,8190	1,0353	-0,0719
8	30,8897	48,1192	9710,0000	98,5388	5,8145	1,0731	-0,1517
9	32,3332	49,6274	10336,0000	101,6683	5,7032	1,0977	-0,2048
10	$33,\!1887$	50,7665	10702,0000	103,4483	5,6490	1,1077	-0,2270

Tabela B.7: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	7,5908	14,0514	1638,0000	40,4709	3,9668	0,3835	0,8529
2	13,5276	24,0326	4047,0000	63,6152	7,0514	0,6726	0,5476
3	17,9510	30,5275	5538,0000	74,4194	8,8677	0,8300	0,3111
4	21,5969	34,9949	6578,0000	81,1055	10,1153	0,9326	0,1303
5	24,6473	38,2666	7422,0000	86,1515	10,7451	0,9978	$4.5\cdot10^{-3}$
6	27,6992	41,5238	8239,0000	90,7669	10,9737	1,0483	-0,0989
7	30,4444	44,2256	8933,0000	94,5124	11,2182	1,0807	-0.1678
8	$32,\!3586$	46,4243	9547,0000	97,7092	11,2049	1,1001	-0,2101
9	34,3552	47,7987	10033,0000	100,1638	11,4393	1,1149	-0,2431
10	$36,\!1566$	$49,\!4387$	10528,0000	$102,\!6070$	11,6428	1,1278	-0,2719

Tabela B.8: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia Recursiva, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	6,7481	12,2420	979,0000	31,2840	1,0746	0,2642	0,9302
2	12,1349	21,7129	2536,0000	$50,\!3575$	2,3694	$0,\!4589$	0,7894
3	16,8168	29,8132	4322,0000	65,7391	3,2906	0,6450	0,5839
4	20,7944	35,3491	5715,0000	$75,\!5969$	4,1740	0,7826	0,3876
5	24,0782	39,3377	6741,0000	82,1039	4,7347	0,8756	0,2333
6	31,3132	43,0182	7774,0000	88,1682	5,0471	0,9508	0,0960
7	30,2687	46,1081	8784,0000	93,7238	5,2115	1,0122	-0,0246
8	32,4419	48,6952	9742,0000	98,7020	$5,\!2341$	1,0604	-0,1244
9	34,0256	50,1549	10490,0000	102,4218	$5,\!1725$	1,0920	-0,1925
10	34,7869	51,3870	10914,0000	104,4680	5,1563	1,1055	-0,2221

Tabela B.9: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DirRec, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	11,7468	22,0121	4239,7000	65,1133	12,7509	0,7967	0,3653
2	15,7694	26,8029	4924,4000	70,1738	13,5723	0,8639	0,2537
3	19,3467	30,5975	5751,1000	75,8363	14,2713	0,9422	0,1122
4	22,3892	33,4878	$6477,\!4000$	80,4822	14,5542	0,9984	$3,2 \cdot 10^{-3}$
5	25,2317	35,9693	7158,0000	84,6048	15,2396	1,0606	-0,1250
6	27,6874	37,8578	7599,3000	87,1741	15,8192	1,0963	-0,2019
7	29,5911	39,1720	7933,7000	89,0715	16,5336	1,1293	-0,2753
8	31,2321	$40,\!4353$	8220,7000	90,6681	17,5328	1,1744	-0,3793
9	32,6506	41,4783	8518,0000	92,2929	18,5746	1,2211	-0,4911
10	33,7931	42,2441	8794,3000	93,7778	$19,\!5845$	1,2628	-0,5947

Tabela B.10: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DirRec, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	6,6702	12,1078	955,2643	30,9074	1,1096	0,2611	0,9318
2	11,3737	21,2453	2636,9000	51,3508	0,7459	0,4242	0,8200
3	16,1314	28,9495	4651,6000	68,2030	0,9380	0,5652	0,6806
4	$19,\!4725$	34,6853	$6533,\!2000$	80,8280	0,4906	0,6702	0,5508
5	22,6504	39,5931	8228,9000	90,7131	0,4174	0,7457	0,4439
6	26,1267	$43,\!2792$	9616,5000	98,0639	$0,\!2264$	0,7948	0,3682
7	28,2150	$45,\!4114$	10114,0000	100,5671	0,1324	0,8119	0,3408
8	29,6120	47,5993	10644,0000	103,1683	0,0374	0,8259	0,3178
9	46,1724	48,4960	10850,0000	104,1612	0,0762	0,8309	0,3097
10	34,7478	48,9256	10945,0000	104,6195	0,1083	0,8303	0,3107

Tabela B.11: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DirRec, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	8,8056	15,8683	2180,0000	46,6901	5,3676	0,4636	0,7851
2	13,6973	23,8158	3706,6000	60,8818	8,0650	0,6434	$0,\!5860$
3	22,0628	30,9833	6303,9000	79,3970	10,7442	0,8625	$0,\!2561$
4	23,3078	33,8960	6684,8000	81,7608	11,7248	0,9088	0,1742
5	25,4311	36,3893	7081,1000	84,1490	12,1058	0,9691	0,0608
6	27,8349	$38,\!2559$	7482,3000	86,5005	12,0586	0,9951	$9.7 \cdot 10^{-3}$
7	29,2424	39,9239	8094,7000	89,9704	13,7308	1,0654	-0,1351
8	31,6447	41,9690	8791,6000	93,7638	13,8986	1,0725	-0,1503
9	44,2900	43,2548	8747,0000	93,5256	14,0410	1,0715	-0,1481
10	34,1353	$44,\!4863$	9480,8000	97,3695	12,7720	1,0399	-0,0813

Tabela B.12: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DirRec, Função clq (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	6,7481	12,2420	978,6895	31,2840	1,0746	0,2642	0,9302
2	11,6774	21,2632	2636,0000	51,3421	0,8053	$0,\!4241$	0,8202
3	16,1855	28,9763	$4655,\!2000$	68,2287	0,9556	0,5653	0,6804
4	19,4185	34,6381	$6530,\!3000$	80,8103	0,5128	0,6701	0,5510
5	22,6260	39,5451	8225,0000	90,6916	0,4499	0,7455	0,4442
6	26,4211	43,3222	9616,8000	98,0655	0,2603	0,7947	0,3684
7	28,3150	$45,\!4284$	10120,0000	100,5980	0,1475	0,8120	0,3406
8	29,6882	47,6247	10646,0000	103,1791	0,0414	0,8259	0,3178
9	46,1452	48,5134	10848,0000	104,1545	0,0452	0,8309	0,3096
10	$33,\!4323$	48,8741	10927,0000	104,5322	0,0593	0,8299	0,3113

Tabela B.13: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	9,1884	16,7459	2205,4000	46,9621	7,0424	0,4717	0,7775
2	$14,\!4567$	24,7302	3683,5000	60,6922	10,7205	0,6695	0,5517
3	19,2288	30,7674	5454,6000	73,8553	14,0464	0,8939	0,2010
4	23,2458	35,1702	6808,2000	82,5121	16,7416	1,0760	-0,1578
5	26,6280	38,1282	7777,1000	88,1881	18,7432	1,2092	-0,4623
6	$29,\!5308$	$40,\!4166$	8478,5000	92,0788	20,3853	1,3055	-0,7042
7	31,8300	42,1182	8926,2000	94,4783	21,8930	1,3770	-0,8961
8	33,5611	43,0981	9215,2000	95,9961	22,9759	1,4251	-1,0308
9	35,2931	44,3335	9547,6000	97,7120	23,4514	1,4661	-1,1493
10	36,8073	45,6591	9900,1000	99,4992	23,5830	1,4867	-1,2103

Tabela B.14: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	6,6591	12,0451	950,9000	30,8359	1,1354	0,2607	0,9321
2	11,8135	20,9754	2458,0000	49,5779	2,7384	$0,\!4561$	0,7919
3	16,0197	28,0017	4123,6000	64,2156	4,4369	0,6538	$0,\!5726$
4	$19,\!4265$	32,9943	5369,6000	$73,\!2774$	5,6943	0,8178	0,3313
5	22,4082	36,8414	6363,5000	79,7712	6,4973	0,9503	0,0970
6	25,0963	39,8479	7117,7000	84,3662	6,7338	1,0397	-0,0810
7	27,0462	41,7899	7509,5000	86,6571	6,6904	1,0844	-0,1759
8	$28,\!5391$	43,0184	7831,1000	88,4934	6,7065	1,1125	-0,2377
9	29,8323	44,3451	8150,3000	90,2789	6,8459	1,1388	-0,2968
10	30,4334	$45,\!2740$	8313,5000	91,1784	6,7343	1,1513	-0,3255

Tabela B.15: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	9,2244	13,1715	1054,2000	32,4687	1,2385	0,2792	0,9221
2	$15,\!3793$	22,9070	2735,3000	$52,\!2997$	3,2775	0,4944	0,7556
3	34,6792	30,8280	4805,1000	69,3191	5,6020	0,7262	$0,\!4726$
4	26,4049	37,0659	6709,2000	81,9098	7,4086	0,9006	0,1889
5	32,0697	41,4425	8228,5000	90,7110	7,7765	1,0007	$-1.5 \cdot 10^{-3}$
6	$47,\!4532$	44,5195	9183,1000	95,8285	$7,\!5526$	1,0630	-0,1299
7	43,4249	46,0134	9227,6000	96,0603	7,2054	1,0924	-0,1933
8	34,6723	47,1437	9369,6000	96,7969	7,2875	1,1267	-0,2695
9	37,3449	48,3417	9632,3000	98,1445	7,7417	1,1604	-0,3465
10	37,3610	49,2430	9811,5000	99,0530	7,5156	1,1665	-0,3606

Tabela B.16: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia MIMO, Função Constante-linear-quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	6,7371	12,0396	951,8000	30,8520	1,2777	0,2607	0,9320
2	11,8638	20,9054	2476,1000	49,7607	3,0199	$0,\!4580$	0,7902
3	16,0737	27,9286	4153,7000	64,4488	4,6984	0,6561	0,5695
4	$19,\!4794$	32,8264	5394,6000	73,4482	6,0543	0,8201	0,3274
5	22,6173	36,6448	6400,1000	80,0003	6,9747	0,9533	0,0912
6	26,1690	39,7575	7201,5000	84,8619	$7,\!4155$	1,0452	-0,0924
7	28,2665	41,6065	7522,0000	86,7293	7,4613	1,0844	-0,1759
8	$29,\!5060$	42,8699	7849,1000	88,5949	7,6240	1,1119	-0,2362
9	30,3068	44,1641	8174,0000	90,4100	7,6309	1,1390	-0,2974
10	31,4227	45,1069	8363,8000	91,4539	7,4693	1,1535	-0,3306

Tabela B.17: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Constante (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	9,1884	16,7459	2205,4000	46,9621	7,0424	0,4717	0,7775
2	$14,\!4567$	24,7302	$3683,\!5000$	60,6922	10,7205	0,6695	0,5517
3	19,2288	30,7674	5454,6000	73,8553	14,0464	0,8939	0,2010
4	23,2458	35,1702	6808,2000	82,5121	16,7416	1,0760	-0,1578
5	26,6280	38,1282	7777,1000	88,1881	18,7432	1,2092	-0,4623
6	$29,\!5308$	$40,\!4166$	8478,5000	92,0788	20,3853	1,3055	-0,7042
7	31,8300	42,1182	8926,2000	94,4783	21,8930	1,3770	-0,8961
8	33,5611	43,0981	9215,2000	95,9961	22,9759	1,4251	-1,0308
9	35,2931	44,3335	9547,6000	97,7120	23,4514	1,4661	-1,1493
10	36,8073	45,6591	9900,1000	$99,\!4992$	$23,\!5830$	1,4867	-1,2103

Tabela B.18: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Linear (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	6,6591	12,0451	950,9000	30,8359	1,1354	0,2607	0,9321
2	11,8135	20,9754	2458,0000	49,5779	2,7384	$0,\!4561$	0,7919
3	16,0197	28,0017	4123,6000	64,2156	4,4369	0,6538	0,5726
4	19,4265	32,9943	5369,6000	73,2774	5,6943	0,8178	0,3313
5	22,4082	36,8414	6363,5000	79,7712	6,4973	0,9503	0,0970
6	25,0963	39,8479	7117,7000	84,3662	6,7338	1,0397	-0,0810
7	27,0462	41,7899	7509,5000	86,6571	6,6904	1,0844	-0,1759
8	28,5391	43,0184	7831,1000	88,4934	6,7065	1,1125	-0,2377
9	29,8323	44,3451	8150,3000	90,2789	6,8459	1,1388	-0,2968
10	30,4334	$45,\!2740$	8313,5000	$91,\!1784$	6,7343	1,1513	-0,3255

Tabela B.19: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	9,2244	13,1715	1054,2000	32,4687	1,2385	0,2792	0,9221
2	15,3793	22,9070	2735,3000	52,2997	3,2775	0,4944	0,7556
3	34,6792	30,8280	4805,1000	69,3191	5,6020	0,7262	$0,\!4726$
4	26,4049	37,0659	$6709,\!2000$	81,9098	7,4086	0,9006	0,1889
5	32,0697	41,4425	8228,5000	90,7110	7,7765	1,0007	$-1.5\cdot10^{-3}$
6	$47,\!4532$	44,5195	9183,1000	$95,\!8285$	$7,\!5526$	1,0630	-0,1299
7	43,4249	46,0134	9227,6000	96,0603	7,2054	1,0924	-0,1933
8	34,6723	47,1437	9369,6000	96,7969	7,2875	1,1267	-0,2695
9	37,3449	48,3417	9632,3000	98,1445	7,7417	1,1604	-0,3465
10	37,3610	49,2430	9811,5000	99,0530	7,5156	1,1665	-0,3606

Tabela B.20: Modelo Obtido pelo Algoritmo de aprendizagem preguiçoso - Estratégia DIRMO, Função Constante-linear-quadrática (Mínimo número de vizinhos igual a 100 e máximo igual a 300)

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	6,7371	12,0396	951,8000	30,8520	1,2777	0,2607	0,9320
2	11,8638	20,9054	2476,1000	49,7607	3,0199	$0,\!4580$	0,7902
3	16,0737	27,9286	4153,7000	64,4488	4,6984	0,6561	0,5695
4	$19,\!4794$	32,8264	5394,6000	73,4482	6,0543	0,8201	0,3274
5	22,6173	36,6448	6400,1000	80,0003	6,9747	0,9533	0,0912
6	26,1690	39,7575	7201,5000	84,8619	$7,\!4155$	1,0452	-0,0924
7	$28,\!2665$	41,6065	7522,0000	86,7293	7,4613	1,0844	-0,1759
8	$29,\!5060$	42,8699	7849,1000	88,5949	7,6240	1,1119	-0,2362
9	30,3068	44,1641	8174,0000	90,4100	7,6309	1,1390	-0,2974
10	$31,\!4227$	45,1069	8363,8000	$91,\!4539$	7,4693	1,1535	-0,3306

#### $\mathbf{ARX}$

Tabela B.21: Modelo ARX - Estratégia Direta

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	7,5309	12,7655	981,6346	31,3310	1,5922	0,2539	0,9355
2	14,1541	22,8375	2599,2000	50,9826	3,7166	$0,\!4229$	0,8212
3	19,7873	30,5398	4456,7000	66,7583	5,9168	0,5721	0,6727
4	23,7440	35,3974	5834,6000	76,3844	7,9252	0,6748	0,5446
5	26,9352	38,5783	6905,4000	83,0990	9,4832	0,7509	$0,\!4362$
6	29,7118	41,2491	7697,0000	87,7326	10,6391	0,8051	0,3518
7	31,9784	42,6609	8030,9000	89,6154	11,4734	0,8306	0,3101
8	34,0331	43,9511	8346,7000	91,3601	12,0112	0,8511	$0,\!2757$
9	35,6581	$45,\!2911$	8680,1000	93,1672	12,4383	0,8705	0,2421
10	36,6034	46,1415	8870,0000	$94,\!1805$	12,7613	0,8819	0,2222

Tabela B.22: Modelo ARX - Estratégia Recursiva

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	7,5309	12,7655	981,6346	31,3310	1,5922	0,2539	0,9355
2	15,0472	23,6274	2575,7000	50,7518	3,8996	0,4193	0,8242
3	22,6118	32,9321	4511,8000	67,1702	6,2603	0,5644	0,6815
4	29,9566	$40,\!5760$	$6167,\!5000$	78,5332	8,4943	0,6653	0,5574
5	37,5261	47,2186	7734,4000	87,9452	10,6227	0,7461	0,4433
6	45,3189	52,8403	9154,4000	95,6789	12,6897	0,8094	0,3449
7	53,5496	57,3251	10298,0000	101,4805	14,7064	0,8532	$0,\!2720$
8	$61,\!8536$	$61,\!5996$	11462,0000	107,0621	16,6759	0,8923	0,2037
9	69,9328	65,3079	12495,0000	111,7827	18,5899	0,9218	$0,\!1504$
10	$77,\!4825$	68,1074	13174,0000	114,7778	20,4689	0,9350	0,1257

Tabela B.23: Modelo ARX - Estratégia DirRec

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	7,5309	12,7655	981,6346	31,3310	1,5922	0,2539	0,9355
2	12,1532	21,9169	2814,2000	53,0490	1,6304	0,4169	0,8262
3	16,2450	29,1847	5028,4000	70,9115	1,5369	0,5580	0,6887
4	20,1415	$35,\!2708$	7129,9000	84,4389	1,4627	0,6631	0,5602
5	23,2892	40,1595	8892,4000	94,2995	1,3858	0,7381	$0,\!4551$
6	25,9705	$43,\!4769$	10070,0000	100,3475	1,3287	0,7847	0,3842
7	28,2664	$45,\!5647$	10556,0000	102,7435	1,2982	0,8033	0,3548
8	29,9092	$47,\!4816$	10928,0000	104,5388	1,2660	0,8173	0,3320
9	31,1298	48,3613	11153,0000	105,6098	1,2666	0,8241	0,3208
10	32,2171	48,8393	11160,0000	105,6421	1,2228	0,8237	0,3216

Tabela B.24: Modelo ARX - Estratégia MIMO

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	7,5582	12,8043	985,7000	31,3956	1,6069	0,2540	0,9355
2	14,1920	22,8957	2608,8000	51,0765	3,7374	$0,\!4230$	0,8211
3	19,8180	30,5971	4471,1000	66,8662	5,9409	0,5722	0,6726
4	23,7489	35,4323	5850,1000	$76,\!4857$	7,9448	0,6748	0,5446
5	26,9118	38,5847	6918,9000	83,1801	9,4956	0,7507	$0,\!4365$
6	29,6582	41,2300	7707,6000	87,7930	10,6367	0,8047	0,3524
7	31,9020	42,6143	8037,2000	89,6503	11,4576	0,8301	0,3110
8	33,9526	43,8946	8348,9000	$91,\!3725$	11,9851	0,8505	$0,\!2767$
9	35,6091	$45,\!2544$	8679,7000	93,1649	12,4276	0,8702	0,2428
10	36,6034	46,1415	8870,0000	94,1805	12,7613	0,8819	0,2222

Tabela B.25: Modelo ARX - Estratégia DIRMO

Passos(dias)	MAPE	MAE	MSE	RMSE	PBIAS	RSR	NSE
1	7,5582	12,8043	985,7000	31,3956	1,6069	0,2540	0,9355
2	14,1920	$22,\!8957$	2608,8000	51,0765	3,7374	$0,\!4230$	0,8211
3	19,8180	30,5971	4471,1000	66,8662	5,9409	0,5722	0,6726
4	23,7489	35,4323	5850,1000	$76,\!4857$	7,9448	0,6748	0,5446
5	26,9118	38,5847	6918,9000	83,1801	9,4956	0,7507	$0,\!4365$
6	29,6582	41,2300	7707,6000	87,7930	10,6367	0,8047	0,3524
7	31,9020	42,6143	8037,2000	89,6503	$11,\!4576$	0,8301	0,3110
8	33,9526	43,8946	8348,9000	$91,\!3725$	11,9851	0,8505	$0,\!2767$
9	35,6091	$45,\!2544$	8679,7000	93,1649	12,4276	0,8702	0,2428
10	36,6034	46,1415	8870,0000	94,1805	12,7613	0,8819	0,2222

## Bibliografia

- Aguirre, Luis Antonio (2007). Introdução à Identificação de Sistemas Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais. 3ª ed. Editora UFMG.
- Akaike, Hirotogu (1973). "Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle". Em: *Proceeding of The Second International Symposium Information*. Springer New York, pp. 267–281.
- Bao, Yukun, Tao Xiong e Zhongyi Hu (2014). "Multi-step-ahead Time Series Prediction Using Multiple-Output Support Vector Regression". *Neurocomputing* 129 (0), pp. 482–493.
- Batista, André Luiz França (2009). "Modelos de Séries Temporais e Redes Neurais Artificiais na Previsão de Vazão". Dissertação de Mestrado. Lavras, MG: Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas.
- Beven, Keith J. (2012). Rainfall Runoff Modelling The Primer. 2<sup>a</sup> ed. John Wiley.
- Bhagwat, Parag P. e Rajib Maity (2012). "Multi-Ahead River Flow Prediction Using LS-SVR at Daily Scale". *Journal of water Resource and Protection* (4), pp. 528–539.
- Birattari, Mauro e Gianluca Bontempi (1999). The Lazy Learning Toolbox. Rel. téc. Université Libre de Bruxelles.
- Bontempi, Gianluca (2008). "Long Term Time Series Prediction with Multi-Input Multi-Output Local Learning". Em: Proceedings of the 2nd European Symposium on Time Series Prediction (TSP).
- Bontempi, Gianluca e Souhaib Ben Taieb (2011). "Conditionally Dependent Strategies for Multiple-step-ahead Prediction in Local Learning". *International Journal of Fore-casting* 27 (3), pp. 689–699.
- Box, George E. P., Gwilym M. Jenkins e Gregory C. Reinsel (2008). *Time Series Analysis: Forecasting and Control.* 4<sup>a</sup> ed. Wiley.
- Castro, Bruno Villani Carvalho (2011). "Modelagem e Predição de Séries Temporais de Afluência Utilizando o Preditor Linear Local". Monografia de Final de Curso. Universidade Federal de Minas Gerais.

- Chevillon, Guillaume (2007). "Direct Multi-Step Estimation and Forecasting". *Journal of Economic Surveys* 21 (4), pp. 746–785.
- De Souza, Rodrigo Clemente Thom (2008). "Previsão de Séries Temporais Utilizando Rede Neural Treinada por Filtro de Kalman e Evolução Diferencial". Dissertação de Mestrado. Curitiba, PR: Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
- El-Shafie, Ahmed, Mahmoud Reda Taha e Aboelmagd Noureldin. "A Neuro-Fuzzy Model for Inflow Forecasting of The Nile River at Aswan High Dam". Water Resources Management (3).
- Emiliano, Paulo César, Elayne Penha Veiga, Mário Javier Ferrua Vivanco e Fortunato Silva de Menezes (2010). "Critério de informação de Akaike versus Bayesiano Análise comparativa". Em: Anais do XIX SINAPE Simpósio Nacional de probabilidade e Estatística, pp. 1–6.
- Figueredo, Clodoaldo José (2008). "Previsão de Séries Temporais Utilizando a Metodologia Box e Jenkins e Redes Neurais para Inicialização de Planejamento e Controle de Produção". Dissertação de Mestrado. Curitiba, PR: Universidade do Paraná.
- Franses, Philip Hans e Rianne Legerstee (2010). "A Unifying View on Multi-Step Forecasting Using an Autoregression". *Journal of Economic Surveys* 3, pp. 389–401.
- Haibin, Cheng, Tan Pang-Ning, Gao Jing e Scripps Jerry (2006). "Multistep-Ahead Time Series Prediction". Em: Advances in Knowledge Discovery and Data Mining. Ed. por Wee-Keong Ng, Masaru Kitsuregawa, Jianzhong Li e Kuiyu Chang. Vol. 3918. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, pp. 765–774.
- Kentel, Elcin (2009). "Estimation of River Flow by Artificial Neural Networks and Identification of Input Vectors Susceptible to Producing Unreliable Flow Estimates". *Journal of Hydrology* 375 (3-4), pp. 481–488.
- Kovács, Zsolt L. (2000). Redes Neurais Artificiais Fundamentos e Aplicações. 4ª ed. Livraria da Física.
- Leung, Chi-Sing, Young G. H., Sum J. e Wing kay Kan (1999). "On the Regularization of Forgetting Recursive Least Square". *IEEE Transactions on Neural Networks* 10, pp. 1482–1486.
- Ljung, Lennart (1987). System Identification Theory for the user. 2<sup>a</sup> ed. Prentece Hall.
- Lopes, Bruno Eduardo (2008). "Método Auxiliar, Baseado em Autovalores, para Seleção de Atrasos da Saída em Modelos Lineares e Não-Lineares". Dissetação de Mestrado. Ipatinga, MG: Centro Universitário do Leste de Minas Gerais.
- Maitelli, André Laurindo e Takashi Yoneyama (2002). Computational Methods in Biomaterials, Biotecnology and Biomedical Systems. 1<sup>a</sup> ed. Kluwer Academic.
- Marcellino, Massimiliano (2006). "A comparison of Direct and Iterated Multistep AR methods for Forecasting Macroeconomic Time Series". *Journal of Econometrics* 135, pp. 499–526.

- Ogata, Katsuhiko (2011). Engenharia de Controle Moderno. Ed. por São Paulo. Pearson Prentice Hall.
- Pianosi, F. e L. Raso (2012). "Dynamic Modeling of Predictive Uncertainty by Regression on Absolute Errors". Water Resources Research 48.3, pp. 1–11.
- Ping, Zhao Cheng, Liang Chuan e Guo Hai Wei (2011). "Research on Hydrology Time Series Prediction Based on Grey Theory and Support Vector Regression". Em: *International Conference on Computer Distributed Control and Intelligent Environmental Monitoring*, pp. 1673–1676.
- Piotrowski, Adam P. e Jaroslaw J. Napiorkowski (2011). "Optimizing Neural Networks for River Flow Forecasting Evolutionary Computation Methods Versus the Levenberg-Marquardt". *Journal of Hydrology* 407 (1-4), pp. 12–27.
- Rennó, Camilo Daleles (2004). "Construção de um Sitema de Análise e Simulação Hidrológica Aplicação a Bacias Hidrográficas". Tese de doutorado. São José dos Campos, SP: Pós-Graduação e Sensoriamento Remoto INEP.
- Rissanen, J. (1978). "Modeling by Shortest Data Description". *Automatica* 14 (5), pp. 465–471.
- Sang, Yan Fang (2013). "A Review on the Applications of Wavelet Transform in Hydrology Time Series Analysis". Atmospheric Research (122), pp. 8–15.
- Schwarz, Gideon (1978). "Estimating the Dimension of a Model". The Annal of Statistics 6 (2), pp. 461–464.
- Seghouane, Abd-Krim, Mariza Bekana e Gilles Fleury (2003). "A Small Sample Model Selection Criterion Based on Kullback's Symmetric Divergence". Em: Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003. Proceedings. (ICASSP'03). 2003 IEEE International Conference on, pp. VI–145–8.
- Sen, Zekâi (2010). Fuzzy Logic and Hydrological Modeling. 1<sup>a</sup> ed. CRC Press.
- Sáfadi, Thelma (2004). "Uso de Séries Temporais na Análise de Vazão de Água na Represa de Furnas". Ciência e Agrotecnologia 28, pp. 142–148.
- Silva, Viviane Cota (2004). "Predição de Séries Temporais Utilizando o Preditor Linear Local Aplicação a Sistemas Reais". Dissertação de Mestrado. Belo horizonte, MG: Universidade Federal de Minas Gerais.
- Sobral, Thales E. L. e Gilmar Barreto (2011). "Análise dos Critérios de Informação para a Seleção de Ordem em Modelos Auto-Regressivos". Em: *X Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*, pp. 379–382.
- Sorjamaa, Antti e Amaury Lendasse (2006). "Time Series Prediction Using DirRec Strategy". Em: European Symposium on Artificial Neural Networks, pp. 143–148.
- Sorjamaa, Antti, Jin Hao, Nima Reyhani, Yongnan Ji e Amaury Lendasse (2007). "Methodology for Long-Term Prediction of Time Series". *Neurocomputing* 70, pp. 2861–2869.
- Taieb, Souhaib Ben, Gianluca Bontempi, Antti Sorjamaa e Amaury Lendasse (2009). "Long-term Prediction of time Series by Combining Direct and MIMO Strategies".

- Neural Networks, IEEE INNS ENNS International Joint Conference on 0, pp. 3054–3061.
- Taieb, Souhaib Ben, Gianluca Bontempi, Amir F. Atiya e Antti Sorjamaa (2012). "A Review and Comparison of Strategies for Multi-step Ahead Time Series Forecasting Based on he NN5 Forecasting Competition". Expert Systems with Applications 39 (8), pp. 7067–7083.
- Tucci, Carlos E. M. (2005). Modelos Hidrológicos. 2ª ed. Editora da UFRGS.
- (2007). Hidrologia Ciência e Aplicação. 4ª ed. Editora da IFRGS.
- Zambrano-Bigiarini, Mauricio (2010). "On the Effects of Hydrological Uncertainty in Assessing the Impacts of Climate Change on Water resources". PhD Thesis. Universit Degi Studi Di Trento, p. 293.