

Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Síntese de Controladores Robustos via Otimização Evolutiva Multiobjetivo

Wagner Eustáquio Gomes Bachur

Texto submetido à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador:
Lucas S. Batista

Co-orientadores:
Jaime A. Ramírez
Eduardo N. Gonçalves

Belo Horizonte, 15 de setembro de 2017.

Síntese de Controladores Robustos via Otimização Evolutiva Multiobjetivo

Resumo

Este trabalho aborda a síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída para sistemas dinâmicos incertos lineares invariantes no tempo, representados por modelos de incerteza paramétrica politópicos. Em uma análise multiobjetivo, as finalidades do projeto são atender às especificações da resposta de rastreamento do sinal de referência, a rejeição de distúrbios e a atenuação do efeito de ruídos de medição. As especificações de projeto são quantificadas em termos das normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 das funções de transferência em malha fechada. A principal contribuição desse trabalho é caracterizada pela implementação de programação semi-infinita em uma abordagem multiobjetivo, assistida por um método de auxílio à tomada de decisão multicritério. Essa ferramenta visa o projeto de controladores robustos e a redução do esforço de controle, com o intuito de garantir as especificações da resposta de rastreamento em conjunto com os demais objetivos, válidos tanto para sistemas contínuos ou discretos no tempo. A aplicação conjunta de técnicas de otimização multiobjetivo aliadas à análise multicritério, algoritmos evolutivos e programação semi-infinita tipo “minimax” definem uma metodologia inédita adotada neste trabalho. É proposto um procedimento de projeto composto por três etapas, utilizando-se um algoritmo evolutivo multiobjetivo na etapa de síntese, uma técnica de auxílio à tomada de decisão multicritério na etapa intermediária e o algoritmo *Branch-And-Bound* na etapa final de análise, validando-se a robustez do controlador obtido nas etapas anteriores. Esse procedimento é aplicado a diversos estudos de caso que demonstram a eficácia do método para o atendimento dos objetivos de projeto e suas restrições. Os resultados apresentados atendem às várias especificações e apontam para o possível aumento da vida útil de alguns elementos finais de controle e de suas instalações industriais. Além disso, o estudo apresentado relativo ao esforço de controle também mostra a possibilidade de se controlar, com melhor desempenho, alguns tipos de variáveis presentes no ambiente industrial, aumentando-se a segurança do processo, do meio ambiente e da integridade física dos colaboradores em geral.

Robust Controllers Synthesis via Multiobjective Evolutionary Optimization

Abstract

This work deals with the synthesis of robust dynamic output-feedback controllers for time invariant linear uncertain dynamic systems represented by polytopic parametric uncertainty models. In a multiobjective analysis, the project's aim is to meet the specifications of the reference signal tracking response, disturbance rejection and measurement noise effect attenuation. The design specifications are quantified in terms of \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 norms closed-loop transfer functions. The main contribution of this work is characterized by the implementation of semi-infinite programming in a multiobjective approach, assisted by multicriteria decision making method as a tool for the design of robust controllers and a reduction of effort control, in order to ensure the tracking response specifications in conjunction with other objectives, valid for continuous or discrete-time systems. The joint application of multiobjective optimization techniques combined with the multicriteria analysis, evolutionary algorithms and semi-infinite programming type "minimax" define a new methodology adopted in this work. The proposed synthesis procedure consists of three steps, using a multiobjective evolutionary algorithm in the synthesis step, an aid technique of multicriteria decision making in the intermediate step and the Branch-And-Bound algorithm in the final analysis step, validating the robustness of the controller obtained in the preceding stages. This procedure is applied to several case studies that demonstrate the effectiveness of the method for the fulfillment of project objectives and constraints. The presented results meet the various specifications and point out to the possible increase of the lifetime of some final control elements and their industrial facilities. In addition, the presented study for the control effort also shows the possibility of control, with better performance, of some types of variables in the industrial environment, increasing the safety of the process, environmental, and physical integrity of the employees in general.

Agradecimentos

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da UFMG pela confiança, oportunidade, motivação e condições necessárias para o pleno desenvolvimento e finalização deste trabalho.

Sou muitíssimo grato ao meu orientador Lucas de Souza Batista e aos co-orientadores Jaime Arturo Ramírez e Eduardo Nunes Gonçalves, pela confiança, dedicação e paciência ao orientar, ensinar e compartilhar seus imensos conhecimentos na área de Controle e Otimização de Sistemas, sem os quais certamente este trabalho não poderia ter sido concretizado.

Agradeço também à todos os membros docentes, técnicos-administrativos e colegas discentes do PPGEE, em especial aos professores com os quais tive a honra de ter sido aluno no curso de doutorado, entre eles Lucas de Souza Batista, Rodney Rezende Saldanha, Eduardo Gontijo Carrano, Fernando de Oliveira Souza e José Osvaldo Saldanha Paulino, os quais sempre que solicitados prontamente prestaram o apoio necessário com toda dedicação e profissionalismo.

Agradeço também aos demais professores membros da Banca Examinadora da Defesa de Tese, pelas suas valiosas contribuições para o aprimoramento do trabalho realizado e de seu texto final.

Lista de Figuras

3.1.	Diagrama de blocos geral do sistema de controle	26
3.2.	Distribuição dos vetores de peso e ilustração da atribuição das soluções a diferentes subpopulações (ilhas) evoluídas ao longo do algoritmo.	33
3.3.	Distribuição dos vetores de peso dentro de uma região preferida no espaço de objetivos.	34
3.4.	Ilustração do MDGR considerando as alternativas $\mathbf{a} = (0,6 \ 1)$ e $\mathbf{b} = (0,5 \ 1,5)$ em uma fronteira Pareto estimada	39
3.5.	Ilustração da medida $d(\mathbf{a}_r, \mathbf{r})$ entre um vetor de referência \mathbf{r} e a alternativa correspondente selecionada \mathbf{a}	40
3.6.	Fronteiras arbitrárias de teste utilizadas na avaliação do método MDGR. Cada uma delas é representada por 30 pontos não dominados.	41
3.7.	Ilustração do algoritmo <i>BnB - parte 1</i>	49
3.8.	Ilustração do algoritmo <i>BnB - parte 2</i>	50
4.1.	Sistema de controle de nível de dois tanques interligados	58
4.2.	Fronteira Pareto estimada erro x ruído com o controlador K_1 escolhido	62
4.3.	Resposta transitória da PV do sistema em malha fechada para o vértice 1	63
4.4.	Resposta transitória do modelo de referência otimizado	63
4.5.	Resposta da PV do controlador K_1 robusto.	64
4.6.	Resposta da CV do controlador K_1 robusto.	64

4.7. Fronteira Pareto estimada erro x ruído com o controlador K_2 escolhido, com restrição em $\epsilon_d = 4$	66
4.8. Resposta da PV do controlador K_2 robusto com restrição em $\epsilon_d = 4$	67
4.9. Resposta da CV do controlador K_2 robusto com restrição em $\epsilon_d = 4$	67
4.10. Fronteira Pareto estimada ruído x distúrbio com o controlador K_3 escolhido	69
4.11. Resposta da CV do controlador robusto k_5 com restrição em $\epsilon_e = 0,06$. . .	70
4.12. Resposta da CV do controlador robusto K_3 com restrição em $\epsilon_e = 0,06$. .	70
4.13. Sistema Dupla Massa/Mola	73
4.14. Fronteira Pareto estimada para a escolha do controlador robusto K_4 , irrestrito, utilizando-se o MDGR e o AHP.	74
4.15. Resposta da PV do controlador robusto K_4 , irrestrito, utilizando-se o MDGR e o AHP.	76
4.16. Resposta da CV do controlador robusto K_4 , irrestrito, utilizando-se o MDGR e o AHP	76
4.17. Diferença entre instabilidade e estabilidade do sistema mostrada pela distribuição dos polos	80
4.18. Fronteiras Pareto estimadas com os critérios <i>ruído</i> e <i>distúrbio</i> , sendo os controladores K_{5a} (infactível) e K_{5b} (factível)	81
4.19. Superfícies dos valores de norma da função de transferência $\ T_{cd}\ _\infty$ em função de β e σ	83
4.20. Curva de nível dos valores de norma relativos à função de transferência $\ T_{cd}\ _\infty$	84
4.21. Superfície do valor de norma relativo à função de transferência $\ T_{un}\ _2$. . .	84
A.1. Diagrama de blocos de um processo de otimização específico	97
A.2. Estrutura genérica hierárquica do AHP.	105
A.3. Mutação diferencial e recombinação no AED	111

A.4. Distribuição das soluções candidatas do AED em uma função objetivo quadrática em $t = 1$	111
A.5. Distribuição das soluções candidatas do AED em uma função objetivo quadrática em $t=10$	112
A.6. Distribuição das soluções candidatas do AED em uma função objetivo quadrática em $t=20$	112
B.1. Fronteira Pareto estimada com o controlador K_6 escolhido pelo MDGR e marcado com *.	116
B.2. Resposta da PV do controlador K_6 robusto.	117
B.3. Resposta da CV do controlador K_6 robusto.	117
B.4. Fronteira Pareto estimada com o controlador K_7 escolhido pelo MDGR e marcado com *.	119
B.5. Resposta da PV do controlador K_7 robusto.	120
B.6. Resposta da CV do controlador K_7 robusto.	120
B.7. Fronteira Pareto estimada com o controlador K_8 escolhido pelo MDGR e marcado com *, com restrição em $\epsilon_r = 1$	122
B.8. Resposta da PV do controlador K_8 robusto, com restrição em $\epsilon_r = 1$	123
B.9. Resposta da CV do controlador K_8 robusto, com restrição em $\epsilon_r = 1$	123
B.10. Fronteira Pareto estimada com o controlador K_9 escolhido pelo MDGR e marcado com *, com restrição em $\epsilon_e = 0,5$	125
B.11. Resposta da PV do controlador K_9 robusto com restrição em $\epsilon_e = 0,5$. . .	126
B.12. Resposta da CV do controlador K_9 robusto com restrição em $\epsilon_e = 0,5$. . .	126

Lista de Tabelas

3.1. Resultados encontrados pelo método MDGR nas fronteiras arbitrárias de teste.	42
4.1. Alg. Evolucionário Multiobjetivo Multipopulacional Baseado em Preferências-Tabela 1	56
4.2. Alg. Evolucionário Multiobjetivo Multipopulacional Baseado em Preferências-Tabela 2	79
A.1. Escala quantitativa fundamental do AHP.	106
A.2. Índice de consistência aleatório em função da ordem da matriz.	106

Lista de Algoritmos

3.1. Pseudocódigo MOEA-P	36
3.2. Pseudocódigo MDGR	39
3.3. Pseudocódigo para a Síntese do Controle Robusto.	52
A.1. Pseudocódigo Básico Evolução Diferencial (AED)	109

Sumário

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	ix
Lista de Algoritmos	xi
Nomenclatura	1
Simbolismo	3
1. Introdução	7
1.1. Apresentação	7
1.2. Contexto Histórico	9
1.3. Objetivos da Tese	11
1.4. Contribuições do Trabalho	12
1.5. Estrutura do Trabalho	13
2. Exame da Literatura	17
2.1. Introdução	17
2.2. Trabalhos Relacionados e Contrapontos	20
2.3. Conclusão	23
3. Abordagem Proposta para a Síntese de Controle Robusto	25
3.1. Introdução	25
3.2. Formulação do Problema de Controle Robusto	25
3.3. Proposta de Solução do Problema de Controle no Espaço de Parâmetros do Controlador	30
3.3.1. Etapa de Síntese	30
3.3.2. Etapa de Auxílio à Tomada de Decisão Multicritério	35
3.3.3. Etapa de Análise	44
3.3.4. Visão Geral do Procedimento de Síntese do Controle Robusto	51

3.4. Conclusão	53
4. Resultados	55
4.1. Introdução	55
4.2. Parametrização Geral do MOEA-P	56
4.3. Sistemas em Tempo Discreto com Abordagem Multiobjetivo	56
4.3.1. Sistema de Tanques Industriais Interligados	56
4.3.2. Sistema Mecânico tipo Dupla Massa/Mola	72
4.4. Sistemas em Tempo Contínuo com Abordagem Multiobjetivo	77
4.5. Conclusão	85
5. Conclusão	87
5.1. Sumário das Contribuições da Tese	87
5.2. Sugestões para a Continuidade do Trabalho e Pesquisas Futuras	89
A. Conceitos Preliminares	91
A.1. Normas de Sinais e Sistemas	91
A.1.1. Definição de Normas de Sinais e Sistemas	91
A.1.2. Cálculo de Normas e Custos	93
A.1.3. Conclusão	94
A.2. Otimização Escalar e Vetorial	95
A.2.1. Introdução à Otimização Escalar ou Mono-objetivo	95
A.2.2. Introdução à Otimização Vetorial ou Multiobjetivo	97
A.2.3. Conclusão	102
A.3. Tomada de Decisão Multicritério	103
A.3.1. Introdução	103
A.3.2. Suporte à Tomada de Decisão	103
A.3.3. Conclusão	106
A.4. Algoritmo Evolução Diferencial (AED)	107
A.4.1. Introdução	107
A.4.2. AED Clássico	107
A.4.3. Algoritmo Evolução Diferencial Multipopulacional	113
A.4.4. Conclusão	114
B. Resultados Adicionais	115
Referências	127

Nomenclatura

A menos que seja definido de forma diferente no texto, a notação empregada neste trabalho assume o significado listado a seguir.

ACE	Algoritmo Cone-Elipsoidal
AED	Algoritmo Evolução Diferencial
MOEA	Algoritmo Evolucionário Multiobjetivo
MOEA-P	Algoritmo Evolucionário Multiobjetivo Multipopulacional Baseado em Preferências
AHP	<i>Analytic Hierarchy Process</i> : Processo Analítico Hierárquico
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i> : Desigualdade Matricial Bilinear
BnB	Algoritmo <i>Branch-And-Bound</i>
CLP	Controlador Lógico Programável
EFC	Elemento Final de Controle
ISE	<i>Integral of the Square of the Error</i> : Integral do Quadrado do Erro
IAE	<i>Integral of the Absolute Magnitude of the Error</i> : Integral do Valor Absoluto do Erro
ITAE	<i>Integral of Time Multiplied by Absolute of the Error</i> : Integral do Tempo Multiplicado pelo Valor Absoluto do Erro
ITSE	<i>Integral of Time Multiplied by the Squared Error</i> : Integral do Tempo Multiplicado Pelo Quadrado do Erro
LQG	<i>Linear-Quadratic-Gaussian</i> : Linear-Quadrático-Gaussiano
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> : Desigualdade Matricial Linear
LTI	<i>Linear Time Invariant System</i> : Sistema Linear Invariante no Tempo

MATLAB	<i>Matrix Laboratory</i> : Laboratório Matricial
MDGR	Método de Decisão pelo Ganho Relativo
MIMO	<i>Multiple Input, Multiple Output</i> : Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas
MTDM	Método de Tomada de Decisão Multicritério
PID	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
PMO	Problema Multiobjetivo
RMS	<i>Root Mean Squared</i> : Raiz Quadrada do Valor Médio ao Quadrado
SDP	<i>Semidefinite Programming</i> : Programação Semidefinida
SeDuMi	<i>Self-Dual-Minimization</i>
SISO	<i>Single Input, Single Output</i> : Uma Entrada, Uma Saída
SLIT	Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Symbolismo

A menos que seja definido de forma diferente no texto, a notação empregada neste trabalho assume o significado listado a seguir.

\triangleq	igual por definição
\exists	existe
\in	pertence a
\subset	está contido em
\cup	união
\mathbb{N}	conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$
\mathbb{R}	corpo dos números reais
∇f	gradiente (ou subgradiente) da função f
$ \lambda $	valor absoluto do escalar λ
ϵ	precisão relativa usada como critério de parada no algoritmo BnB
I, I_d	matriz identidade, matriz identidade de ordem $d \times d$
$\det(A)$	determinante da matriz A
$\rho(A)$	posto da matriz A
$\lambda(A)$	espectro da matriz A , ou seja, conjunto dos autovalores da matriz A
$\lambda_i(A)$	i -ésimo autovalor da matriz A
δ	restrição de projeto para norma \mathcal{H}_2
δ_c	custo ϵ -garantido \mathcal{H}_2
$\delta_{c.g.}$	custo garantido \mathcal{H}_2
$\delta_{p.c.}$	pior caso da norma \mathcal{H}_2 no conjunto Θ

γ_c	custo ε - garantido \mathcal{H}_∞
$\gamma_{c.g.}$	custo garantido \mathcal{H}_∞
$\gamma_{p.c.}$	pior caso da norma \mathcal{H}_∞ no conjunto Θ
$\bar{\sigma}(A)$	valor singular máximo da matriz A
α	vetor de coeficientes da combinação convexa ou de parâmetros incertos
Θ	conjunto infinito de pontos do domínio politópico de incerteza
$\tilde{\Theta}$	conjunto finito de pontos do domínio politópico de incerteza
Ω	conjunto factível contendo restrições e vetor de parâmetros
A^*	transposta complexa conjugada da matriz A
*	em matrizes simétricas, corresponde a termos simétricos em relação à diagonal
$\text{diag}(\cdot)$	matriz bloco-diagonal, sendo a seqüência de blocos dada pelo argumento
$E \cdot$	esperança matemática do argumento
$\mathcal{L}_2[0, \infty)$	espaço dos sinais contínuos de energia limitada, i.e., $\int_0^\infty f^T(t)f(t)dt < \infty$
$l_2[0, \infty)$	espaço dos sinais discretos de energia limitada, i.e., $\sum_0^\infty f^T(k)f(k) < \infty$
\mathcal{P}	politopo de matrizes
$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	realização da matriz de transferência $T = C(sI - A)^{-1}B + D$
T	matriz de transferência
$\text{sup}(T)$	valor supremo da matriz de transferência T
T_2	matriz de transferência relacionada com o desempenho \mathcal{H}_2 do sistema
T_∞	matriz de transferência relacionada com o desempenho \mathcal{H}_∞ do sistema
$\ T\ _2$	norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência T
$\ T\ _\infty$	norma \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência T
$\text{Tr}(A)$	traço da matriz A
$\ w\ _2$	norma \mathcal{L}_2 do sinal contínuo w ou norma l_2 do sinal discreto w
$f(\mathbf{x})$	função escalar do vetor \mathbf{x}
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	função vetorial do vetor \mathbf{x}

- λ vetor de pesos para decomposição ponderada
- r direção de referência mapeada no domínio de objetivos
- z^* ponto de referência para decomposição no MOEA-P

Capítulo 1.

Introdução

1.1. Apresentação

O Controle Robusto é um ramo da Teoria de Controle que lida com incertezas paramétricas na representação do modelo do sistema. Controladores projetados utilizando-se controle robusto estão aptos a superarem diferenças entre o modelo real do sistema e o modelo nominal utilizado para o projeto. Métodos robustos possibilitam o projeto de controladores com desempenho robusto e estável na presença de erros de modelagem e dos valores assumidos pelos parâmetros, dado um intervalo previamente definido na etapa de projeto. Conhecido este intervalo de incerteza paramétrica, definido na engenharia do sistema a ser controlado, a possível variação dinâmica da incerteza, no decorrer da operação e controle do sistema, não é considerada neste trabalho, pois caracterizaria sistemas variantes no tempo, o que não é o escopo desta tese.

O funcionamento adequado das malhas de controle é fundamental para garantir a qualidade do produto, minimizar gastos de produção, reduzir paradas para manutenção e aumentar o lucro e competitividade da empresa. O desempenho de sistemas de controle em geral já é estudado há muitos anos. Existem muitos critérios e índices devidamente estabelecidos dentro da teoria de controle convencional. O algoritmo Proporcional-Integral-Derivativo (PID) é ainda o mais utilizado na grande maioria dos controladores existentes no mercado (Cheng 2006), devido ao fato de ser de fácil implementação, parametrização e de possuir flexibilidade para atendimento às necessidades da indústria. A teoria de controle estuda controladores com algoritmo PID desde o início do século passado, sendo que diversos trabalhos já comprovaram a eficiência do PID

para controle clássico e avançado (controle antecipatório, controle de razão, multi-malha, cascata etc.) (Dorf & Bishop 2010, Ogata 2010)

Existem diversos critérios e índices de desempenho (Integral Absoluta do Erro (IAE), Integral do Tempo Multiplicado pelo Erro Absoluto (ITAE), Integral do Erro Quadrático (ISE), Integral do Tempo Multiplicado pelo Erro Quadrático (ITSE), decaimento de um quarto, variabilidade, tempo de acomodação, sobresinal máximo etc.), conforme apresentado em (Alt & Lages 2003), que permitem definir a eficiência de uma malha de controle. Além dos critérios e índices definidos pela teoria de controle, outros índices também são utilizados pelo mercado para avaliação de desempenho de malhas de controle. Estes índices normalmente permitem monitorar não só o desempenho do controlador, mas também o comportamento da malha como um todo (esforço da válvula e variações da dinâmica do processo, por exemplo).

Apesar do controlador PID ser utilizado e estudado há muito tempo é impressionante como o desempenho das malhas de controle na indústria não é satisfatório na maioria dos casos. Isto se deve ao fato de que a grande maioria das implementações apresenta alguns dos seguintes problemas (Bachur 2011, Dorf & Bishop 2010, Ogata 2010):

1. problemas de processo e variações na dinâmica do mesmo (tempo morto e constante de tempo);
2. dificuldades de controle (não-linearidades, interações, perturbações e ruídos);
3. estratégias de controle incompatíveis com as necessidades do processo e objetivos de controle;
4. dimensionamento inadequado dos elementos da malha de controle;
5. erros na implementação dos controladores, principalmente quando se utilizam Controladores Lógicos Programáveis (CLPs);
6. problemas na instalação de sensores, transmissores, conversores e atuadores;
7. configurações inadequadas e problemas de calibração de instrumentos;
8. problemas de desgaste de atuadores (histerese, folga e agarramento);
9. sintonia inadequada das malhas de controle;
10. problemas de manutenção dos elementos da malha de controle;
11. restrições, deficiências operacionais e falta de capacitação dos colaboradores.

Como o número de malhas de controle presente nos sistemas industriais geralmente é elevado, além da presença de incertezas paramétricas e distúrbios, sugere-se o uso de um controlador robusto para aplicações específicas, onde a dinâmica dos parâmetros incertos não varia ao longo da operação dos sistemas a serem controlados.

1.2. Contexto Histórico

O princípio da aplicação do controle em malha fechada foi a abordagem fundamental utilizada para controle geral de processos em muitos campos da atividade humana, permanecendo de forma relativamente inalterada desde o início do século vinte até a segunda metade do mesmo. Exceto por alguns poucos trabalhos isolados, o interesse por sistemas de controle retroalimentados somente aumentou pouco antes da Segunda Guerra Mundial (Cruz 2005). A partir de então, surgiram novos métodos de análise e síntese, que trabalharam supondo um modelo matemático exato. Alguns poucos métodos consideraram a incerteza causada pelas imperfeições na modelagem ou pelas mudanças das propriedades físicas das variáveis em questão.

Atualmente, os sistemas incertos têm atraído muito do ponto de vista da investigação científica e também das aplicações práticas, em função das necessidades reais do “chão de fábrica”. Assim, é natural que uma série de abordagens para resolver os problemas relacionados a incertezas são desenvolvidas e aperfeiçoadas até os dias de hoje.

De uma forma clássica, o objetivo mais frequente da teoria de controle é garantir o funcionamento adequado do sistema quando afetado por algumas mudanças, alterações, perturbações ou distúrbios. De uma maneira simplificada, pode-se dizer que, atualmente, predominam dois tipos de princípios básicos sobre como resolver esse problema. O primeiro é assegurar o incessante ajuste do controlador de acordo com as condições de mudança, o que define a sua adaptatividade. O segundo, eventualmente, é a concepção de um controlador fixo que garanta o comportamento adequado não apenas para o sistema nominal, mas também em função de algumas variações, o que caracteriza a sua robustez.

Dos princípios apresentados anteriormente, os controladores robustos são favorecidos, na prática, por serem relativamente simples e facilmente utilizáveis. Em contrapartida, o desempenho desses controladores é limitado a grandes e rápidas mudanças do sistema controlado ou às suas condições de funcionamento. Obviamente, muitos problemas asso-

ciados à incerteza do sistema não são solucionados apenas pelo controle robusto, sendo que muitas outras técnicas podem também auxiliar na solução dos problemas como, por exemplo, o controle robusto-adaptativo e o controle por lógica *fuzzy*. Portanto, não há uma demarcação rigorosa entre as áreas de controle. Na verdade, elas são muitas vezes interligadas.

Além do que foi apresentado na Seção 1.1, uma outra forma de se caracterizar o desempenho de sistemas de controle é por meio de normas de matrizes de transferência à malha fechada do sistema. Normas matriciais, como as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ (veja definição formal no Apêndice A.1), proporcionam uma medida da influência das entradas exógenas (distúrbios de carga, ruídos, sinais de referência etc.) sobre as saídas controladas do sistema (erros de rastreamento e sinais de controle). Controladores LQG (*Linear-Quadratic-Gaussian*), bastante difundidos na década de 60, podem ser vistos como um caso especial do controle ótimo \mathcal{H}_2 (Doyle 1978). Devido à característica do projeto LQG de não assegurar margens de estabilidade satisfatórias (Doyle 1978), além da dificuldade de se conhecer as propriedades estatísticas das perturbações, cresceu o interesse pelo controle ótimo \mathcal{H}_∞ , a partir do trabalho de Zames (1981). Em Doyle et al. (1989), soluções para os problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ foram formuladas para sistemas no espaço de estados através de equações de Riccati. Entretanto, formulações em termos de equações de Riccati podem se tornar difíceis de serem aplicadas aos problemas de controle robusto. A teoria de controle robusto foi bastante impulsionada a partir do final dos anos 80, quando os problemas de controle robusto passaram a ser caracterizados por problemas de otimização convexa. Os problemas de otimização convexa possuem a propriedade de que um ótimo local corresponde ao ótimo global. Na teoria de controle robusto, os problemas são formulados como problemas de programação semi-definida (SDP, *Semidefinite Programming*), uma classe dos problemas de otimização convexa na qual a função objetivo é linear e as restrições são na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, *Linear Matrix Inequalities*) (Vandenberghe & Boyd 1996). Uma propriedade importante das LMIs é que elas definem uma região factível convexa (Palhares & Gonçalves 2007).

Uma das vantagens imediatas da abordagem por LMIs é a disponibilidade de programas, comerciais ou gratuitos, para a solução em tempo polinomial de tal classe de problemas de otimização como, por exemplo, o LMI Control Toolbox (Gahinet et al. 1995) e SeDuMi Interface (Sturm, 1999; Peaucelle, 2002), ambos para uso com o MATLAB (R). A princípio, caracterizar um problema de controle na forma de um problema baseado em LMIs significa na prática a sua solução, mesmo que não existam soluções analíticas

disponíveis (Boyd et al. 1994). Pode-se dizer que as formulações por LMIs possuem a mesma importância na teoria de controle robusto que as equações de Lyapunov e Riccati, na teoria de controle moderna, e as ferramentas gráficas, como os diagramas de Bode, Nyquist e Nichols, na teoria de controle clássica (Doyle et al. 1991). Representar todas as especificações do sistema projetado através de um único objetivo de controle é bastante restritivo. Deste modo, outra vantagem importante da abordagem por LMIs é que, como elas aparecem na forma de restrições no problema de projeto, elas oferecem maior flexibilidade para combinar várias especificações sobre o sistema a ser projetado (Boyd et al. 1994). A terceira característica de destaque dos problemas formulados em termos de LMIs, fundamental quando os sistemas considerados possuem domínio politópico de incerteza, é que é suficiente verificar o conjunto de vértices para garantir as especificações de estabilidade e desempenho para todos os sistemas pertencentes ao politopo (Gonçalves 2006).

O controle LQG, desenvolvido nos anos 60, não consegue lidar de forma adequada com sistemas com modelos incertos. Pequenas variações do modelo baseado no espaço de estados podem levar a respostas transitórias totalmente diferentes (Skelton et al. 1998). Por outro lado, as técnicas de projeto \mathcal{H}_∞ são bastante adequadas para tratar de aspectos no domínio da frequência e de questões de robustez, porém, proporcionam pouco controle sobre o comportamento transitório e sobre a localização dos pólos em malha-fechada (Chilali & Gahinet 1996). Portanto, fica evidente a necessidade de técnicas de controle multiobjetivo que combinem os aspectos vantajosos de cada critério.

1.3. Objetivos da Tese

Os objetivos da tese englobam a síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída para sistemas dinâmicos incertos lineares invariantes no tempo, em tempo contínuo e discreto, representados por modelos de incerteza paramétrica politópicos, cuja finalidade principal caracteriza-se pela solução de problemas reais que possuam inúmeras restrições de projeto (problema de programação semi-infinita). Em uma análise multiobjetivo inédita e com o auxílio da programação tipo “minimax” (minimização dos valores máximos das normas), as finalidades do projeto são atender às especificações da resposta de rastreamento do sinal de referência, a rejeição de distúrbios e a atenuação do efeito de ruídos de medição. As especificações de projeto foram quantificadas em termos das normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 das funções de transferência em malha fechada,

sendo que o procedimento de projeto utilizou um algoritmo evolutivo multiobjetivo na etapa de síntese, uma técnica de tomada de decisão multicritério na etapa intermediária e o algoritmo *Branch-And-Bound (BnB)* em conjunto com LMIs de análise, na etapa final de análise, cujo objetivo foi validar a robustez do controlador obtido nas etapas anteriores. Essencialmente, esta técnica combina a flexibilidade de um algoritmo evolucionário multiobjetivo (MOEA) dedicado, juntamente com o problema de programação semi-infinita. Uma vez que um MOEA evolui um conjunto de soluções candidatas em paralelo, a estratégia sugerida fornece um conjunto diversificado de projetos de controladores, o que é muito útil para um processo de tomada de decisão *a posteriori*. Uma proposta de estratégia de auxílio a tomada de decisão multicritério é empregada como ferramenta de projeto do controlador, com o objetivo de incorporar as preferências do tomador de decisões ao longo do processo, a qual (i) permite uma busca evolutiva orientada para uma região de soluções de interesse prático (*trade-off*) e (ii) auxilia a definição de um controlador final adequado, caracterizado por um compromisso prático razoável entre os critérios de projeto.

A motivação para o projeto multiobjetivo pode ser colocada da seguinte forma (Scherer et al. 1997):

1. O projeto, considerando desempenho \mathcal{H}_∞ , é conveniente para garantir estabilidade robusta de sistemas incertos, para rejeição de distúrbios na forma de sinais com energia limitada e para expressar especificações no domínio da frequência, tais como, faixa de passagem e ganho em baixas frequências.
2. O projeto, considerando desempenho \mathcal{H}_2 , é equivalente ao controle ótimo LQG, sendo útil para tratar de rejeição a distúrbios com características estocásticas, como ruídos de medição ou perturbações aleatórias.

Foram considerados sistemas lineares invariantes no tempo, a tempo discreto e contínuo, com a otimização aplicada no espaço de parâmetros do controlador.

1.4. Contribuições do Trabalho

Inseridas no contexto discutido anteriormente, as principais contribuições originais deste trabalho são:

1. A utilização de um modelo de referência otimizado como critério de projeto de controladores, contrapondo-se ao uso do modelo com parâmetros fixos, obtidos empiricamente pelo método de “tentativa e erro”, considerando-se também a rejeição ao distúrbio e a atenuação de ruído em uma formulação multiobjetivo, para sistemas incertos com modelo de incerteza paramétrica politópico. Além disso, tem-se a comprovação da eficácia do uso de modelo de referência otimizado, por meio de testes em exemplos disponíveis na literatura.
2. A proposição de procedimentos de projeto para solução do problema multiobjetivo através da utilização da programação semi-infinita tipo “minimax”, considerando o desenvolvimento e a aplicação de um algoritmo evolutivo multiobjetivo multipopulacional baseado em preferências (MOEA-P), na síntese, e do algoritmo *Branch-And-Bound* em conjunto com LMIs, na análise.
3. A proposição de uma etapa intermediária entre a síntese, para obter um controlador inicial factível, e a análise, para validar as etapas anteriores, possibilitando-se uma escolha mais apropriada do controlador robusto projetado levando-se em consideração critérios práticos definidos pelo decisor.
4. A utilização da otimização evolucionária multiobjetivo como alternativa de projeto mais flexível, comparando-se com as abordagens escalares disponíveis na literatura.
5. A diminuição do esforço de controle do controlador projetado, aumentando assim o desempenho e a vida útil dos Elementos Finais de Controles (EFCs) e de suas instalações industriais, entre outras vantagens e aplicações a serem abordadas.

Contribuições adicionais foram apresentadas no artigo intitulado “*A multiobjective robust controller synthesis approach aided by multicriteria decision analysis*” elaborado pelo autor e colaboradores, onde se destacam melhorias em um sistema real de suspensão ativa veicular, no tocante ao conforto dos passageiros, redução no esforço de controle e o aumento da vida útil dos atuadores, culminando na possível redução do custo de manutenção do sistema (Bachur et al. 2017).

1.5. Estrutura do Trabalho

Os assuntos discutidos neste trabalho estão organizados conforme mostrado a seguir.

Capítulo 2 – Exame da Literatura: Esse capítulo aborda o desenvolvimento de projetos de controladores robustos através da aplicação de normas como critérios de desempenho; a importância de utilização do modelo de referência como critério de projeto; a utilização de LMIs de análise em conjunto com o algoritmo *Branch-And-Bound (BnB)* e, finalmente, apresenta os trabalhos correlacionados disponíveis na literatura bem como os contrapontos em relação a proposta desenvolvida neste trabalho e suas respectivas vantagens.

Capítulo 3 – Abordagem Proposta para a Síntese de Controle Robusto: Este capítulo fornece a formulação multiobjetivo do problema de controle robusto considerando-se um sistema linear, invariante no tempo, em tempo discreto ou contínuo, com modelo de incerteza politópico. A síntese de um controlador por realimentação dinâmica de saída é obtida pela programação semi-infinita, utilizada de forma inédita em conjunto com um algoritmo evolutivo paralelo baseado em preferências, o que caracteriza uma contribuição deste trabalho. Apresenta também o algoritmo *BnB* e sua aplicação juntamente com LMIs, utilizados pela análise, cujo objetivo é validar o controlador obtido na síntese e pela etapa intermediária entre a síntese e a análise, que corresponde à tomada de decisão multicritério.

Capítulo 4 – Resultados: Este capítulo mostra alguns estudos de caso de sistemas em tempo discreto e contínuo, considerando-se a otimização do modelo de referência e também restrições na formulação multiobjetivo, com o intuito de se demonstrar as vantagens da formulação de projeto proposta. Além disso, considera-se o desenvolvimento e aplicação de um método de auxílio à tomada de decisão multicritério para auxiliar o projetista e/ou decisor (ou grupo de decisores) no atendimento de suas especificações de engenharia.

Capítulo 5 – Conclusão: Este capítulo apresenta as conclusões gerais do trabalho, além das propostas de desenvolvimento futuro e continuidade do mesmo.

Com o intuito de tornar o trabalho auto-contido, mas sem estender demasiadamente o corpo principal da tese, grande parte dos conceitos fundamentais relacionados ao trabalho são apresentados no **Apêndice A**. Resultados adicionais, além dos analisados no corpo da tese, são apresentados no **Apêndice B**.

Apêndice A – Conceitos Preliminares: Este apêndice apresenta as ferramentas e o embasamento matemático necessários para o desenvolvimento da tese. Caso o leitor

domine os conceitos discutidos no mesmo, a leitura do apêndice não é fundamental para a compreensão geral do trabalho.

- Seção A1 – Normas de Sinais e Sistemas

Esta seção apresenta conceitos sobre normas de sinais e sistemas e sua aplicação a sistemas incertos, abordados neste trabalho.

- Seção A2 – Otimização Escalar e Vetorial

Esta seção define conceitos relativos à otimização escalar (mono-objetivo) e otimização vetorial (multiobjetivo).

- Seção A3 – Tomada de Decisão Multicritério

Esta seção apresenta fundamentos acerca de métodos de auxílio à tomada de decisão multicritério como ferramentas de ajuda ao decisor e/ou projetista para definição do controlador robusto final.

- Seção A4 – Algoritmo Evolução Diferencial (AED)

Esta seção mostra a definição do AED clássico e suas operações básicas de geração da população inicial, mutação diferencial, recombinação discreta e seleção.

Apêndice B – Resultados Adicionais: Este apêndice apresenta, de forma adicional, outros resultados relativos aos exemplos 6 a 9 que complementam o Capítulo 4. Semelhantemente ao Apêndice A, a leitura do Apêndice B não é fundamental para a compreensão geral do trabalho, uma vez que, no mesmo, somente são aplicadas variações de outras funções objetivo como critérios de projeto.

Capítulo 2.

Exame da Literatura

2.1. Introdução

Uma razão importante para o sucesso da formulação de problemas de controle, utilizando-se modelo de referência, deve-se à sua aptidão para o projeto de síntese de servo-sistemas de alto desempenho (Miller & Davison 1991, Nicosia & Tomei 1984). Frequentemente, objetivos gerais aplicados na síntese de servo-sistemas são a obtenção de um satisfatório rastreamento do sinal de referência, a rejeição assintótica de perturbações diversas, a atenuação de ruídos de medição e a modelagem de sistemas com incerteza robustos. A maior parte destes objetivos podem ser formulados como critérios de desempenho por meio do uso de normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , sendo que desde a década de 1980, a área de controle robusto \mathcal{H}_∞ tem passado por um grande desenvolvimento (Zhou & Doyle 1998).

Um problema bastante estudado na literatura é o controle de sistemas lineares invariantes no tempo, com parâmetros que não são precisamente conhecidos, mas que variam em um intervalo conhecido. Considere, por exemplo, o projeto de um sistema de controle de velocidade de um elevador onde a massa do sistema varia entre a massa do elevador vazio e a massa do elevador mais a capacidade total do mesmo. O projeto de controle deve garantir não somente a estabilidade do sistema mas também o seu desempenho ótimo para todos os valores possíveis dos parâmetros incertos. Tal problema pode ser formulado como um problema de otimização semi-infinita em que é necessário minimizar o valor máximo da função objetivo e garantir o atendimento às restrições em um domínio com infinitos pontos (Zakovic & Rustem 2002). Este problema geralmente é de difícil solução, sendo que o desempenho de sistemas de controle pode ser caracterizado através

da minimização de normas de determinadas matrizes de transferência do sistema, como as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ (Zhou & Doyle 1998).

Uma forma bastante popular de se modelar sistemas incertos é tratá-los como sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT), representados por modelos no espaço de estados, com incerteza politópica. Para esta representação, cada sistema pertencente ao domínio de incerteza pode ser descrito como a combinação convexa dos sistemas que correspondem aos vértices do politopo. A popularidade de sistemas politópicos se deve em parte às formulações de análise e síntese descritas em termos de problemas de otimização linear com restrições na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs) (Boyd et al. 1994). Através das formulações LMIs é possível analisar e projetar sistemas de controle considerando somente os sistemas correspondentes aos vértices do politopo. Desse modo, problemas de otimização global não-convexos, de difícil solução, são representados por problemas convexos com disponibilidade de programas comerciais e gratuitos para sua solução. Entretanto, nem todos os problemas de controle robusto podem ser colocados neste formato. Quando tais problemas são representados por formulações LMIs, pode-se gerar resultados muito conservadores e, em alguns casos, pode-se até mesmo não obter uma solução para o problema. Esses dois fatos motivam o desenvolvimento de estratégias de síntese alternativas, que possam resolver problemas de controle robusto ainda não formulados por LMIs ou fornecer soluções ainda mais eficientes (Bachur et al. 2010a).

Otimização convexa e programação semi-definida (SDP) tornaram-se uma das abordagens principais para análise e síntese de controle. Em verdade, é sabido que os problemas de controles lineares convencionais, tais como a análise de estabilidade de Lyapunov ou síntese, podem ser formulados e eficientemente resolvidos em termos de solução de problemas de otimização convexa com restrições por desigualdades matriciais lineares (LMIs). Mais recentemente, a pesquisa neste campo tem se concentrado em problemas nos quais os dados (por exemplo, as matrizes que descrevem um determinado sistema) são incertos. Uma abordagem robusta, neste caso, exige a satisfação das restrições de análise ou de síntese para todos os valores admissíveis (abordagem de pior caso) dos parâmetros incertos que aparecem nos dados do problema. Portanto, na versão robusta do problema deve-se determinar uma solução que satisfaça uma série de infinitas restrições convexas, geradas por todas as instâncias das restrições originais, com os parâmetros incertos variando ao longo de seus domínios admissíveis. Este paradigma “robusto” de programação convexa surgiu por volta de 1998 e, além dos sistemas de controle, tem encontrado aplicações em projetos de topologia de treliças, projeto robusto para disposição

de antenas e estimativa robusta (Calafiore & Campi 2006). Infelizmente, os problemas convexos robustos não são tão facilmente solucionáveis. Isso implica que, ao contrário do padrão de programação semi-definida (SDP), simplesmente definir um problema de controle na forma de um SDP robusto não significa que o problema é passível de solução numérica eficiente.

O estado da arte atual para solucionar problemas robustos de otimização convexa é através da introdução da estratégia de relaxamento por meio do uso de “multiplicadores” ou variáveis de escala. As principais desvantagens da abordagem por relaxamento estão no fato de que a extensão do conservadorismo introduzido é geralmente em função do conhecimento do problema tratado, embora possa ser avaliada para classes específicas de problemas, ou assintoticamente reduzida através do aumento da ordem de relaxamento. Também deve ser considerado o fato de que o próprio método pode ser aplicado apenas quando a dependência dos dados sobre as incertezas tem uma forma funcional particular e simples, tais como uma função afim, polinomial ou racional. A probabilidade em termos de robustez adquiriu crescente interesse na literatura nos últimos anos, sendo que a abordagem probabilística é agora uma metodologia estabelecida para análise de robustez. No entanto, a abordagem probabilística tem encontrado uma aplicação limitada na síntese de controle robusto.

Basicamente, duas metodologias diferentes estão atualmente disponíveis para a síntese de controle robusto probabilístico: a abordagem baseada na teoria da aprendizagem Vapnik-Chervonenkis, e os métodos sequenciais baseados em iterações por gradientes estocásticos ou iterações elipsoidais (Calafiore & Campi 2006). A primeira abordagem é muito geral, mas sofre do conservadorismo da teoria Vapnik-Chervonenkis, o que requer um grande número de amostras geradas aleatoriamente (elevada “complexidade da amostra”), a fim de atingir garantias probabilísticas desejadas. Ainda mais importante, essa metodologia de projeto não pretende impor as restrições de síntese em um sentido robusto, mas em vez disso é direcionado para minimizar o objetivo de custo médio. Alternativamente, quando o problema de síntese original é convexo (que inclui a maioria dos problemas de controle relevantes), as abordagens sequenciais com base em gradientes estocásticos ou iterações elipsoidais, podem ser aplicadas com sucesso. No entanto, estes métodos são atualmente limitados a problemas de factibilidade, devendo portanto serem estudados com maior aprofundamento no tocante à utilização de técnicas de otimização. Mais fundamentalmente, esses algoritmos têm natureza assintótica, ou seja, eles são garantidos para convergir para uma solução viável robusta (se existir) com probabilidade unitária, mas o número total de amostras de incerteza que precisa ser definido para

se atingir a solução desejada não pode ser fixado antecipadamente. Portanto, face ao exposto acima, novas técnicas para a síntese de controladores robustos podem agregar valor às necessidades de projeto e às diversas aplicações gerais.

A seção seguinte apresenta os trabalhos correlacionados e sua evolução histórica, bem como seus contrapontos em relação à nova metodologia proposta neste trabalho e suas inovações.

2.2. Trabalhos Relacionados e Contrapontos

Muitos dos trabalhos prévios na área de controle robusto utilizam como estratégia garantir as especificações da resposta transitória através de restrições de posicionamento regional de pólos no problema de otimização (Bachur 2011, Wie & Bernstein 1990). Uma das abordagens desta tese é combinar a técnica de controle \mathcal{H}_∞ , para rejeição de distúrbios, e \mathcal{H}_2 , para atenuação de ruídos, com um objetivo adicional de otimização baseado no erro entre a função de transferência do processo em malha-fechada e um modelo de referência, para garantir as especificações de resposta de rastreamento, estendendo resultados prévios apresentados em Rodrigues et al. (2009). O problema de síntese de controladores, que produzem uma função de transferência a malha-fechada que aproxime um modelo de referência desejado, pode ser visto como um problema similar ao problema de aproximação por modelos de ordem reduzida. Desse modo, o procedimento de síntese proposto pode usufruir dos desenvolvimentos prévios na área de redução de modelos como em Helmersson (1994), Grigoriadis (1995), Geromel et al. (2005), Ebihara & Hagiwara (2004b), Yousefi & Lohmann (2008) e Gonçalves et al. (2009).

A partir do trabalho de Crusius & Trofino (1999) uma nova metodologia é adotada, baseada em formulações para realimentação estática de saída. Através de uma formulação aumentada do sistema é possível utilizar metodologias de síntese de controladores por realimentação estática de saída para síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída de qualquer ordem. Entretanto, não existem, até o presente momento, formulações LMI para projeto de controladores robustos por realimentação estática de saída. Desse modo é necessário utilizar técnicas para solução das formulações BMI, que são não convexas. Em Geromel et al. (2007) foram consideradas incertezas parciais em apenas algumas matrizes, com a possibilidade de se projetar controladores com a mesma ordem do sistema, caracterizando-se com isso um problema de difícil implementação para sistemas de ordem elevada. Posteriormente, no trabalho de Moreira et al. (2011),

somente o desempenho \mathcal{H}_2 é analisado para um projeto com realimentação estática de saída, não considerando portanto a possível rejeição de distúrbios que possam ocorrer no processo, sob a forma de sinais com energia limitada. Na mesma linha, no trabalho de Dong & Yang (2013) somente o desempenho \mathcal{H}_∞ foi considerado, não sendo possível o tratamento do problema de rastreamento do sinal de referência e a rejeição dos ruídos de medição. Finalmente, no trabalho de Sadabadi & Karimi (2015), um projeto por realimentação dinâmica de saída somente com desempenho \mathcal{H}_∞ foi considerado para um controlador de ordem fixa, porém, com as mesmas limitações dos trabalhos anteriores, no tocante a uma busca evolutiva multiobjetivo com flexibilidade de projeto. Semelhantes abordagens podem ser observadas em Yaesh & Shaked (2009), Agulhari et al. (2012).

Na abordagem proposta por Gonçalves et al. (2011), o problema de controle robusto, na forma original de problema de otimização semi-infinita, foi solucionado através de um procedimento iterativo de dois passos, similar ao método proposto por Zakovic & Rustem (2002). Tal procedimento obteve resultados melhores que os obtidos por formulações LMIs em diferentes tipos de problemas na área de controle robusto. O procedimento de síntese considerado nesta tese é similar ao método para solução de problemas de otimização semi-infinita proposto em Zakovic & Rustem (2002), porém introduz-se uma abordagem multiobjetivo e uma etapa intermediária que auxilia o decisor em sua análise e tomada de decisão multicritério. Portanto, a abordagem proposta visa obter a solução do problema em três etapas: síntese, tomada de decisão e análise. No passo de síntese, o domínio infinito é substituído por um conjunto finito de sistemas composto inicialmente pelos vértices do politopo de incertezas. O controlador é projetado para minimizar a função objetivo e garantir o atendimento às restrições somente para esse conjunto finito, o que torna o problema mais fácil de ser solucionado. Após a obtenção de uma estimativa da fronteira Pareto, composta de várias alternativas candidatas de projeto, o provável controlador robusto é escolhido através da decisão multicritério e, na sequência, validado no passo de análise. Nessa etapa, o controlador obtido nos passos anteriores é analisado para todos os infinitos sistemas do politopo. Se for verificado que alguma restrição foi violada ou que o máximo da função objetivo nos passos de síntese e de análise possuem uma diferença significativa, novos sistemas, representados pela adição de novos pontos ao politopo original, são acrescentados no conjunto finito e as três etapas são executadas novamente, obtendo-se assim uma nova fronteira Pareto aproximada. O procedimento finaliza quando todas as restrições são atendidas para todos os sistemas no domínio infinito e a diferença entre o mínimo da função objetivo calculada em cada passo está dentro de um limite especificado.

Nos trabalhos anteriores, esse procedimento foi implementado considerando o Algoritmo Cone-Elipsoidal (ACE) para o passo de síntese e o método *Branch-And-Bound* (*BnB*) mais LMIs para o passo de análise, conforme mostrado em (Bachur et al. 2010b, Bachur et al. 2010a, Bachur et al. 2011). Essa implementação, na síntese, pode apresentar problemas em determinadas situações, como, por exemplo, o fato do ACE ser mais adequado para problemas de otimização convexos. Como o método *BnB* possui garantia de convergência para o máximo global, o mesmo foi mantido na etapa de análise, apesar de seu custo computacional aumentar rapidamente com o aumento da ordem do sistema e do número de vértices do politopo. Desse modo foi interessante estudar outras possibilidades de implementação desse procedimento.

Nesse trabalho, portanto, optou-se por utilizar o Algoritmo Evolução Diferencial (AED) (Storn & Price 1997) para o passo de síntese em uma abordagem multiobjetivo. Por ser um método evolucionário baseado em populações, o AED possui certas características interessantes para tratar o problema em questão, tais como: pode ser aplicado a problemas não diferenciáveis, não convexos, multimodais e possui grande potencial para aproximação do mínimo global.

De acordo com o trabalho apresentado em Marcos & Gonçalves (2016), o método evolução diferencial demonstrou melhor desempenho, mesmo com um tamanho de população reduzido, requerendo portanto menor custo computacional. Em alguns casos observados, obteve-se soluções mais satisfatórias, em comparação com o popular algoritmo genético (AG). Em geral, os resultados encontrados pelo AED não foram dominados pelos resultados obtidos pelo AG considerado. Acredita-se que essa característica se deve à melhor adaptação do operador diferencial do AED ao espaço de projeto do problema abordado.

Além disso, foi utilizado um modelo de referência para garantir as especificações de resposta de rastreamento do sinal de referência. Nesse caso, o objetivo foi reduzir a diferença entre a função de transferência do processo em malha-fechada e o modelo de referência. Tal diferença é caracterizada em termos da norma \mathcal{H}_∞ , tornando possível que esta especificação seja considerada como uma função objetivo adicional ao problema. O uso de modelo de referência para a função de transferência em malha fechada, de modo a garantir o desempenho da resposta de rastreamento, já foi considerado em outros trabalhos anteriores, porém sem considerar a otimização do mesmo (com parâmetros fixos), conforme mostrado em (Bachur et al. 2010b, Bachur et al. 2010a, Bachur et al. 2011) e (Araújo et al. 2010).

Através da otimização multiobjetivo obtém-se um conjunto de soluções não-dominadas. Em aplicações práticas, normalmente apenas uma solução é implementada. Portanto surge um problema de decisão: escolher entre as várias soluções candidatas aquela mais apropriada, considerando-se vários critérios. Tal escolha deve refletir as preferências de um ou mais decisores, dependendo do contexto e sua aplicação, que devem conhecer satisfatoriamente o problema em questão. Assim, para que haja a maior coerência possível entre a solução final definida e os interesses do(s) decisor(es), faz-se necessário o uso de técnicas de decisão multicritério, conforme apresentado em (Figueira et al. 2005a, Munier 2011, Parreiras & Vasconcelos 2009, Bhushan & Rai 2004). Este trabalho propõe uma abordagem multicritério, a qual é empregada tanto para guiar o processo de busca evolutivo quanto para auxiliar na escolha do controlador robusto.

2.3. Conclusão

No Capítulo 1 foi apresentada a contextualização do projeto abordando o controle robusto, seu antecessor, o clássico controle tipo PID, critérios de desempenho, aplicações de normas e LMIs, além da estrutura geral do trabalho. Para o leitor interessado, no Apêndice A.1 são abordados os conceitos e cálculos de normas de sinais e sistemas, aplicáveis a sistemas em tempo contínuo e discreto, podendo assumir a configuração tipo *SISO* (*Single Input, Single Output*) ou *MIMO* (*Multiple Input, Multiple Output*). Neste capítulo foram apresentadas a evolução histórica e as técnicas já implementadas para a síntese de controladores robustos, que culminam na utilização da programação semi-infinita, no uso de um algoritmo evolutivo e na utilização de um procedimento que auxilia a tomada de decisão multicritério, caracterizando assim a abordagem multiobjetivo inédita proposta neste trabalho.

A síntese de controle robusto, já implementada por um procedimento de duas etapas (síntese e análise) em trabalhos anteriores, ganha uma nova perspectiva inédita de projeto ao se aplicar a programação semi-infinita com inúmeras possibilidades de restrições, em uma abordagem multiobjetivo aliada à uma técnica de auxílio à tomada de decisão multicritério, fornecendo um conjunto de alternativas para escolha do controlador e um mecanismo inteligente para a definição de um projeto final mais adequado. Flexibiliza-se, com isso, as inúmeras aplicações no chão de fábrica, agregando-se valor às necessidades reais dos projetistas e/ou decisores. No próximo capítulo será definida a metodologia

para o projeto do controlador robusto subdividida em três etapas: síntese, tomada de decisão multicritério e análise.

Capítulo 3.

Abordagem Proposta para a Síntese de Controle Robusto

3.1. Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação do problema de controle e a solução do mesmo através de uma metodologia de projeto baseada em um procedimento iterativo de três passos: 1) síntese baseada em otimização multiobjetivo através de um algoritmo evolutivo paralelo com preferências, diretamente no espaço de parâmetros do controlador, considerando um conjunto finito de pontos do domínio de incerteza, para a obtenção de uma estimativa da fronteira Pareto; 2) auxílio à tomada de decisão com critérios preestabelecidos pelo decisor, para escolha da solução mais adequada no conjunto da fronteira Pareto estimada e 3) análise da solução selecionada na etapa de decisão baseada em um algoritmo *Branch-And-Bound (BnB)* combinado com formulações LMI de análise.

3.2. Formulação do Problema de Controle Robusto

Considere o diagrama de blocos geral de um sistema de controle mostrado na Fig. 3.1 em que S representa o sistema a ser controlado e K o controlador. Considerando o sistema S como sendo um sistema linear e invariante no tempo, o mesmo pode ser representado no espaço de estados conforme (3.1) (Bachur 2011).

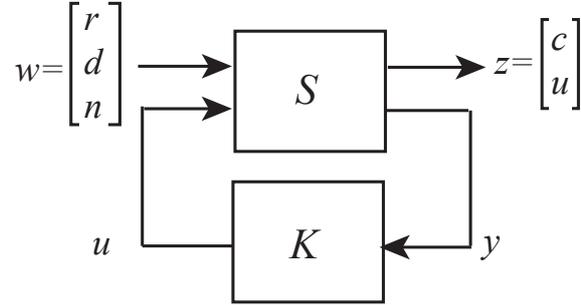


Figura 3.1.: Diagrama de blocos geral do sistema de controle.

$$\begin{aligned}
 \delta[\mathbf{x}(\tau)] &= A \mathbf{x}(\tau) + B_u u(\tau) + B_w \mathbf{w}(\tau) \\
 \mathbf{z}(\tau) &= C_z \mathbf{x}(\tau) + D_{zu} u(\tau) + D_{zw} \mathbf{w}(\tau) \\
 \mathbf{y}(\tau) &= C_y \mathbf{x}(\tau) + D_{yw} \mathbf{w}(\tau)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo $\delta[\mathbf{x}(\tau)] \triangleq dx(t)/dt$ e $\tau \triangleq t \in \mathbb{R}$ para sistemas contínuos no tempo, ou $\delta[\mathbf{x}(\tau)] \triangleq x(k+1)$ e $\tau \triangleq k \in \mathbb{N}$ para sistemas discretos no tempo. Em (3.1), $\mathbf{x}(\tau) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados (incluindo a integral do erro de rastreamento quando aplicável, $\nu(t) \triangleq \int [r(t) - c(t) - n(t)] dt$, ou seu equivalente discreto), $u(\tau) \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle (variável manipulada), $\mathbf{w}(\tau) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é o vetor de entradas exógenas (sinal de referência, $r(\tau)$, distúrbio, $d(\tau)$, e o ruído de medição, $n(\tau)$), $\mathbf{z}(\tau) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de saídas controladas (saída do sistema, $c(\tau)$, e sinal de controle, $u(\tau)$), e $\mathbf{y}(\tau) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de sinais medidos (saída do sistema com ruído de medição, $c(\tau) + n(\tau)$, e integral do erro de rastreamento quando aplicável, $\nu(t)$), os quais representam as entradas do controlador dinâmico por realimentação de saída, conforme mostrado na Fig. 3.1.

Quando a formulação considerar o erro da função de transferência em malha fechada em relação a um modelo de referência, o procedimento de síntese proposto requer a inclusão de uma variável adicional $\nu(t)$ associada à ação integral que, além disso, garante erro de rastreamento nulo em regime estacionário mesmo na presença de distúrbios.

Neste trabalho emprega-se na formulação do problema de controle a notação compacta

$$G(p) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

para indicar a função de transferência $G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$, sendo $p \triangleq s$ para sistemas contínuos no tempo ou $p \triangleq z$ para sistemas discretos no tempo.

Usando essa notação compacta, as matrizes do sistema em (3.1) podem ser reunidas na matriz:

$$\mathcal{S} \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} A & B_u & B_w \\ \hline C_z & D_{zu} & D_{zw} \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{array} \right] \quad (3.2)$$

que pode incluir parâmetros incertos de modo que \mathcal{S} pertence a um conjunto convexo compacto, ou politopo, definido pela combinação convexa de seus vértices:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\alpha}) \triangleq \left\{ \mathcal{S} : \mathcal{S} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{S}_i; \boldsymbol{\alpha} \in \Theta \right\} \quad (3.3)$$

$$\Theta \triangleq \left\{ \boldsymbol{\alpha} : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (3.4)$$

sendo \mathcal{S}_i , $i = 1, \dots, N$, o i -ésimo vértice do politopo e $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \dots \alpha_N]'$ o vetor que parametriza o politopo. A dependência das matrizes do sistema em relação a $\boldsymbol{\alpha}$ será omitida para simplificar a notação.

Neste trabalho considera-se que K , mostrado na Fig. 3.1, é um controlador dinâmico por realimentação de saída descrito por:

$$\begin{aligned} \delta[\mathbf{x}_c(\tau)] &= A_c \mathbf{x}_c(\tau) + B_c \mathbf{y}(\tau) \\ u(t) &= C_c \mathbf{x}_c(\tau) + D_c \mathbf{y}(\tau) \end{aligned} \quad (3.5)$$

ou na sua notação compacta

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right]. \quad (3.6)$$

Considere $T_{cr}(p) = C(p)/R(p)$ a função de transferência em malha fechada relacionada com a resposta de rastreamento, $T_{cd}(p) = C(p)/D(p)$ a função de transferência em

malha fechada relacionada com a rejeição ao distúrbio e $T_{un}(p) = U(p)/N(p)$ a função de transferência em malha fechada relacionada com a atenuação do ruído. As matrizes a malha fechada, com f correspondendo aos subscritos cr , cd , ou un , na notação compacta:

$$T_f(p) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] \quad (3.7)$$

são dadas por

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix} \\ B_f &= \begin{bmatrix} \bar{B}_w + B_u D_c \bar{D}_{yw} \\ B_c \bar{D}_{yw} \end{bmatrix} \\ C_f &= \begin{bmatrix} \bar{C}_z + \bar{D}_{zu} D_c C_y & \bar{D}_{zu} C_c \end{bmatrix} \\ D_f &= \begin{bmatrix} \bar{D}_{zw} + \bar{D}_{zu} D_c \bar{D}_{yw} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

com \bar{B}_w , \bar{C}_z , \bar{D}_{zu} , \bar{D}_{zw} , e \bar{D}_{yw} sendo submatrizes de B_w , C_z , D_{zu} , D_{zw} , e D_{yw} , relacionadas com os canais específicos dos componentes de w e z .

Considere também o modelo de referência que atenda às especificações da resposta transitória de rastreamento (sobresinal máximo, tempo de acomodação etc.):

$$T_m(p) = \left[\begin{array}{c|c} A_m & B_m \\ \hline C_m & D_m \end{array} \right]. \quad (3.9)$$

O erro entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada, $E(p) \triangleq T_m(p) - T_{cr}(p)$, pode ser representado pelo seguinte modelo em espaço de estados:

$$E(p) = \left[\begin{array}{cc|c} A_m & 0 & B_m \\ 0 & A_{cr} & B_{cr} \\ \hline C_m & -C_{cr} & D_m - D_{cr} \end{array} \right]. \quad (3.10)$$

O problema de síntese de controlador robusto multiobjetivo tratado neste trabalho pode ser estabelecido como: dado um sistema incerto linear invariante no tempo, em

tempo discreto ou contínuo, representado por um modelo politópico, $\mathcal{P}(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \Theta$, e um modelo de referência, $T_m(p)$, com as características desejadas de resposta transitória, encontrar um controlador por realimentação dinâmica de saída, $K(p)$, que minimize a norma \mathcal{H}_∞ máxima do erro entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada, $E(p)$, a norma \mathcal{H}_∞ máxima da função de transferência $T_{cd}(p)$ relacionada com a rejeição ao distúrbio, e a norma \mathcal{H}_2 máxima da função de transferência $T_{un}(p)$ relacionada com a atenuação do ruído, no domínio politópico de incerteza:

$$K^*(p) = \arg \min_{K(p)} \begin{bmatrix} \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|E(p, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \\ \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{cd}(p, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \\ \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{un}(p, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

sujeito a: $K(p) \in \mathcal{F}$

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável. No caso de sistemas contínuos no tempo, para encontrar um valor finito de $\max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{un}\|_2$, pode ser necessário fixar $D_c = 0$, para resultar em $D_f = 0$, condição necessária de realimentação em (3.8).

A norma \mathcal{H}_∞ representa a relação entre a energia do sinal de saída e a energia do sinal de entrada, e corresponde ao pico de ganho da resposta em frequência da função de transferência. Quanto menor a norma \mathcal{H}_∞ , maior a rejeição de distúrbios na forma de energia limitada. Já a norma \mathcal{H}_2 é útil para tratar de rejeição de distúrbios com características estocásticas, como ruídos de medição ou perturbações aleatórias. Minimizar a norma \mathcal{H}_2 significa minimizar a variância do sinal de saída relacionada com a variância do sinal de entrada.

O termo multiobjetivo foi empregado aqui para referir-se aos projetos que devem atender às especificações de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . A otimização multiobjetivo, também chamada de multicritério ou vetorial, pode ser definida como a tarefa de se encontrar um vetor de variáveis de decisão que satisfaça a um conjunto de restrições e otimize um vetor de funções cujos elementos representem as funções objetivo. Estas funções descrevem as funções mérito do modelo matemático do projeto, as quais usualmente são conflitantes. Assim, podemos dizer que o termo otimizar significa descobrir um conjunto de soluções para o qual os valores de todas as funções objetivo são consideradas aceitáveis para o projetista e/ou decisor.

3.3. Proposta de Solução do Problema de Controle no Espaço de Parâmetros do Controlador

Conforme definido em (3.11), tal formulação define um problema de programação semi-infinita, não convexo, multiobjetivo e de difícil solução. Através da aplicação de LMIs, por exemplo, é possível obter uma solução simples, porém conservadora, ou que eventualmente não consiga tratar todos os tipos de problemas.

Em função disso, optou-se pela programação semi-infinita cujo objetivo é minimizar os valores máximos das normas relativas às funções de transferências descritas em (3.11), também conhecida como aplicação tipo “minimax” (Zakovic & Rustem 2002). Para executar esta tarefa, conforme a proposta multiobjetivo abordada neste trabalho, é necessário utilizar um procedimento de otimização baseado em três etapas básicas: síntese, análise, e uma etapa intermediária que auxilia o processo de tomada de decisão.

3.3.1. Etapa de Síntese

Nessa etapa inicial é aplicado um algoritmo evolutivo paralelo multiobjetivo proposto para resolver o problema de otimização vetorial, definido em (3.11), em que um conjunto finito de pontos $\tilde{\Theta} \subset \Theta$ é considerado, sendo esta nova formulação definida em (3.12). Este conjunto finito é inicialmente composto pelo conjunto de vértices do politopo, tal como considerado na formulação convexa. A estimativa da fronteira Pareto obtida nessa etapa será utilizada na etapa seguinte para a tomada de decisão multicritério, cujo objetivo será selecionar a solução mais adequada. Esta solução deverá ser avaliada para o conjunto Θ na etapa final de análise.

$$K^*(p) = \arg \min_{K(p)} \begin{bmatrix} \max_{\alpha \in \tilde{\Theta}} \|E(p, \alpha, K)\|_{\infty} \\ \max_{\alpha \in \tilde{\Theta}} \|T_{cd}(p, \alpha, K)\|_{\infty} \\ \max_{\alpha \in \tilde{\Theta}} \|T_{un}(p, \alpha, K)\|_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

sujeito a: $K(p) \in \mathcal{F}$

Algoritmo Evolução Diferencial Multiobjetivo Multipopulacional

Para superar algumas limitações do Algoritmo Evolução Diferencial (AED) clássico, tal como a diminuição prematura de diversidade (ver detalhes na Seção A.4.2), frequentemente utilizam-se operadores evolutivos adaptativos e/ou métodos de paralelização (Zaharie & Pectu 2003a). Neste trabalho, aplica-se uma estratégia paralela baseada em um modelo multipopulacional, no qual um determinado número de subpopulações são evoluídas de maneira independente no algoritmo. Com o intuito de promover diversidade, de tempos em tempos permite-se a troca de informações entre as subpopulações, em que algumas soluções podem “migrar” de uma subpopulação para outra. Os resultados obtidos indicam um aumento da velocidade de convergência para estimativas de soluções ótimas (Zaharie & Pectu 2003a).

Na abordagem multiobjetivo adotada neste trabalho, uma variação do algoritmo evolução diferencial básico foi utilizada, cuja principal característica é a paralelização baseada em uma topologia de conexão aleatória, através do conceito de ilhas (ou multipopulação), apresentada na Seção A.4.3. Conforme apresentado em Montaña et al. (2010), o objetivo dessa técnica é melhorar a eficiência do algoritmo, reduzindo o tempo de execução utilizando-se uma pequena dimensão populacional em cada subpopulação.

Um MOEA Baseado em Decomposição

A ideia principal de um Algoritmo Evolucionário Multiobjetivo (MOEA) baseado em decomposição (Zhang & Li 2007) consiste em decompor um Problema Multiobjetivo (PMO) em um número finito de subproblemas de otimização mono-objetivo, por meio de funções de agregação, sendo esses otimizados simultaneamente. Desde que a solução ideal de cada subproblema seja Pareto-ótima para o PMO em questão, as soluções ótimas estimadas podem ser tratadas como uma aproximação adequada do conjunto Pareto ótimo. Em princípio, qualquer abordagem em otimização multiobjetivo clássica (Miettinen 1999) pode ser aplicada para decompor um PMO em um conjunto de subproblemas de otimização escalar. Entre elas, as mais populares são a soma ponderada, Tchebycheff ponderada e *Boundary Intersection Approaches* (Miettinen 1999).

O Algoritmo Evolucionário Multiobjetivo Multipopulacional utilizado neste trabalho é um algoritmo baseado em decomposição, implementado de acordo com o modelo descrito com mais detalhes em (Montaña et al. 2010).

A função de escalarização adotada neste algoritmo foi a decomposição ponderada de Tchebycheff. Assumindo $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n_f})^T$ como um vetor de pesos, tal que $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n_f$ e $\sum_{i=1}^{n_f} \lambda_i = 1$, cada subproblema de otimização escalar é definido como (Miettinen 1999):

$$g(\boldsymbol{\nu} \mid \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}^*) = \max_{1 \leq i \leq n_f} \{\lambda_i |f_i(\boldsymbol{\nu}) - z_i^*|\} \quad (3.13)$$

sujeito a: $\boldsymbol{\nu} \in \Lambda$

em que $\mathbf{z}^* = (z_1^*, \dots, z_{n_f}^*)^T$ é um ponto de referência, tal que $z_i^* < \min\{f_i(\boldsymbol{\nu}) \mid \boldsymbol{\nu} \in \Lambda\}$ para todo $i = 1, \dots, n_f$; n_f é o número de funções objetivo; $\boldsymbol{\nu}$ uma solução factível e Λ o conjunto de soluções viáveis. A fim de estimar um conjunto representativo das soluções Pareto-ótimas, um conjunto de N vetores de referência $\boldsymbol{\lambda}^1, \dots, \boldsymbol{\lambda}^N$ é gerado através de uma abordagem sistemática (Das & Dennis 1998). A Fig. 3.2 ilustra a distribuição dos vetores de peso para um problema genérico com dois objetivos.

Em cada ilha deste MOEA, um algoritmo de evolução diferencial é executado por um número predefinido de gerações (época). No final de uma época, a comunicação entre as ilhas vizinhas é permitida e algumas soluções podem migrar a partir da sua ilha original para outra diferente, de acordo com uma topologia de migração predefinida. O método aplicado emprega o esquema de variação DE/rand/1/bin do AED clássico como o seu motor de busca, em que apenas as soluções candidatas *localmente não dominadas* são selecionadas para a geração de diversidade (variação) (Montaño et al. 2010).

Definição 3.1. Dominância Pareto Local: Seja $\boldsymbol{\nu}$ uma solução factível e $\mathcal{N}(\boldsymbol{\nu})$ uma estrutura de vizinhança para $\boldsymbol{\nu}$ no espaço de decisão. A solução $\boldsymbol{\nu}$ é *localmente não dominada* com relação a $\mathcal{N}(\boldsymbol{\nu})$ se, e somente se, não existir $\boldsymbol{\nu}'$ na vizinhança de $\boldsymbol{\nu}$ tal que $\mathbf{f}(\boldsymbol{\nu}') \prec \mathbf{f}(\boldsymbol{\nu})$.

Baseado no conceito de Dominância Pareto Local apresentado em Montaño et al. (2010), a estrutura de vizinhança, definida no espaço de objetivos, é estabelecida como os nb indivíduos mais próximos de uma determinada solução. A proximidade é medida usando a distância Euclidiana entre soluções. O principal objetivo de utilizar o conceito de dominância local é explorar somente a informação das soluções localmente não-dominadas para a geração dos vetores diferença, o que pode favorecer a taxa de convergência para a fronteira Pareto.

multipopulacional, promovendo a contração dos vetores originais λ com relação a r , gerando assim novos vetores γ :

$$\gamma_i = r + \kappa(\lambda_i - r), \quad i = 1, \dots, N \text{ e } i \neq j, \quad j \in \{\text{vetores extremos}\} \quad (3.14)$$

em que $\kappa \in [0, 1]$ é o fator de contração ($\kappa = 0,5$ foi escolhido arbitrariamente neste trabalho). Observe que em (3.14), por uma questão de diversidade, os vetores de peso originais relativos aos extremos, permanecem inalterados. A Fig. 3.3 ilustra o efeito desta abordagem.

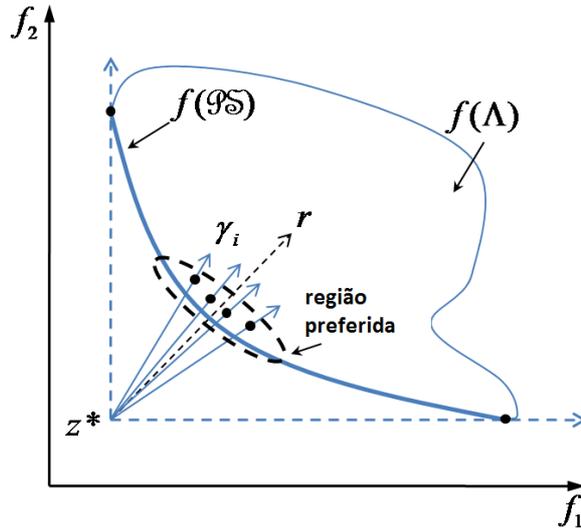


Figura 3.3.: Distribuição dos vetores de peso dentro de uma região preferida no espaço de objetivos.

Em função disso, uma variação do MOEA multipopulacional foi utilizada efetivamente neste trabalho. Esta variante é baseada nas preferências do decisor, e será nomeada neste trabalho como MOEA-P.

Supondo que os níveis de importância w_i , $i = 1, \dots, n_f$, para as n_f funções objetivo, sejam conhecidos e $\sum_{i=1}^{n_f} w_i = 1$, o vetor de prioridade w pode ser utilizado como base para gerar o vetor de referência r , sendo este aplicado na estrutura de busca para a abordagem multiobjetivo. A direção de busca r será dada pela normalização do vetor composto pelo inverso dos termos de w :

$$r_i = \rho_i / \sum_{i=1}^{n_f} \rho_i \text{ e } \rho_i = 1/w_i. \quad (3.15)$$

No Algoritmo 3.1 mostrado a seguir, os vetores solução \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 são selecionados a partir da população atual, somente se forem localmente não dominados em sua vizinhança. Pode-se notar que este primeiro mecanismo tem um efeito mais forte durante as gerações iniciais, onde a parcela de indivíduos não dominados é baixa na população global, e progressivamente enfraquece, como o número de indivíduos não dominados cresce durante o processo evolutivo. Este mecanismo é desligado automaticamente, uma vez que todos os indivíduos da população se tornam não dominados, e tem a possibilidade de ser religado, se alguns indivíduos se tornam dominados. Adicionalmente, a diversidade gerada pode ser controlada por meio do tamanho da região de dominância local $\mathcal{N}(\cdot)$. Baixos valores de $\mathcal{N}(\cdot)$ tendem a aumentar a diversidade da população. O segundo mecanismo que é utilizado neste algoritmo foi a seleção com base na função de escalarização pela decomposição ponderada de Tchebycheff, já definida anteriormente.

O procedimento $DecponTchebycheff(Q, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{z}^*)$ encontra, a partir do conjunto Q (composto da população combinada que consiste em pais originais e filhos gerados), o vetor solução que minimiza (3.13) para cada vetor de peso $\boldsymbol{\gamma}$ e o ponto \mathbf{z}^* de referência.

3.3.2. Etapa de Auxílio à Tomada de Decisão Multicritério

Na otimização multiobjetivo obtém-se um conjunto de soluções não-dominadas. Em aplicações práticas, normalmente apenas uma solução é implementada. Portanto surge um problema de decisão: escolher entre as várias soluções eficientes aquela que for mais apropriada, considerando-se vários critérios. Tal escolha deve refletir as preferências de um ou mais decisores, dependendo do contexto e sua aplicação, que devem conhecer satisfatoriamente o problema em questão. Assim, para que haja a maior coerência possível entre a solução final definida e os interesses do(s) decisor(es), faz-se necessário o uso de técnicas de decisão multicritério, conforme apresentado em (Figueira et al. 2005a, Munier 2011, Parreiras & Vasconcelos 2009, Bhushan & Rai 2004). A análise multicritério é uma ferramenta poderosa que pode auxiliar o usuário, neste caso denominado decisor, a tomar decisões na presença de incertezas e conflito de interesses.

Uma vez que avaliar todo o conjunto de soluções obtidas na etapa de síntese, considerando-se todo o politopo, requer alto esforço computacional, é interessante considerar uma etapa intermediária de tomada de decisão, para selecionar apenas uma solução para a etapa final de análise.

Algoritmo 3.1: Pseudocódigo MOEA-P.

Entrada: Principais parâmetros de configuração $N, F, C, \gamma[1, \dots, N], \mathcal{N}(\cdot), g_{max}$

```

1 início
2    $g \leftarrow 1$ ;
3   Criar aleatoriamente  $P_i^g, i = 1, \dots, N$ ;           // Inicializa a população
4   Avaliar  $P_i^g, i = 1, \dots, N$ ;                       // Avalia a população
5   enquanto  $g < g_{max}$  faça
6      $LND = \{ \}$ ;                                       // Conjunto Localmente Não Dominado vazio
7     para  $i = 1$  até  $N$  faça
8       Determinar Dominância Local ( $P_i^g, \mathcal{N}(\cdot)$ ); // Avalia a vizinhança
9       se  $P_i^g$  é localmente não dominada então
10         $LND \leftarrow LND \cup P_i^g$ 
11      fim
12    fim
13    para  $i = 1$  até  $N$  faça
14      Selecionar aleatoriamente  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  de  $LND$ 
15       $\mathbf{v} \leftarrow$  Cria Vetor Mutante ( $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ )
16       $P_i^{g+1} \leftarrow$  Recombinação ( $P_i^g, \mathbf{v}$ )
17      Avaliar  $P_i^{g+1}$ 
18    fim
19     $Q \leftarrow P^g \cup P^{g+1}$ ;                       // População combinada por pais e filhos
20    Determinar  $\mathbf{z}^*$  para  $Q$ ;                          // Determina o ponto de referência
21    para  $i = 1$  até  $N$  faça
22       $P_i^{g+1} \leftarrow$  DecponTchebycheff( $Q, \gamma_i, \mathbf{z}^*$ ); // Aplica a decomposição
23       $Q \leftarrow Q \setminus P_i^{g+1}$ ;                 // Atualiza a população combinada
24    fim
25     $FP \leftarrow P^{g+1}$ ;                             // Armazena conj. solução estimado
26  fim
27  Retorna  $FP$ 
28 fim

```

Saída: $FP =$ Aproximação do conjunto Pareto

A solução final para um problema de decisão multicritério deverá satisfazer à duas condições básicas: pertencer à fronteira Pareto-ótima ou à sua aproximação e também satisfazer as preferências de um ou mais decisores, considerando-se os vários critérios de decisão previamente estabelecidos.

A escolha da ação final envolve os seguintes elementos básicos:

- **O conjunto \mathcal{A} de alternativas:** Este conjunto é composto por todos os pontos de soluções Pareto-ótimas. Muitas vezes é infinito, limitado apenas por restrições matemáticas. Após a execução do algoritmo multiobjetivo, o mesmo é reduzido

a uma aproximação discreta da fronteira Pareto, ou seja, um conjunto finito e pequeno de soluções não dominadas.

- **O conjunto \mathcal{C} de critérios:** Supondo $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_1 \dots, \mathbf{c}_q \}$, cada critério representa um ponto de vista, segundo o qual as alternativas são avaliadas e comparadas, com base em seus respectivos atributos. Normalmente, são modelados matematicamente por uma função $c_i(\mathbf{x}) : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ que atribui uma nota para cada alternativa, refletindo as preferências do decisor. Em geral, cada critério é derivado de uma função objetivo. Porém, vale ressaltar que critérios adicionais que não correspondam a qualquer função objetivo podem ser considerados. Por exemplo, no caso desenvolvido neste trabalho utiliza-se o critério adicional ITAE, a ser definido em (3.22).

Na Seção A.3, do Apêndice A, é ratificada a importância da análise multicritério como uma ferramenta que auxilia o projetista a tomar decisões na presença de incertezas e conflitos de interesse.

A seguir é proposto um método de auxílio à tomada de decisão multicritério, cujo papel é fundamental no contexto da metodologia de projeto proposta, caracterizando-se assim como uma das contribuições deste trabalho.

Método de Decisão pelo Ganho Relativo (MDGR)

Esse método consiste em um procedimento muito simples que permite a ordenação das alternativas e a escolha de uma solução final levando-se em conta múltiplos critérios. O método exige como parâmetros de entrada apenas o peso de cada critério, e seu algoritmo possui um custo computacional relativamente baixo, principalmente quando comparado a outros métodos baseados em comparações entre pares de alternativas, tais como os métodos da escola francesa (*Electre-Elimination and(et)Choice Translating* e *Promethee-Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*).

Esta metodologia, denominada Método de Decisão pelo Ganho Relativo (MDGR), considera a faixa de valores (ganhos) obtidos pelas alternativas que formam a fronteira Pareto estimada, em relação aos valores máximos e mínimos obtidos de cada critério, independente das soluções pertencentes ao conjunto \mathcal{A} e da distribuição das mesmas.

Seja a função de ganho relativo definida a seguir:

$$G_i(\mathbf{a}, \mathcal{A}) = \frac{\Delta_i(\mathbf{a}, \mathcal{A})}{(f_{imax} - f_{imin})}. \quad (3.16)$$

Dada uma fronteira estimada arbitrária, composta pelas ações em \mathcal{A} , e uma alternativa \mathbf{a} , pertencente a essa fronteira, $\Delta_i(\mathbf{a}, \mathcal{A})$ corresponde ao ganho de \mathbf{a} em relação à pior solução de \mathcal{A} considerando-se o critério i , i.e., $\Delta_i(\mathbf{a}, \mathcal{A}) = f_{imax} - f_i(\mathbf{a})$. O ganho relativo $G_i(\mathbf{a}, \mathcal{A})$ é definido como a normalização de $\Delta_i(\mathbf{a}, \mathcal{A})$, em que f_{imax} e f_{imin} , finitos, representam o maior e o menor valor estimado de f_i , respectivamente.

Para gerar a ordenação geral, tendo em vista todos os critérios e as respectivas ponderações w_i (fatores de importância ou simplesmente pesos), os resultados são agregados na função de decisão global, D_{gr} . O índice de ordenação D_{gr} fornece uma ideia de quanto cada alternativa é preferida em relação às outras.

Considera-se a função de decisão global D_{gr} , para todo $i = 1, \dots, m$:

$$D_{gr}(\mathbf{a}) = \min_{1 \leq i \leq m} \{G_1(\mathbf{a}, \mathcal{A})^{w_1}, \dots, G_m(\mathbf{a}, \mathcal{A})^{w_m}\} \quad (3.17)$$

A título de exemplo, considere na Fig. 3.4 as alternativas $\mathbf{a} = (0,6 \ 1)$ e $\mathbf{b} = (0,5 \ 1,5)$ pertencentes à fronteira que compõe o conjunto \mathcal{A} . Considerando o conjunto de critérios $\mathcal{C} = \{f.objetivo_1, f.objetivo_2\}$ (veja Fig. 3.4) e o vetor de pesos $\mathbf{w} = [0,6 \ 0,4]$ definido pelo decisor em função de suas preferências (de acordo com a técnica descrita na Seção A.3.2), então:

Para a alternativa \mathbf{a} , tem-se:

$$G_1(\mathbf{a}, \mathcal{A}) = \frac{(1,1-0,6)}{(1,1-0,1)} = 0,5 \quad \text{e} \quad G_2(\mathbf{a}, \mathcal{A}) = \frac{(7,37-1,0)}{(7,37-0,14)} = 0,88. \quad \text{Portanto,}$$

$$D_{gr}(\mathbf{a}) = \min\{(0,5)^{0,6}, (0,88)^{0,4}\} = \min\{0,66, 0,95\}. \quad \text{Logo, } D_{gr}(\mathbf{a}) = 0,66.$$

De forma análoga, para a alternativa \mathbf{b} , tem-se:

$$G_1(\mathbf{b}, \mathcal{A}) = \frac{(1,1-0,5)}{(1,1-0,1)} = 0,6 \quad \text{e} \quad G_2(\mathbf{b}, \mathcal{A}) = \frac{(7,37-1,5)}{(7,37-0,14)} = 0,81. \quad \text{Portanto,}$$

$$D_{gr}(\mathbf{b}) = \min\{(0,6)^{0,6}, (0,81)^{0,4}\} = \min\{0,74, 0,92\}, \quad \text{Logo, } D_{gr}(\mathbf{b}) = 0,74.$$

Como $D_{gr}(\mathbf{b}) > D_{gr}(\mathbf{a})$, então a alternativa \mathbf{b} é preferida em relação a alternativa \mathbf{a} , tendo em vista as preferências da unidade de decisão definidas em \mathbf{w} .

Um pseudocódigo para o MDGR é mostrado no Algoritmo 3.2.

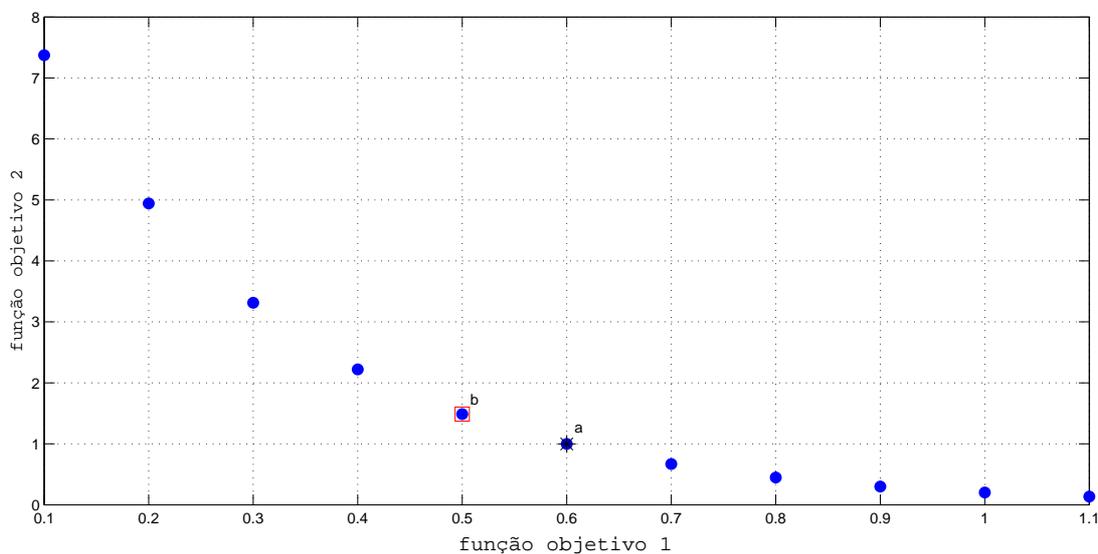


Figura 3.4.: Ilustração do MDGR considerando as alternativas $\mathbf{a} = (0,6 \ 1)$ e $\mathbf{b} = (0,5 \ 1,5)$. Assumindo $\mathbf{w} = [0,6 \ 0,4]$, tem-se $D_{gr}(\mathbf{a}) = 0,66$ e $D_{gr}(\mathbf{b}) = 0,74$, o que sugere a ação \mathbf{b} como preferida.

Algoritmo 3.2: Pseudocódigo MDGR.

Entrada: Conjunto de alternativas \mathcal{A} e definição dos critérios com seus respectivos pesos

```

1 início
2   para cada alternativa  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  faça
3     para cada critério  $c_i \in \mathcal{C}$  faça
4        $\Delta_i(\mathbf{a}, \mathcal{A}) = f_{imax} - f_i(\mathbf{a})$ 
5        $G_i(\mathbf{a}, \mathcal{A}) = \frac{\Delta_i(\mathbf{a}, \mathcal{A})}{(f_{imax} - f_{imin})}$ ;
6     fim
7      $D_{gr}(\mathbf{a}) = \min_{1 \leq i \leq m} \{G_1(\mathbf{a}, \mathcal{A})^{w_1}, \dots, G_m(\mathbf{a}, \mathcal{A})^{w_m}\}$ ;
8   fim
9   ação final  $\leftarrow \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} (D_{gr}(\mathbf{a}))$ ;
10 fim
```

Saída: Alternativa de máximo ganho relativo do conjunto \mathcal{A}

Comportamento do algoritmo MDGR

A fim de avaliar o potencial do método MDGR desenvolvido, considerando-se o interesse global do decisor (ou grupo de decisores), uma breve análise experimental é realizada neste tópico.

De maneira geral, podemos assumir que uma abordagem de decisão bem definida deve ser capaz de indicar uma solução final que satisfaça as preferências da unidade decisora. Para verificar esse recurso, avaliamos a distância perpendicular Euclidiana da solução final selecionada, em relação a um vetor de referência definido no espaço de objetivos (critérios). Neste estudo, assumimos que o vetor de referência de fato representa a aspiração da unidade decisora e que uma solução final próxima à este vetor satisfaz suas preferências. Desta forma, supondo que \mathcal{A} seja um conjunto de alternativas mapeadas no espaço de critérios e \mathcal{R} seja um conjunto de vetores de referência nesse mesmo domínio, a distância média perpendicular fornece uma medida da capacidade do MDGR em satisfazer à diferentes interesses globais da unidade de decisão:

$$d_{media} = (\sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} d(\mathbf{a}_r, \mathbf{r})) / |\mathcal{R}| \quad (3.18)$$

em que $d(\mathbf{a}_r, \mathbf{r})$ é a distância perpendicular Euclidiana entre a solução selecionada $\mathbf{a}_r \in \mathcal{A}$ e o vetor de referência correspondente $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$, sendo $|\mathcal{R}|$ a cardinalidade de \mathcal{R} . A Fig. 3.5 ilustra a medida $d(\mathbf{a}_r, \mathbf{r})$.

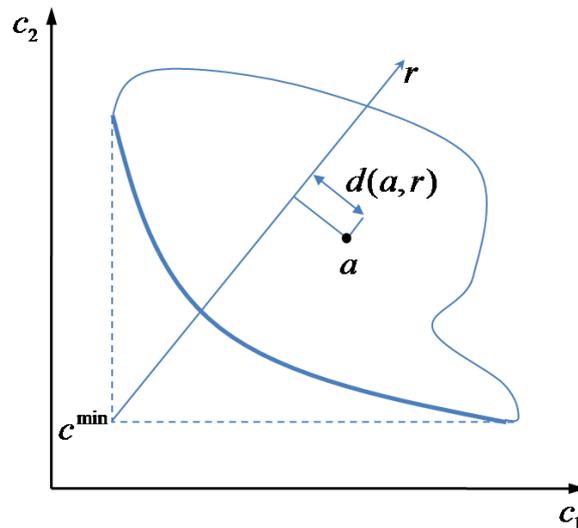


Figura 3.5.: Ilustração da medida $d(\mathbf{a}_r, \mathbf{r})$ entre um vetor de referência \mathbf{r} e a alternativa correspondente selecionada \mathbf{a} .

Para esta análise foram consideradas oito fronteiras bidimensionais para testes (Fig. 3.6), cada uma com algumas propriedades específicas como, por exemplo, fronteiras Pareto convexas, não-convexas e descontínuas. Além disso, foram utilizados nove vetores de referência, $\mathcal{R} = \{(0.1, 0.9), (0.2, 0.8), (0.3, 0.7), \dots, (0.9, 0.1)\}$. A Tabela 3.1 mostra os resultados encontrados, em que d_{media} é a distância perpendicular média em relação à aplicação do método MDGR para todos os vetores de referência, d_{melhor} representa o melhor valor médio possível (calculado em relação à solução mais próxima de cada vetor de referência) e *classificação* é a posição da solução (valor mediano) indicada pelo algoritmo MDGR relativa à ordem crescente da distância perpendicular média de cada solução para o vetor de referência.

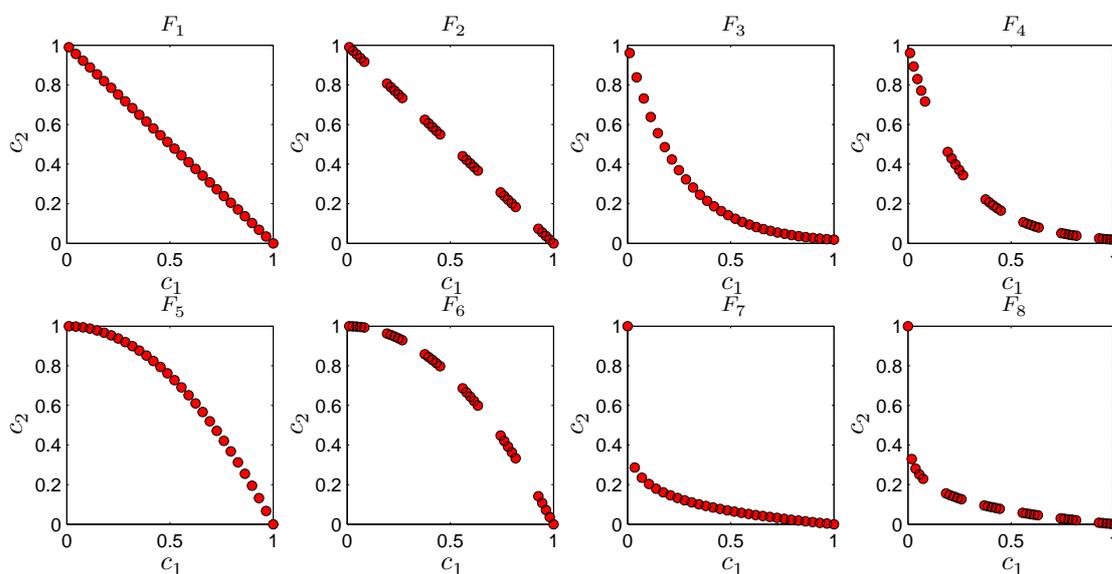


Figura 3.6.: Fronteiras arbitrárias de teste utilizadas na avaliação do método MDGR. Cada uma delas é representada por 30 pontos não dominados.

Tabela 3.1.: Resultados encontrados pelo método MDGR nas fronteiras arbitrárias de teste. d_{medio} é a distância perpendicular em relação a todos os vetores de referência, d_{melhor} é o melhor valor médio possível e *classificação* é a posição da solução (valor mediano), indicado pelo algoritmo MDGR relativa à ordem crescente da distância perpendicular.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
d_{media}	0,0577	0,0734	0,0192	0,0320	0,0944	0,0892	0,0101	0,0195
d_{melhor}	0,0126	0,0300	0,0091	0,0226	0,0152	0,0293	0,0073	0,0166
Classificação	3	3	2	1	4	3	1	1

Com base na *Classificação*, é fácil notar que o algoritmo encontrou a solução mediana mais próxima do vetor de referência para ambas as fronteiras F7 e F8, onde são observadas regiões convexas não contínuas. Um comportamento semelhante foi obtido para os testes de F3 e F4 (funções convexas). O pior caso é apresentado para as fronteiras F5 e F6, mostrando uma certa limitação do método para fronteiras Pareto côncavas. No entanto, em face ao tamanho das fronteiras utilizadas (30 pontos) e considerando-se a solução mais adequada encontrada (baseado em d_{melhor} e na *Classificação*), conclui-se que o método MDGR proposto foi capaz de refletir adequadamente as preferências do decisor, principalmente para uma fronteira convexa, que representa o problema prático abordado neste trabalho, conforme será constatado nos inúmeros exemplos apresentados no Capítulo 4.

Critério Adicional Utilizado na Tomada de Decisão

Na etapa de tomada de decisão é possível adotar critérios de decisão adicionais, além das funções objetivo consideradas na etapa de síntese (otimização), que ajudem a refletir melhor as preferências dos decisores em função da aplicação específica. Este fato pode ser justificado a partir de duas considerações: a inclusão de muitas funções objetivo na etapa de otimização pode dificultar esta etapa, comprometendo a convergência do método, e, ou, o custo computacional associado ao cálculo de alguns critérios pode ser muito elevado se considerado ao longo do processo de otimização.

Índices de desempenho apresentam uma medida quantitativa para a análise da resposta do sistema e podem ser calculados através do erro entre a trajetória da variável controlada em relação ao seu valor de referência. O sistema de controle é considerado

ótimo quando seus parâmetros são ajustados de forma que o índice alcance um valor mínimo ou máximo (Alt & Lages 2003).

Pode-se definir o índice de desempenho como uma medida quantitativa do desempenho de uma malha, sendo escolhido de modo que a ênfase seja dada às especificações necessárias dos processos. Em se tratando de malhas de controle, é comum surgirem perturbações que fazem com que as variáveis de processo desviem dos valores desejados. Atenuação de perturbações é uma preocupação primária em controle de processos, mas em alguns sistemas persiste um erro em sua resposta dinâmica. Quando este erro é permanente tem-se um erro em regime ou erro de “*off-set*”. Para quantificar o erro ocorrido em função de uma perturbação utilizam-se critérios baseados na integral do erro, onde se pode definir o primeiro critério como a **Integral Absoluta do Erro (IAE)**:

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (3.19)$$

O critério IAE é, em muitos casos, uma escolha natural, mas sua desvantagem significativa é que sua avaliação requer grande precisão. Considerando que o critério é baseado em uma integral infinita, é necessário simular por longos períodos de tempo para que o seu valor seja adequado. Para processos não-oscilatórios é comum utilizar-se uma aproximação do critério IAE, denominado de **Integral do Erro (IE)**. O critério IE é uma boa aproximação para IAE em sistemas oscilatórios que sejam bem amortecidos:

$$IE = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (3.20)$$

Outro critério facilmente implementável é a **Integral do Erro Quadrático (ISE)**, mas possui a desvantagem de quantificar em maior escala os erros iniciais que podem ocorrer em sistemas oscilatórios, sendo mais indicado para malhas com características menos oscilatórias:

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (3.21)$$

Para lidar com o problema de quantificação dos erros iniciais em malhas oscilatórias utiliza-se critérios que ponderam menos os erros iniciais, como a **Integral do Tempo Multiplicado pelo Erro Absoluto (ITAE)** ou a **Integral do Tempo Multiplicado**

pelo Erro Quadrático (ITSE), cujas equações se encontram a seguir, respectivamente:

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt \quad (3.22)$$

$$ITSE = \int_0^{\infty} te(t)^2 dt \quad (3.23)$$

Dentre os índices baseados nos erros descritos anteriormente, o que apresenta maior seletividade é o **ITAE**, pois o valor mínimo da integral é prontamente verificável ao serem variados os parâmetros do sistema, motivo esse pelo qual foi o escolhido para ser empregado como critério adicional no método de tomada de decisão, juntamente com as funções objetivo definidas no problema de otimização.

Para sistemas discretos no tempo, também considerados neste trabalho, o critério **ITAE** é definido como:

$$ITAE = \sum_{k=1}^M kT_s |e(k)| \quad (3.24)$$

em que M representa o número de amostras e T_s é o tempo de amostragem para a discretização. Este critério (calculado conforme em 3.24) não foi avaliado durante o processo de otimização devido ao seu alto custo computacional associado.

3.3.3. Etapa de Análise

Também nesta etapa, o controlador calculado na etapa de síntese, $K^*(p)$, deve ser validado para todo o domínio infinito de incerteza, Θ . Em função disso, é necessário calcular o $\alpha_i \in \Theta$, $i = 1, \dots, n_f$, correspondente ao máximo de cada função objetivo definida em (3.11) ou encontrar um $\alpha_u \in \Theta$ que corresponde a um sistema instável. Para determinação desses valores, emprega-se o algoritmo de otimização global *Branch-And-Bound* (*BnB*) cuja estratégia básica é fazer com que as duas funções limitantes, superior e inferior, convirjam para o valor máximo da norma a medida que o domínio de incerteza, Θ , é particionado. Este algoritmo termina quando a diferença relativa entre as funções limitantes é inferior à precisão requerida. O algoritmo é implementado considerando como função limitante inferior a norma \mathcal{H}_∞ (ou \mathcal{H}_2) calculada nos vértices e como função limitante superior o custo garantido \mathcal{H}_∞ (ou \mathcal{H}_2) calculado por meio

de formulações LMI. Ambas as funções são calculadas para o polítopo original e suas subdivisões (Gonçalves et al. 2007).

O problema de análise de estabilidade robusta do sistema politópico pode ser formulado como um problema de otimização em que é desejado determinar, para sistemas em tempo contínuo por exemplo, a maior parte real dos n_e autovalores (ϱ) das infinitas matrizes $A_f(\boldsymbol{\alpha})$:

$$\boldsymbol{\alpha}_u = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} f_u(\boldsymbol{\alpha}), \quad f_u(\boldsymbol{\alpha}) \triangleq \max_i \Re(\varrho_i(A_f(\boldsymbol{\alpha}))) \quad (3.25)$$

sendo $\Re(\varrho_i)$ a parte real do $\varrho_i \in \mathbb{C}$ e $\varrho_i(A_f)$ os autovalores de $A_f \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$.

Se $f_u(\boldsymbol{\alpha}_u) \geq 0$, isso significa que existe polo no semi-plano direito do plano- S e o sistema em malha-fechada com $K^*(s)$ não é robustamente estável.

Para sistemas discretos no tempo, é necessário que os n_e autovalores (ϱ) das infinitas matrizes em malha-fechada $A_f(\boldsymbol{\alpha})$ pertençam ao círculo de raio unitário no plano- Z :

$$\boldsymbol{\alpha}_u = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} f_u(\boldsymbol{\alpha}), \quad f_u(\boldsymbol{\alpha}) \triangleq \max_i |\varrho_i(A_f(\boldsymbol{\alpha}))| \quad (3.26)$$

em que $\varrho_i(A_f)$ é um autovalor de $A_f \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$. Se $f_u(\boldsymbol{\alpha}_u) \geq 1$, existe uma instância de $A_f(\boldsymbol{\alpha})$ com autovalores fora do círculo de raio unitário no plano- Z e o sistema em malha-fechada com $K^*(z)$ não é robustamente estável.

Se o sistema é robustamente estável, deve-se verificar os valores das funções objetivo. Os problemas de cálculo dos custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de um sistema politópico podem ser formulados como problemas de otimização:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_\infty^E &= \arg \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} f_\infty^E(\boldsymbol{\alpha}), \quad f_\infty^E(\boldsymbol{\alpha}) \triangleq \|E(p, \boldsymbol{\alpha}, K^*)\|_\infty, \\ \boldsymbol{\alpha}_\infty^{Tcd} &= \arg \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} f_\infty^{Tcd}(\boldsymbol{\alpha}), \quad f_\infty^{Tcd}(\boldsymbol{\alpha}) \triangleq \|T_{cd}(p, \boldsymbol{\alpha}, K^*)\|_\infty, \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{Tun} &= \arg \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} f_2^{Tun}(\boldsymbol{\alpha}), \quad f_2^{Tun}(\boldsymbol{\alpha}) \triangleq \|T_{un}(p, \boldsymbol{\alpha}, K^*)\|_2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Definindo $\tilde{f}_\infty^E \triangleq \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \tilde{\Theta}} \|E(p, \boldsymbol{\alpha}, K^*)\|_\infty$, $\tilde{f}_\infty^{Tcd} \triangleq \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \tilde{\Theta}} \|T_{cd}(p, \boldsymbol{\alpha}, K^*)\|_\infty$ e $\tilde{f}_2^{Tun} \triangleq \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \tilde{\Theta}} \|T_{un}(p, \boldsymbol{\alpha}, K^*)\|_2$, os valores ótimos obtidos para o conjunto finito, novos pontos no conjunto finito $\tilde{\Theta}$ serão acrescentados nas seguintes situações:

1. Se $f_u(\boldsymbol{\alpha}_u) \geq 0$, então $\tilde{\Theta} \leftarrow \tilde{\Theta} \cup \{\boldsymbol{\alpha}_u\}$ (ou $f_u(\boldsymbol{\alpha}_u) \geq 1$ no caso de sistemas em tempo discreto);
2. Se $|f_\infty^E(\boldsymbol{\alpha}_\infty^E) - \tilde{f}_\infty^E| > \epsilon_e$, então $\tilde{\Theta} \leftarrow \tilde{\Theta} \cup \{\boldsymbol{\alpha}_\infty^E\}$;
3. Se $|f_\infty^{Tcd}(\boldsymbol{\alpha}_\infty^{Tcd}) - \tilde{f}_\infty^{Tcd}| > \epsilon_\infty$, então $\tilde{\Theta} \leftarrow \tilde{\Theta} \cup \{\boldsymbol{\alpha}_\infty^{Tcd}\}$;
4. Se $|f_2^{Tun}(\boldsymbol{\alpha}_2^{Tun}) - \tilde{f}_2^{Tun}| > \epsilon_2$, então $\tilde{\Theta} \leftarrow \tilde{\Theta} \cup \{\boldsymbol{\alpha}_2^{Tun}\}$;

onde ϵ_e , ϵ_∞ e ϵ_2 são valores de precisão preestabelecidos no algoritmo.

O conjunto $\tilde{\Theta}$ é inicializado com um conjunto finito de pontos representado pelos η vértices do politopo original (o número de vetores $\boldsymbol{\alpha}$ é igual ao número de colunas da matriz identidade de ordem η). Se na etapa de análise são acrescentados pontos no conjunto, $\boldsymbol{\alpha}_u$ ou $\boldsymbol{\alpha}_\infty^E$ e/ou $\boldsymbol{\alpha}_\infty^{Tcd}$ e/ou $\boldsymbol{\alpha}_2^{Tun}$, os passos de síntese, tomada de decisão e análise devem ser executados novamente, caso contrário o procedimento é finalizado. O processo efetivamente termina quando se verifica que o sistema em malha fechada é robustamente estável e os valores máximos das funções objetivo obtidos nas três etapas do procedimento são próximos de acordo com uma precisão especificada.

Neste trabalho, para sistemas em tempo contínuo, os cálculos do custo garantido são baseados no Lema 1, apresentado em de Oliveira et al. (2004b), para custo garantido \mathcal{H}_∞ e uma combinação dos Lemas 1 e 2, apresentados em de Oliveira et al. (2004a), para o custo garantido \mathcal{H}_2 . No caso de sistemas discretos no tempo, os cálculos dos custos garantidos são baseados no Teorema 4 para o custo garantido \mathcal{H}_∞ e no Teorema 3 para o custo garantido \mathcal{H}_2 , ambos apresentados em de Oliveira et al. (2002).

Na próxima seção, o algoritmo *BnB* e sua aplicação na etapa de análise são descritos com mais detalhes, como apresentado em Gonçalves (2006).

Algoritmo *BnB* Aplicado ao Cálculo dos Custos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com a Precisão Requerida

- **Escolha das Funções Limitantes**

Seja $T_{zw}(p, \boldsymbol{\alpha}) = C(\boldsymbol{\alpha})(pI - A(\boldsymbol{\alpha}))^{-1}B(\boldsymbol{\alpha}) + D(\boldsymbol{\alpha})$ a matriz de transferência de w para z , com p representando s ou z e $\boldsymbol{\alpha} \in \Theta$. Por conveniência, a dependência de T_{zw} de p e $\boldsymbol{\alpha}$ será omitida a partir deste ponto. O problema considerado é o cálculo dos valores máximos das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , da matriz de transferência $T_{zw}(p, \boldsymbol{\alpha})$, para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \Theta$.

Sejam $\delta_{p.c.}$ e $\gamma_{p.c.}$ esses valores máximos das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no domínio de incerteza:

$$\delta_{p.c.} \triangleq \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{zw}(p, \boldsymbol{\alpha})\|_2 \quad (3.28)$$

$$\gamma_{p.c.} \triangleq \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{zw}(p, \boldsymbol{\alpha})\|_\infty \quad (3.29)$$

Os custos garantidos de \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , $\delta_{c.g.}$ e $\gamma_{c.g.}$, calculados por meio de formulações baseadas em LMIs, são apenas um limite superior para o valor máximo das normas no domínio de incerteza, sem nenhuma informação a respeito da diferença entre estes valores:

$$\delta_{p.c.} = \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{zw}(p, \boldsymbol{\alpha})\|_2 \leq \delta_{c.g.} \quad (3.30)$$

$$\gamma_{p.c.} = \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{zw}(p, \boldsymbol{\alpha})\|_\infty \leq \gamma_{c.g.} \quad (3.31)$$

Uma vez que o cálculo exato do valor máximo da norma é um problema de difícil solução, em Gonçalves (2006) é apresentado um método para o cálculo dos custos ϵ -garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , δ_c e γ_c , que são definidos como os valores que atendem as seguintes desigualdades:

$$\delta_{p.c.} \leq \delta_c \leq (1 + \epsilon)\delta_{p.c.} \quad (3.32)$$

$$\gamma_{p.c.} \leq \gamma_c \leq (1 + \epsilon)\gamma_{p.c.} \quad (3.33)$$

A função limitante superior é inicialmente o valor do custo garantido calculado para o politopo inicial correspondente ao domínio de incerteza. A partir da divisão do politopo inicial, a função limitante superior é o pior caso de custo garantido calculado em cada uma das subdivisões. A função limitante inferior é inicialmente o valor máximo da norma calculada nos vértices. Como descrito na próxima seção, a técnica de divisão do politopo requer a inclusão de novos vértices e a função limitante inferior passa a ser o máximo valor da norma calculada para os vértices iniciais e os novos vértices acrescentados. Como a cada iteração a subdivisão com o maior valor de custo garantido é escolhida para ser particionada, o pior caso de custo garantido é reduzido e mais pontos são considerados

para o cálculo da função limitante inferior. A medida que se aumenta o número de partições reduzindo-se a dimensão das mesmas e aumentando-se o número de pontos, as funções limitantes convergem para o valor procurado dentro da precisão especificada.

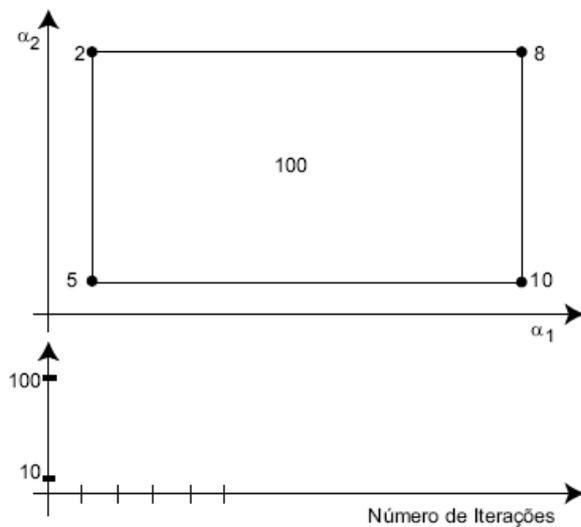
Com esta escolha de funções limitantes, o algoritmo *BnB* irá combinar a redução do conservadorismo das formulações LMI pela partição do domínio de incerteza (função limitante superior) com uma técnica “inteligente” de grade (função limitante inferior), em que o refinamento da grade ocorre apenas no subpolitopo com maior valor de custo garantido. O custo computacional relacionado com o cálculo do custo \mathcal{H}_q pelas duas técnicas simultaneamente é justificado pela disponibilidade da informação da precisão do cálculo.

A eficiência do algoritmo *BnB* dependerá da escolha da formulação LMI com melhor compromisso entre complexidade e conservadorismo.

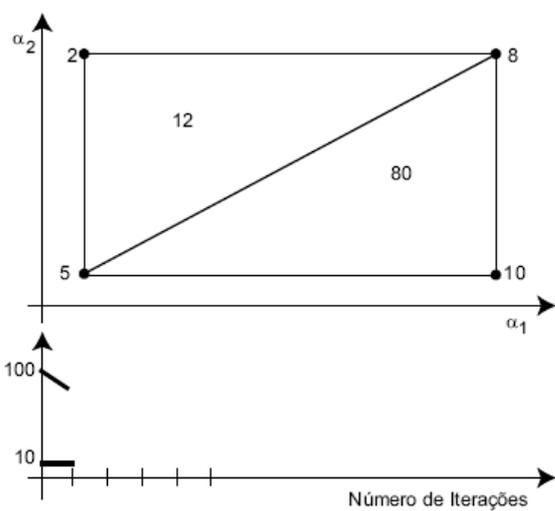
• Técnica de Partição do Politopo

Na implementação do algoritmo *BnB*, é aplicada uma técnica de partição de politopos que combina triangularização de Delaunay (decomposição do politopo em um conjunto de simplexos) e subdivisão de simplexos orientada pelas arestas (Gonçalves et al. 2006).

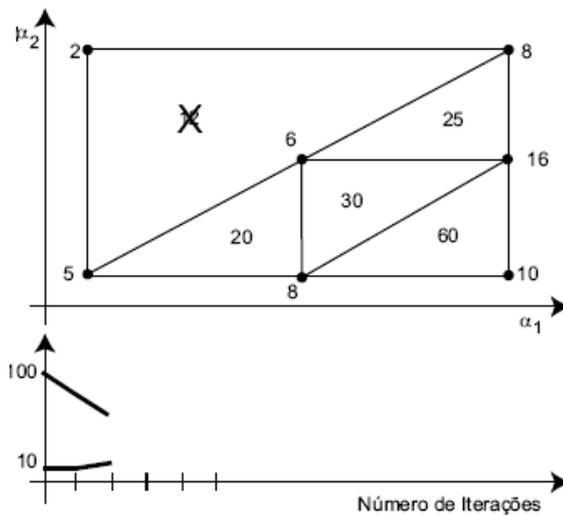
As Figs 3.7 e 3.8 (Gonçalves et al. 2006) apresentam uma execução do algoritmo *BnB* para o cálculo do custo \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , considerando um politopo no espaço bidimensional igual a um retângulo (4 vértices), reproduzida aqui para uma melhor compreensão do método (Gonçalves 2006). No passo inicial, Fig. 3.7(a), são calculadas as normas nos vértices do politopo e o custo garantido para o politopo. Neste caso o limite inferior é o maior valor de norma nos vértices, ou seja 10, e o limite superior é o custo garantido igual a 100. Na primeira partição, Fig. 3.7(b), como o retângulo não é um simplexo, a divisão é realizada pela triangularização de Delaunay que divide o retângulo em dois triângulos sem acrescentar novos vértices. Deste modo o valor do limite inferior se mantém, mas o valor do limite superior torna-se o maior valor de custo garantido obtido, 80. A partir deste ponto, as divisões ocorrem nos triângulos com maior custo garantido. A divisão do triângulo pela técnica de subdivisão de simplexos orientada pelas arestas gera quatro novos triângulos e três novos vértices, Fig. 3.7(c). Os valores dos limites são atualizados para o novo valor máximo da norma, igual a 16 e o novo valor máximo de custo garantido, igual a 60. Observe que o triângulo com custo garantido 12 pode ser descartado do espaço de busca já que o maior valor de norma é superior a este valor. As divisões prosseguem até que a diferença relativa entre os limites superior e inferior atinja a precisão desejada, conforme as Figs. 3.8(a) a 3.8(c).



(a) Iteração 0.



(b) Iteração 1.



(c) Iteração 2.

Figura 3.7.: Ilustração do algoritmo *BnB* - parte 1

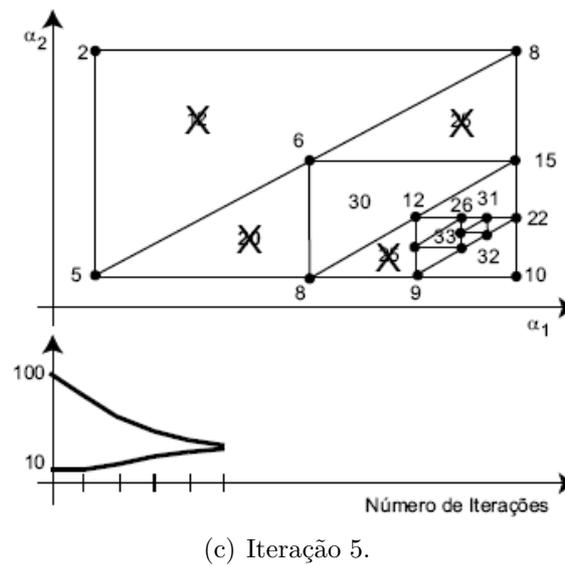
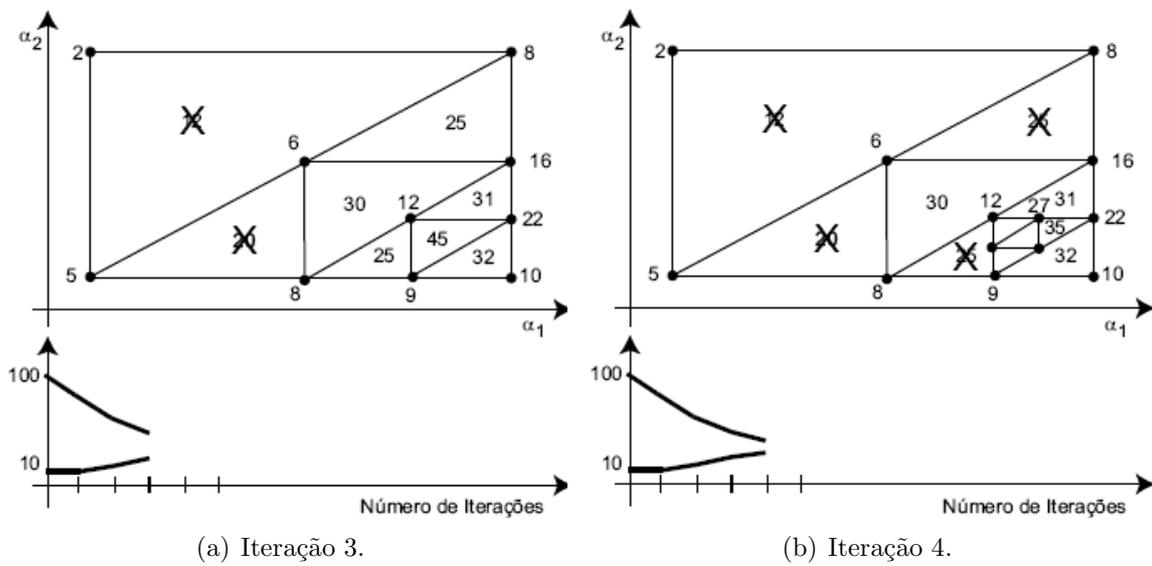


Figura 3.8.: Ilustração do algoritmo *BnB* - parte 2.

3.3.4. Visão Geral do Procedimento de Síntese do Controle Robusto

Conforme especificado a seguir no Algoritmo 3.3, o método desenvolvido neste trabalho interage inicialmente com o decisor para adquirir opiniões e julgamentos relativos ao problema da síntese de controle robusto multiobjetivo. Essa interação é estabelecida por meio da definição, pelo decisor, de uma matriz de preferências considerando-se o nível de importância de cada função objetivo. Exemplos de definição desta matriz são ilustrados no capítulo seguinte. Em seguida, na primeira etapa do Processo Analítico Hierárquico (AHP), apresentado na Seção A.3.2 do Apêndice A, o mesmo gera o vetor de referência, definido conforme em (3.15), com base na informação de entrada (matriz de preferências), o que promove uma pesquisa evolutiva em torno de uma região de preferência do problema multiobjetivo. Observa-se que é possível otimizar uma única função escalarizada com relação apenas ao vetor de referência gerado, o que proporciona uma única solução final. Um método de auxílio a tomada de decisão não seria necessário neste caso, uma vez que a decisão final é trivial. No entanto, um pequeno conjunto de soluções em torno da região de preferência pode ser de grande relevância na prática, fornecendo alternativas de compromisso (*trade-off*) para o problema real, flexibilizando-se a escolha da ação final através de uma abordagem de apoio à decisão. Neste sentido, o método MDGR, apresentado na Seção 3.3.2, é aplicado sobre o conjunto estimado de soluções robustas, sendo que uma única alternativa é indicada como a mais favorável.

No passo de síntese, o MOEA-P baseado em preferência, conforme apresentado na Seção 3.3.1, é usado para resolver o problema de otimização (3.11) ao longo de um conjunto finito de pontos $\tilde{\Theta} \subset \Theta$. Este conjunto é inicialmente representado pelos vértices do polítopo de incertezas ($V_{inicial}$), conforme o Algoritmo 3.3. Em seguida, o MDGR é aplicado sobre as estimativas de Pareto encontradas, de modo a indicar um controlador adequado. Para validar o controlador encontrado na etapa anterior, é executado um procedimento de análise com base em uma combinação do algoritmo *BnB* e formulação LMI de análise. No passo de análise, se a ação selecionada representa uma solução factível, verificando-se que o sistema em malha fechada é robustamente estável e a diferença entre as funções objetivo nas etapas de síntese e de análise são menores do que uma precisão especificada, termina-se o processo iterativo. Caso contrário, novos pontos serão incluídos no domínio de incerteza e o procedimento iterativo é repetido. O critério de parada geral é representado pela variável binária *condição de parada* no Alg. 3.3.

Um pseudocódigo para a estratégia geral aplicada é detalhado a seguir, enfatizando o processo iterativo de três etapas composto pela síntese, tomada de decisão multicritério e análise.

Algoritmo 3.3: Procedimento de Síntese do Controle Robusto.

Entrada: Preferências do Decisor

```

1 início
2   Condição de parada ← falso ; // critério de parada
3    $\mathbf{r}$  ← Primeira fase do AHP ; // definição do vetor de referência
4    $\tilde{\Theta}$  ←  $V_{inicial}$  ; // conjunto finito de vértices do politopo
5   enquanto Condição de parada for falsa faça
6     /* Síntese pelo MOEA-P */
7      $sol$  ← MOEA-P( $\mathbf{r}$ ) ; // soluções de compromisso
8     /* Suporte à decisão multicritério */
9      $K^*$  ← MDGR( $sol$ ) ; // ação preferida
10    /* procedimento de análise */
11     $[\alpha_u, \alpha_\infty^E, \alpha_\infty^{T_{cd}}, \alpha_2^{T_{un}}]$  ← BnB e LMI de análise ( $K^*$ ) ; // Gonçalves 2007
12     $\tilde{\Theta}_{aux}$  ←  $\tilde{\Theta}$  ; // salva politopo original
13    se alternativa  $K^*$  for uma solução inactível então
14      |  $\tilde{\Theta}$  ←  $\tilde{\Theta} \cup \alpha_u$  ; // insere novos pontos no politopo
15    senão
16      se  $|f_E^{synthesis}(K^*) - f_E^{analysis}(K^*)| \geq \epsilon_\infty^E$  então
17        |  $\tilde{\Theta}$  ←  $\tilde{\Theta} \cup \alpha_\infty^E$  ; // insere novos pontos no politopo
18      fim
19      se  $|f_{T_{cd}}^{synthesis}(K^*) - f_{T_{cd}}^{analysis}(K^*)| \geq \epsilon_\infty^{T_{cd}}$  então
20        |  $\tilde{\Theta}$  ←  $\tilde{\Theta} \cup \alpha_\infty^{T_{cd}}$  ; // insere novos pontos no politopo
21      fim
22      se  $|f_{T_{un}}^{synthesis}(K^*) - f_{T_{un}}^{analysis}(K^*)| \geq \epsilon_2^{T_{un}}$  então
23        |  $\tilde{\Theta}$  ←  $\tilde{\Theta} \cup \alpha_2^{T_{un}}$  ; // insere novos pontos no politopo
24      fim
25    fim
26  fim
27 fim

```

Saída: Solução final K^* robustamente estável em malha fechada

3.4. Conclusão

Neste capítulo, o problema de controle e a síntese do controlador robusto foram propostos através da programação semi-infinita tipo “minimax” e da aplicação do Algoritmo Evolucionário Multiobjetivo Multipopulacional Baseado em Preferências (MOEA-P), auxiliados pelo Método de Decisão pelo Ganho Relativo (MDGR), desenvolvido neste trabalho.

O procedimento de síntese diretamente no espaço de parâmetros do controlador, uma vez implementado, é fácil de ser adaptado para diferentes problemas de controle robusto. Tal procedimento possibilita acrescentar quaisquer tipos de restrições ao problema e obter soluções menos conservadoras, onde as formulações LMI não conseguem escolher a ordem e a estrutura do controlador.

Como será abordado no Capítulo 4, diversos estudos de caso serão apresentados, tanto para sistemas em tempo contínuo como discreto, bem como a parametrização utilizada no MOEA-P e os resultados obtidos na implementação prática.

Capítulo 4.

Resultados

4.1. Introdução

Neste capítulo são apresentadas a parametrização do MOEA-P e especificações de projeto para controladores robustos com realimentação dinâmica de saída, considerando-se diversas abordagens. Foi utilizado o algoritmo MOEA-P, desenvolvido neste trabalho, para solução de projetos multiobjetivo com e sem restrições. Para todos os estudos de caso foi aplicada uma técnica de auxílio à tomada de decisão multicritério, baseada nos métodos MDGR e AHP, em que a função deste último foi obter uma definição mais consistente e inteligente do vetor de pesos para as ponderações dos critérios considerados.

Para todos os exemplos deste capítulo, considerou-se um controlador robusto para sistemas incertos e a otimização do modelo de referência pelo MOEA-P. Nos exemplos 1 e 2, um sistema de tanques interativos é analisado com e sem restrições de projeto, sendo que a abordagem biobjetivo avalia a relação de compromisso entre o erro de rastreamento do sinal de referência e a atenuação do ruído de medição. No exemplo 3, para o mesmo sistema, uma análise comparativa relativa ao esforço de controle do controlador robusto foi discutida. No exemplo 4, um sistema totalmente diferente dos tanques interativos e puramente mecânico (dupla massa/mola) é apresentado, cujo objetivo foi mostrar a ampla aplicabilidade e eficácia do método desenvolvido neste trabalho. Finalmente, no exemplo 5, um sistema em tempo contínuo, hipotético e matematicamente desenvolvido foi utilizado, cujo objetivo foi mostrar de forma mais evidente o processo iterativo entre as etapas do procedimento de síntese do controlador, aplicando-se todas as técnicas desenvolvidas neste trabalho.

4.2. Parametrização Geral do MOEA-P

Conforme apresentado no Capítulo 3, na Seção 3.3.1, o MOEA-P foi executado com parâmetros derivados a partir de testes empíricos, considerando-se a intuição do projetista e valores disponíveis na literatura (Zaharie & Pectu 2003a, Montaña et al. 2010).

Na Tabela 4.1 são mostrados os parâmetros utilizados no algoritmo empregado, sendo que a parametrização indicada com (*) variou dependendo de cada exemplo mostrado neste capítulo e também no Apêndice B. O número máximo de iterações foi definido de tal forma que fosse possível alcançar valores promissores de normas e sinais de saída atraentes.

Tabela 4.1.: Alg. Evolucionário Multiobjetivo Multipopulacional Baseado em Preferências

Parametrização Geral do MOEA-P		
Parâmetro	Valor	Descrição
F	0,5	Escala dos vetores-diferenças
C	0,5	Probabilidade de recombinação discreta
pm	0,4	Probabilidade de migração entre subpopulações
ep	10	Número de gerações entre migrações (época)
<i>nb</i>	5	Tamanho da vizinhança
m	10	Tamanho de cada subpopulação
s	6	Número de subpopulações
gmax (*)	300	Número máximo de iterações

4.3. Sistemas em Tempo Discreto com Abordagem Multiobjetivo

4.3.1. Sistema de Tanques Industriais Interligados

Considere o sistema de controle de nível de dois tanques interligados apresentado na Fig. 4.1 (Bachur et al. 2010b) e um modelo linearizado em torno de um ponto de operação. As variáveis em letras maiúsculas correspondem aos valores do ponto de operação: $\bar{Q}_u =$

$\bar{Q}_1 = 0,4m^3/s$, $\bar{Q}_d = 0,1m^3/s$, $\bar{Q}_2 = 0,5m^3/s$, $\bar{H}_1 = 2m$ e $\bar{H}_2 = 1m$. As variáveis em letras minúsculas correspondem às variações em torno do ponto de operação. O vetor de variáveis de estado estendido, considerando a integral do erro de rastreamento, é definido como $\mathbf{x}(t) \triangleq [h_1(t) \ h_2(t) \ v(t)]^T$, sendo $v(t) \triangleq \int [r(t) - h_2(t) - n(t)]dt$. A saída controlada ou variável controlada é o nível do líquido contido no tanque 2, $h_2(t)$, a variável manipulada é a vazão de entrada no tanque 1, $u(t) = q_u(t)$, e o distúrbio é a vazão de entrada no tanque 2, $d(t) = q_d(t)$. As variáveis associadas ao desempenho, $\mathbf{z}(t)$, são definidas como a variável controlada e a variável manipulada. As variáveis medidas, utilizadas como entradas do controlador dinâmico por realimentação de saída, são o nível do líquido contido no tanque 2 corrompido pelo ruído, $n(t)$, e a integral do erro de rastreamento. As equações dinâmicas deste sistema são apresentadas em (4.1) :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & \frac{k_1}{A_1} & 0 \\ \frac{k_1}{A_2} & -\frac{k_1+k_2}{A_2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_u + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ q_d \\ n \end{bmatrix} \\
 z &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
 y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ q_d \\ n \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

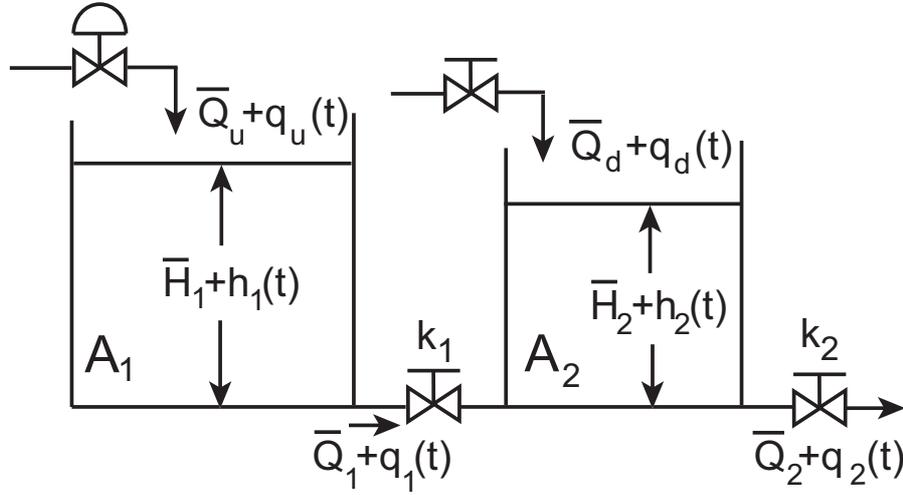


Figura 4.1.: Sistema de controle de nível de dois tanques interligados.

As áreas transversais dos tanques são $A_1 = 10m^2$ e $A_2 = 5m^2$. Considere que k_1 e k_2 , resistências hidráulicas das válvulas manuais, sejam parâmetros incertos que podem assumir valores na faixa: $0,15 \leq k_1 \leq 0,25$ e $0,2 \leq k_2 \leq 0,3$. O sistema incerto é representado por um modelo politópico com quatro vértices correspondendo aos valores extremos dos dois parâmetros incertos. Os objetivos de projeto são: garantir que o nível do líquido contido no tanque 2 se iguale ao sinal de referência com uma resposta transitória de rastreamento próxima à de um modelo de referência, minimizar a influência do distúrbio $q_d(t)$ sobre $h_2(t)$ e atenuar o efeito do ruído de medição, $n(t)$, sobre a variável manipulada, $q_u(t)$. É desejado que $q_u(t)$ varie dentro de uma faixa aceitável para os seguintes sinais de teste: $q_d(t) = -0,01 \times \mathbf{1}(t - 500)$, $-0,001 \leq n(t) \leq 0,001$ e $r(t) = 0,1 \times \mathbf{1}(t)$, onde $\mathbf{1}(t - \tau)$ é a função degrau unitário no tempo τ .

Como modelo de referência é utilizado uma realização no espaço de estados balanceada da função de transferência de segunda ordem:

$$T_m(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.2)$$

sendo ζ o coeficiente de amortecimento e ω_n a frequência natural. Esses parâmetros são otimizados pelo MOEA-P, dentro de uma faixa especificada que garanta o transitório desejado.

Para todos os estudos de caso foi definida uma matriz de preferências pelo decisor, baseada no método AHP e em sua Tabela A.1, apresentados na Seção A.3.2 (Apêndice A), cujos critérios (c_1) e (c_2) variam a cada exemplo, e são acrescidos do terceiro critério *ITAE*

(c_3). Exceto para os exemplos 3 e 5 (AHP_{pref2}), a matriz de preferência considerada foi:

$$AHP_{pref1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 1/5 & 1 & 3 \\ 1/8 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Nesta matriz de preferências, definiu-se que o critério c_1 tem uma importância forte em comparação a c_2 e entre muito forte e extrema com relação a c_3 . Considerou-se que o critério c_2 possui importância moderada em relação a c_3 . De acordo com essas preferências, o método AHP estabelece o vetor de prioridades w_{AHP} , sendo que o mesmo foi utilizado como um vetor de ponderações para o método MDGR.

Exemplo 1 - Problema Biobjetivo Irrestrito, Considerando o Erro ao Modelo de Referência x Ruído de Medição

Neste exemplo inicial e nos demais, o modelo de referência foi otimizado pelo MOEA-P. Tal sistema foi convertido em tempo discreto com um tempo de amostragem $T_s = 1,25s$ por meio do método de discretização de sistemas tipo “segurador de ordem zero” nas entradas. Após a discretização, com $T_s = 1,25s$, definido como o menor valor possível através de testes empíricos, o modelo de referência discreto para este estudo de caso foi dado por (Ogata 1987):

$$T_m(z) = \frac{0,0020516z + 0,001970}{z^2 - 1,88z + 0,8852} \quad (4.4)$$

O problema considerado neste exemplo é estabelecido como: dado um sistema incerto linear invariante no tempo, em tempo discreto, representado por um modelo politópico, $\mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha \in \Theta$, e um modelo de referência, $T_m(z)$, com as características desejadas de resposta transitória, encontrar um controlador por realimentação dinâmica de saída, $K(z)$, que minimize a norma \mathcal{H}_∞ máxima do erro entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada, $E(z)$, e a norma \mathcal{H}_2 máxima da função de transferência $T_{un}(z)$ relacionada com a atenuação do ruído de medição, no domínio

politópico de incerteza:

$$K^*(z) = \arg \min_{K(z)} \begin{bmatrix} \max_{\alpha \in \Theta} \|E(z, \alpha, K)\|_{\infty} \\ \max_{\alpha \in \Theta} \|T_{un}(z, \alpha, K)\|_2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

sujeito a: $K(z) \in \mathcal{F}$

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável.

Considerando o procedimento de projeto proposto neste exemplo, os parâmetros utilizados no MOEA-P foram definidos conforme a Tabela 4.1, sendo o vetor de pesos $\mathbf{w}_{AHP} = [w_{erro} \ w_{ruído} \ w_{ITAE}] = [0,74 \ 0,18 \ 0,08]$. O controlador discreto K_1 encontrado, composto em sua estrutura por uma matriz de 20 parâmetros e definido por duas funções de transferências de terceira ordem, escolhido pelo MDGR e marcado com * na Fig. 4.2, resultou em $\max \|E\|_{\infty} = 0,2314$ e $\max \|T_{un}\|_2 = 0,4838$. Os sinais da variável de processo (PV) e da variável de controle (CV) são mostrados nas Figs. 4.5 e 4.6, respectivamente. Para as funções objetivo consideradas, observa-se um aceitável erro em relação ao modelo de referência, uma razoável atenuação do ruído de medição no sinal de saída do controlador (CV) com mediano esforço de controle, no momento do distúrbio, e uma eficaz rejeição ao mesmo ($t = 600s$). Os resultados comprovam a eficácia deste método, uma vez que obteve-se um controlador robusto, estável e respostas de acordo com as especificações de projeto. A Fig. 4.3 mostra a resposta transitória da PV do sistema em malha fechada apenas para o vértice 1, sendo este pertencente ao grupo de quatro vértices do politopo de incertezas.

$$K_1(z) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0,5979 & 0,4687 & -0,4098 & 0,4454 & -0,7441 \\ -0,2256 & -0,7112 & 0,7810 & -0,0323 & 0,2814 \\ 1,0000 & 0,3674 & -0,6684 & -0,3414 & 0,1269 \\ \hline -0,0444 & 0,1141 & 0,3504 & -0,1582 & 0,1712 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{-0,15822(z - 0,8237)(z + 1,085)(z + 1,424)}{(z - 0,4098)(z^2 + 1,191z + 0,3673)} \\ \frac{0,17118(z - 0,9814)(z + 0,9755)(z + 1,428)}{(z - 0,4098)(z^2 + 1,191z + 0,3673)} \end{array} \right]^T$$

A solução escolhida também assegurou um adequado esforço de controle para o problema em questão, sendo que a variável manipulada, definida pela variável de controle (CV), variou com diferentes intensidades de acordo com os quatro vértices pertencentes ao politopo de incertezas, conforme mostrado na Fig. 4.6. Esse fato demonstra a influência das incertezas sobre o comportamento do sistema. Esta variação do sinal de controle em função dos vértices, resulta em um comportamento condizente observado na variável de processo (PV), conforme a Fig. 4.5, assegurando com isso o bom rastreamento do sinal de referência (representado nesta figura e nos demais exemplos em azul escuro), dada a variação dos parâmetros que compõem este domínio de incertezas.

Vale lembrar que o conflito de interesses entre as funções objetivo (*trade-off*) torna a solução do problema mais difícil de ser obtida, uma vez que a minimização de $\|T_{un}\|_2$ (atenuação do ruído de medição) afeta diretamente o esforço de controle na saída do controlador (CV) que, por sua vez, interfere no erro em relação ao modelo de referência, através da resposta da Variável de Processo (PV).

Finalmente, a Fig. 4.4 apresenta a curva de resposta ao degrau fornecida pelo modelo de referência otimizado. A partir do segundo exemplo, a mesma não mais será apresentada em função da enorme semelhança apresentada a cada estudo de caso. Esta mesma ressalva também foi aplicada para os modelos de referência otimizados e para as estruturas dos controladores, a cada exemplo, cujo objetivo foi o de não se tornar prolixo este capítulo.

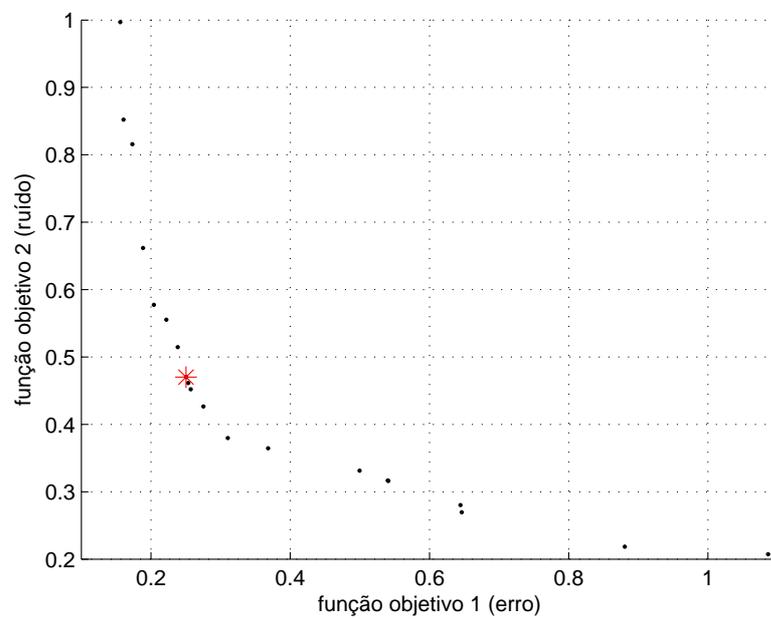


Figura 4.2.: Controlador robusto escolhido pelo MDGR e marcado com *. Funções objetivo: erro = 0,2314 e ruído = 0,4838; sem restrição. Parâmetros do MOEA-P: conforme a Tabela 4.1. Vetor de pesos do MDGR [erro, ruído, ITAE]: $\mathbf{w}_{AHP} = [0,74 \ 0,18 \ 0,08]$.

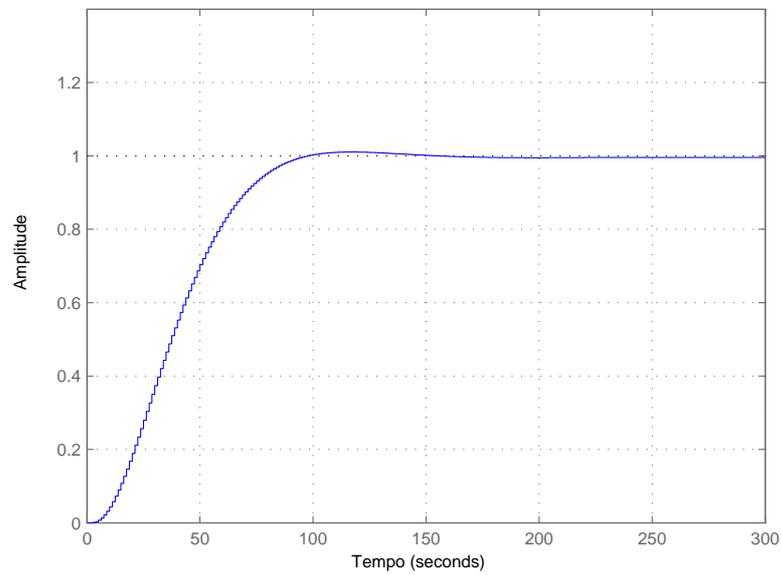


Figura 4.3.: Resposta transitória da PV do sistema em malha fechada para o vértice 1.

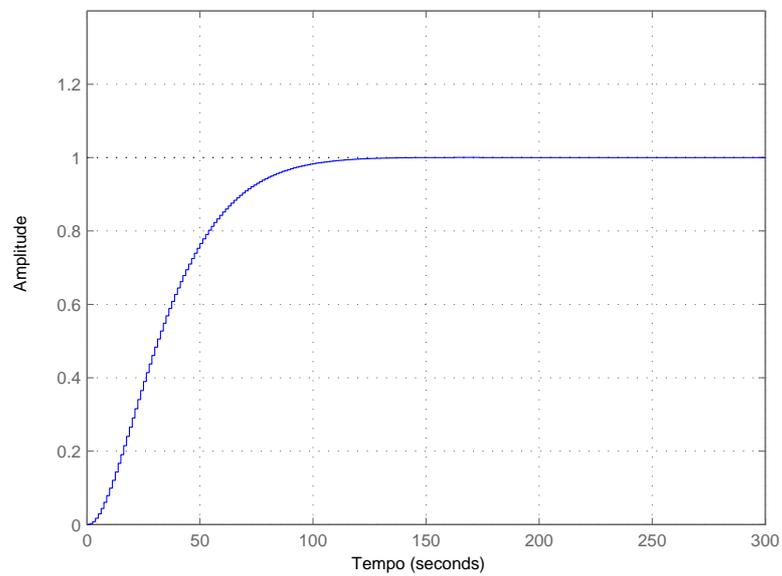


Figura 4.4.: Resposta transitória do modelo de referência otimizado.

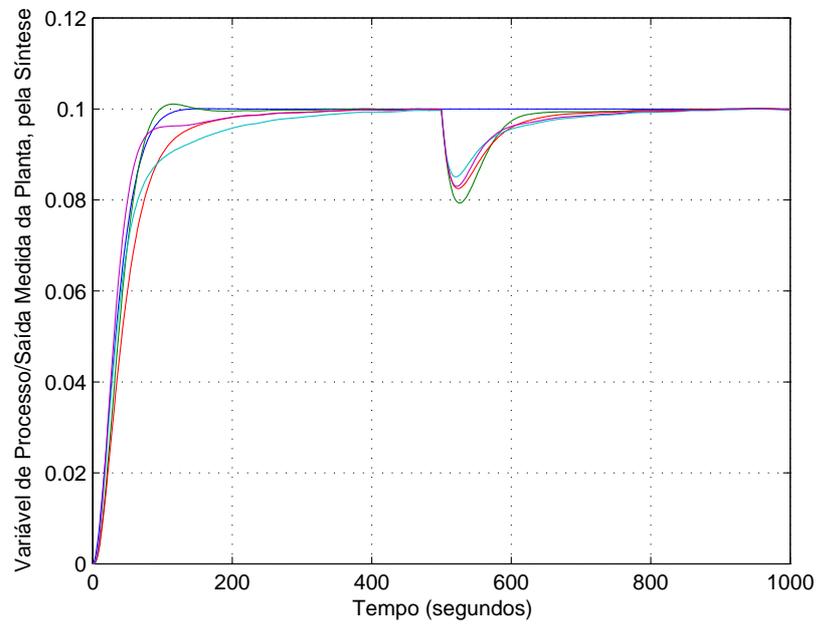


Figura 4.5.: Resposta da PV do controlador K_1 robusto, sendo o modelo de referência representado em azul escuro.

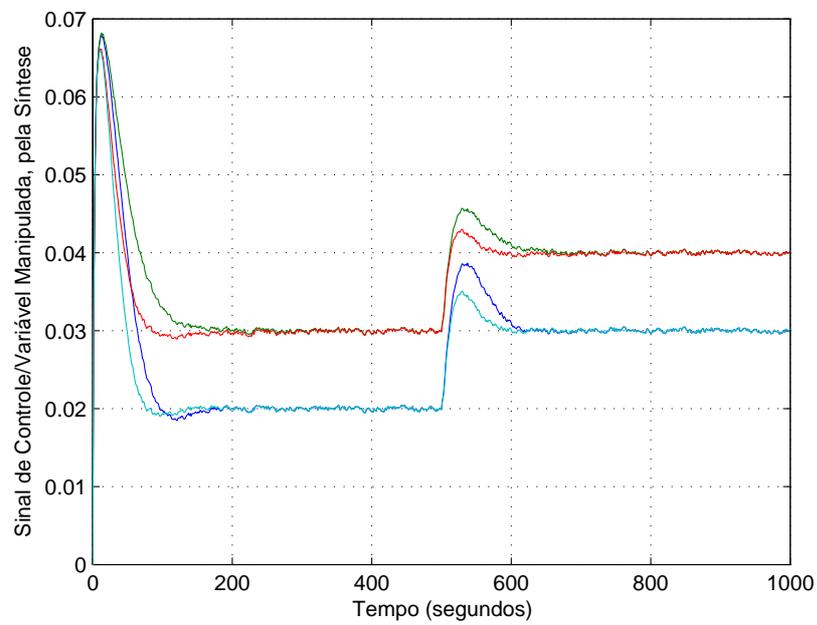


Figura 4.6.: Resposta da CV do controlador K_1 robusto.

Exemplo 2 - Problema Biobjetivo Restrito, Considerando o Erro ao Modelo de Referência x Ruído de Medição e uma Mínima Rejeição ao Distúrbio

Esta formulação é estabelecida como: dado um sistema incerto linear invariante no tempo, em tempo discreto, representado por um modelo politópico, $\mathcal{P}(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \Theta$, e um modelo de referência, $T_m(z)$, com as características desejadas de resposta transitória, encontrar um controlador por realimentação dinâmica de saída, $K(z)$, que minimize a norma \mathcal{H}_∞ máxima do erro entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada, $E(z)$, e a norma \mathcal{H}_2 máxima da função de transferência $T_{un}(z)$ relacionada com a atenuação do ruído de medição, no domínio politópico de incerteza, sujeito à uma rejeição mínima ao distúrbio de processo definido pelo parâmetro ϵ_d , conforme a formulação a seguir:

$$K^*(z) = \arg \min_{K(z)} \begin{bmatrix} \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|E(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \\ \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{un}(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

sujeito a: $\max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{cd}\|_\infty \leq \epsilon_d$

$$K(z) \in \mathcal{F}$$

sendo \mathcal{F} é o conjunto de controladores tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável.

Considerando o procedimento de projeto proposto neste exemplo, os parâmetros utilizados no MOEA-P foram definidos conforme a Tabela 4.1, sendo o vetor de pesos $\boldsymbol{w}_{AHP} = [w_{erro} \ w_{ruído} \ w_{ITAE}] = [0,74 \ 0,18 \ 0,08]$. O controlador encontrado K_2 , escolhido pelo MDGR e marcado com * na Fig. 4.7, resultou em $\max \|E\|_\infty = 0,2774$ e $\max \|T_{un}\|_2 = 0,4622$. Os sinais da variável de processo (PV) e da variável de controle (CV) são mostrados nas Figs. 4.8 e 4.9, respectivamente. Para a restrição imposta relativa a uma rejeição mínima ao distúrbio, observa-se um maior erro em relação ao modelo de referência, uma melhor atenuação do ruído de medição, menor esforço de controle no sinal de saída do controlador (CV), no período transitório, e uma rápida rejeição ao distúrbio, em relação ao controlador K_1 irrestrito (exemplo 1). Além disso, observa-se que a fronteira Pareto estimada ficou mais concentrada (menos esparsa) na região do “joelho”, para as mesmas trezentas iterações da rotina, conforme a Fig. 4.7, onde também pode ser notado o conflito de interesses entre as duas funções objetivo.

O controlador K_2 escolhido, apresentou um desempenho similar em relação ao K_1 anterior, no tocante ao rastreamento do sinal de referência, tanto para a resposta transitória, quanto para a mais rápida rejeição ao distúrbio ocorrido no processo ($500 \leq t(s) \leq 700$), conforme pode ser observado na Fig. 4.8.

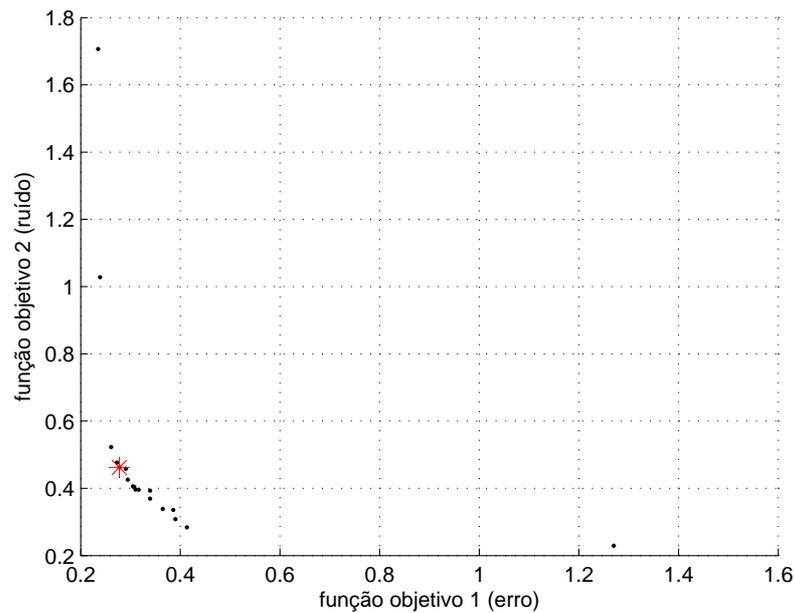


Figura 4.7.: Controlador robusto escolhido pelo MDGR e marcado com *. Funções objetivo: erro = 0,2774 e ruído = 0,4622; com restrição em $\epsilon_d = 4$. Parâmetros do MOEA-P: conforme a Tabela 4.1. Vetor de pesos do MDGR [erro, ruído, ITAE]: $\mathbf{w}_{AHP} = [0,74 \ 0,18 \ 0,08]$.

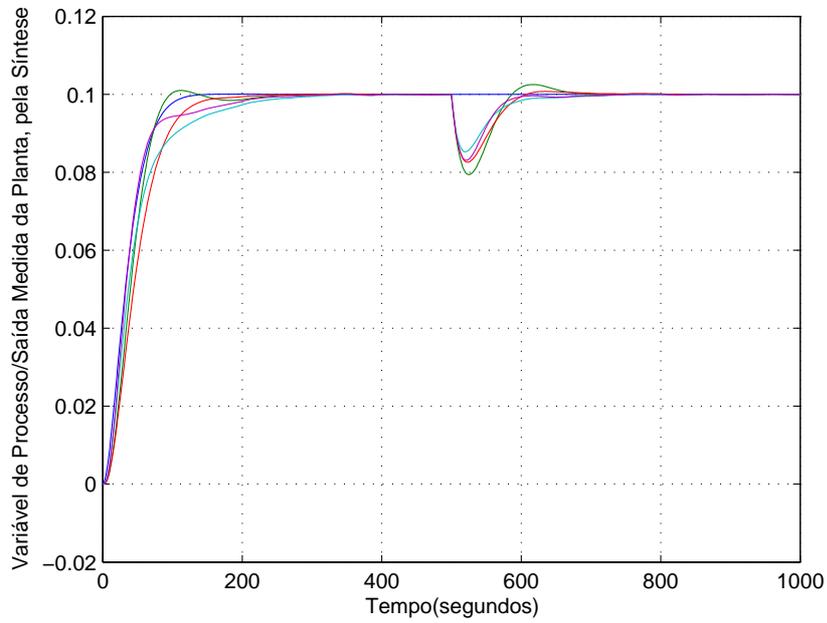


Figura 4.8.: Resposta da PV do controlador K_2 robusto com restrição em $\epsilon_d = 4$.

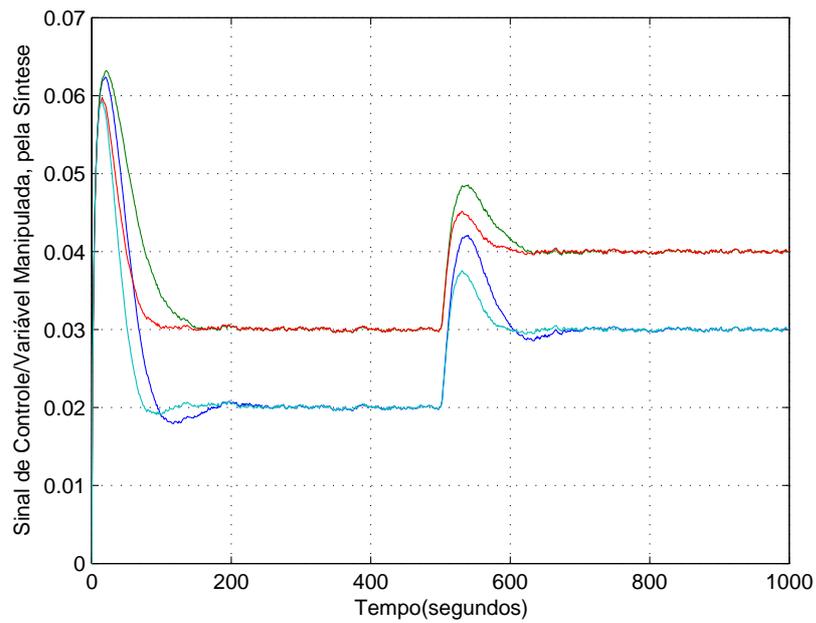


Figura 4.9.: Resposta da CV do controlador K_2 robusto com restrição em $\epsilon_d = 4$.

Exemplo 3 - Estudo Comparativo do Esforço de Controle Relativo à Saída do Controlador

Baseado em desenvolvimentos anteriores, conforme apresentado em (Bachur 2011), no seu Exemplo 1-Caso 2, observa-se que o controlador robusto foi projetado pela soma ponderada das funções objetivo relativas ao distúrbio e ao ruído de medição, sendo seus respectivos pesos idênticos na análise multiobjetivo. Nesse exemplo, o problema de otimização multiobjetivo foi transformado em um problema de otimização escalar por meio da soma ponderada de duas funções objetivo, transformando a terceira em restrição. Considerando-se a formulação geral mostrada em (3.11) e o mesmo sistema de tanques interativos mostrado na Fig. 4.1, tratou-se:

$$\begin{aligned}
 K^* &= \arg \min_K \left(\lambda_1 \max_{\alpha \in \Theta} \|T_{cd}\|_\infty + \lambda_2 \max_{\alpha \in \Theta} \|T_{un}\|_2 \right) \\
 \text{sujeito a: } &\max_{\alpha \in \Theta} \|E\|_\infty \leq \epsilon_e \\
 &K \in \mathcal{F}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

em que os pesos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$ e a restrição $\epsilon_e = 0,06$.

O Exemplo 9 (Apêndice B) apresenta uma análise multiobjetivo semelhante, tendo as mesmas funções objetivo, porém, conforme explicado anteriormente, aplicando-se os métodos MDGR e AHP. As preferências do decisor para este caso são idênticas para ambas as funções objetivo, equivalentemente às ponderações λ_1 e λ_2 com o mesmo peso. Optou-se pela extrema importância dos critérios c_1 e c_2 em relação ao critério c_3 (*ITAE*), cuja matriz de preferências foi dada por:

$$AHP_{pref2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1/9 & 1/9 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

A Fig. 4.10 mostra a fronteira Pareto estimada e o controlador K_3 a ser analisado nesse exemplo.

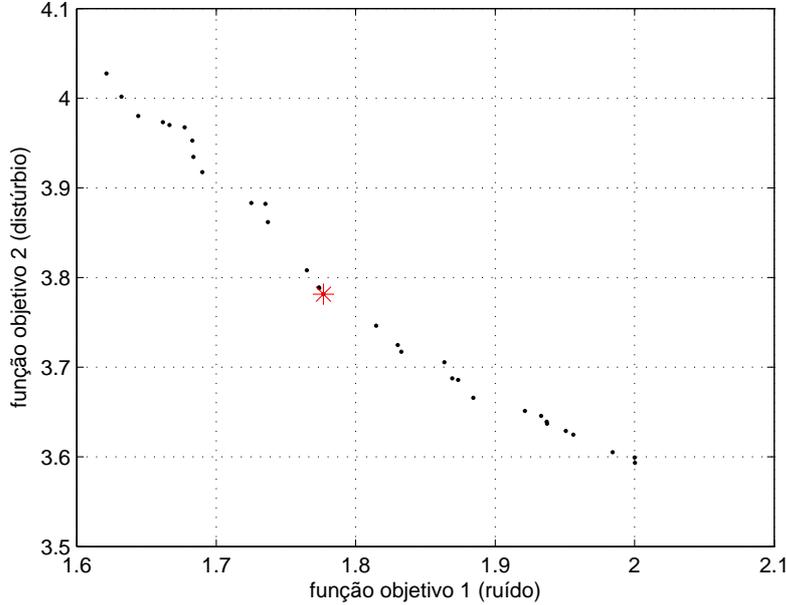


Figura 4.10.: Controlador robusto escolhido pelo MDGR e marcado com *; Funções objetivo: ruído = 1,7733 e distúrbio = 3,7822; Parâmetros do MOEA-P: conforme a Tabela 4.1. Vetor de pesos do MDGR [ruído, distúrbio, ITAE]: $\mathbf{w}_{AHP} = [0,4737 \ 0,4737 \ 0,0526]$.

As Figuras 4.11 e 4.12 mostram respectivamente os sinais de saída (CV) dos controladores para o controlador k_5 , apresentado em (Bachur 2011), e o controlador K_3 , relativo a este exemplo. Nelas pode-se notar o máximo esforço de controle para o controlador k_5 , no instante inicial (transitório) e no momento do distúrbio ($t = 500s$), cujos valores aproximados foram, respectivamente, $CV = 0,093$ e $CV = 0,092$, enquanto que para o controlador K_3 foram, respectivamente, $CV = 0,08$ e $CV = 0,051$. Os valores de energia atribuídos ao sinal do esforço de controle, considerando-se os quatro vértices do polítopo, relativos aos controladores k_5 e K_3 foram, respectivamente, 6,6329 e 5,9357, cuja definição é dada por:

$$CV_{energia} = \int_0^t cv^2(t) dt \quad (4.9)$$

Observa-se, portanto, uma redução média aproximada de 10,41% (dez vírgula quarenta e um por cento) na energia utilizada pelo sinal de saída (CV) do controlador K_3 .

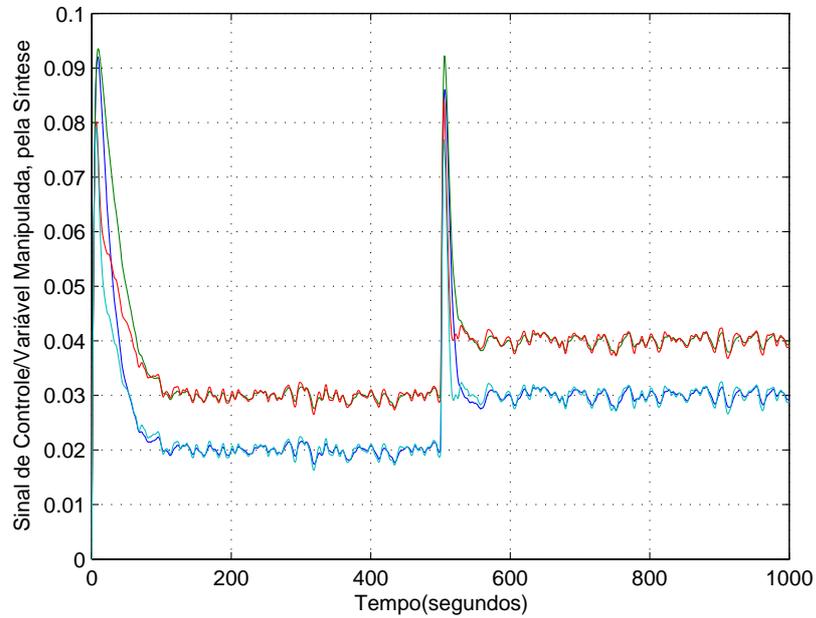


Figura 4.11.: Resposta da CV do controlador robusto k_5 com restrição em $\epsilon_e = 0,06$.

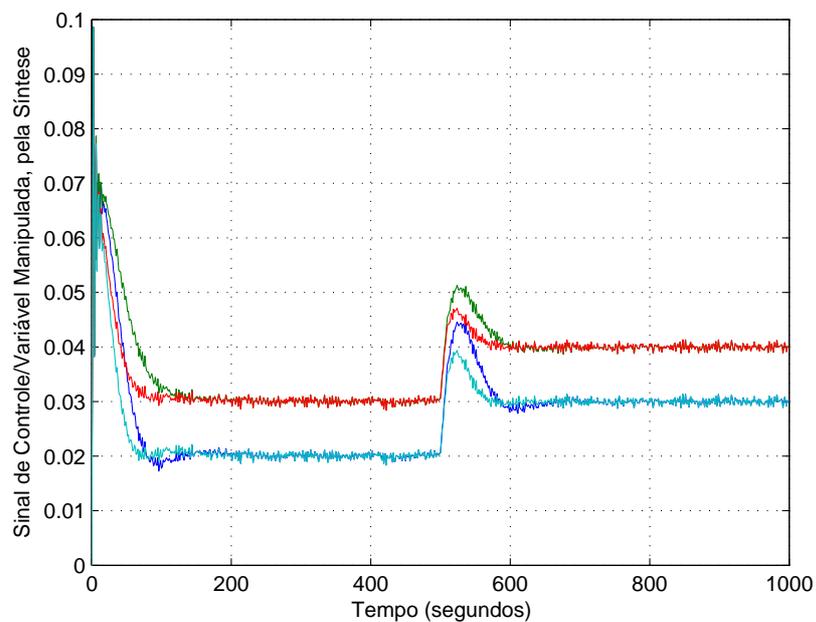


Figura 4.12.: Resposta da CV do controlador robusto K_3 com restrição em $\epsilon_e = 0,06$, utilizando-se o MDGR e o AHP.

Nota-se que a aplicação conjunta do MOEA-P e dos métodos MDGR e AHP, utilizada neste estudo comparativo, consegue reduzir significativamente a Variável de Controle (CV) e conseqüentemente o esforço de controle do controlador robusto. Esta vantagem permite melhor desempenho dos Elementos Finais de Controle (EFC), tais como o consagrado conjunto válvula/atuador/posicionador, aplicados no controle de pressões e vazões industriais.

Assim, podemos citar as seguintes vantagens e melhorias proporcionadas em função da diminuição do esforço de controle do controlador:

- Aumento da vida útil e o conseqüente adiamento da manutenção corretiva das válvulas de controle, cujo custo é significativo em aplicações industriais.
- Para controles de pressões, por exemplo, a diminuição do esforço máximo de controle pode significar a minimização de fissuras criadas nas tubulações, causadas pelo excesso de pressão repentina e, conseqüentemente, o rompimento das tubulações.
- Semelhantemente ao item anterior, o excesso de pressão e/ou vazão pode ocasionar o comprometimento de anéis de vedação das tubulações, com o conseqüente derramamento de fluidos industriais, comprometendo assim o meio ambiente, a possível contaminação do mesmo e dos colaboradores das indústrias (operadores e técnicos em manutenção, principalmente), além da perda econômica de matéria-prima, insumos e produtos finais dos processos em geral.
- Para controles de vazões, por exemplo, a diminuição do esforço máximo de controle pode minimizar o transbordo de produtos em tanques abertos, evitando-se assim o desperdício dos mesmos, contaminações em geral e o comprometimento da segurança do processo.

4.3.2. Sistema Mecânico tipo Dupla Massa/Mola

Exemplo 4 - Problema Biobjetivo Irrestrito, Considerando o Erro ao Modelo de Referência x Rejeição ao Distúrbio

Seja o problema de controle mostrado na Fig. 4.13. Este exemplo trata-se de uma extensão do problema “*Benchmark*” apresentado em (Wie & Bernstein 1990). Incluindo-se a variável $\nu(t)$ relacionada à ação integral, este sistema pode ser representado na forma de espaço de estados como:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ \nu \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ \nu \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ w \\ n \end{bmatrix} \tag{4.10} \\
 z &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
 y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ w \\ n \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Considere $m_1 = m_2 = 1$ e k (coeficiente de elasticidade da mola) um parâmetro incerto, que pode assumir um valor na faixa $k \in [0,5 ; 2,0]$. O objetivo é controlar a posição do segundo carro, $x_2(t)$, por meio da força aplicada no primeiro carro, $u(t)$,

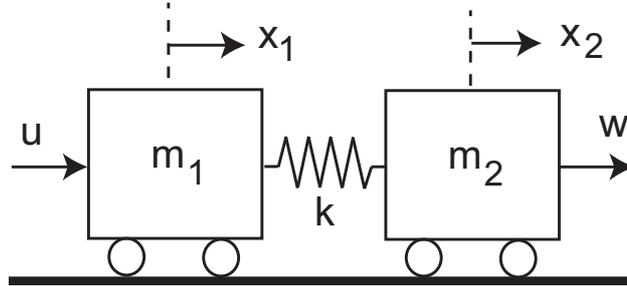


Figura 4.13.: Sistema Dupla Massa/Mola.

fazendo-a igual ao sinal de referência, $r(t)$, minimizando a influência da perturbação, $w(t)$, e atenuando o efeito do ruído de medição, $n(t)$.

As variáveis controladas são a posição do segundo carro, $x_2(t)$, e o sinal de controle $u(t)$. As variáveis medidas são a posição do segundo carro, $x_2(t)$, afetada pelo ruído de medição, $n(t)$, e a integral do erro de rastreamento, $\nu(t)$.

Após a discretização, com $T_s = 1,25s$, o modelo de referência discreto otimizado é dado por:

$$T_m(z) = \frac{0,0017849(z + 0,9647)}{z^2 - 1,894z + 0,8979}. \quad (4.11)$$

O problema de síntese de controlador robusto multiobjetivo tratado neste exemplo é estabelecido como: dado um sistema incerto linear invariante no tempo, em tempo discreto, representado por um modelo politópico, $\mathcal{P}(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \Theta$, e um modelo de referência, $T_m(z)$, com as características desejadas de resposta transitória, encontrar um controlador por realimentação dinâmica de saída, $K(z)$, que minimize a norma \mathcal{H}_∞ máxima do erro entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada, $E(z)$, a norma \mathcal{H}_∞ máxima da função de transferência $T_{cd}(z)$ relacionada com a rejeição ao distúrbio, no domínio politópico de incerteza:

$$K^*(z) = \arg \min_{K(z)} \begin{bmatrix} \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|E(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \\ \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{cd}(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

sujeito a: $K(z) \in \mathcal{F}$

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável.

A matriz de preferências do decisor AHP_{pref1} e o vetor de pesos w_{AHP} calculados pelo método AHP, foram idênticos aos utilizados nos exemplos 1 e 2 anteriores.

Agora, de acordo com o procedimento de projeto proposto neste exemplo, os parâmetros utilizados no MOEA-P foram definidos conforme a Tabela 4.1, sendo $gmax = 200$ e o vetor de pesos $\mathbf{w}_{AHP} = [w_{erro} \ w_{disturbio} \ w_{ITAE}] = [0,74 \ 0,18 \ 0,08]$. O controlador K_4 irrestrito, escolhido pelo MDGR e marcado com * na Fig. 4.14, resultou em $\max \|E\|_{\infty} = 0,9018$ e $\max \|T_{cd}\|_{\infty} = 8,1375$.

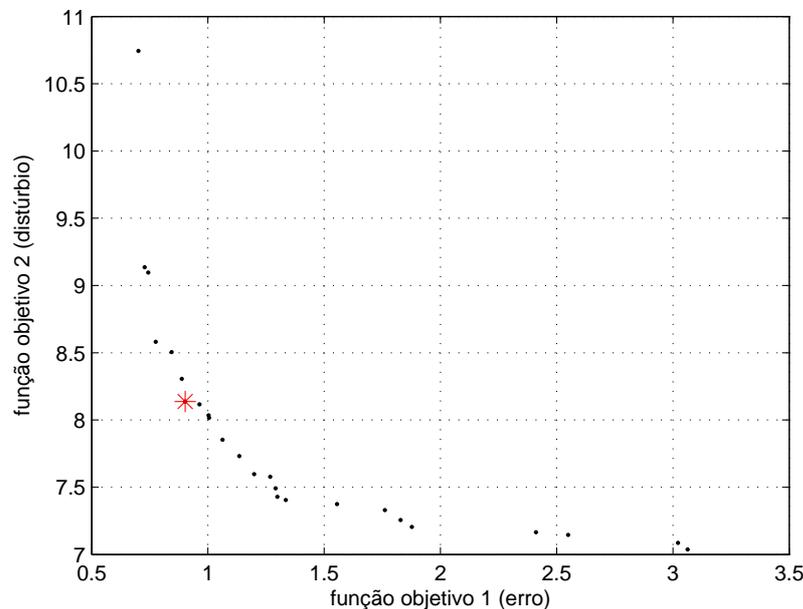


Figura 4.14.: Fronteira Pareto estimada para a escolha do controlador robusto K_4 , irrestrito, utilizando-se o MDGR e o AHP

O controlador K_4 foi encontrado com duas iterações no procedimento proposto. Na primeira iteração, o mesmo não garante a estabilidade para todo o intervalo $k \in \{0,5; 2,0\}$, que compreende os dois vértices originais do politopo, sendo que existe uma faixa de valores de k para qual o sistema em malha fechada não é estável. Na segunda iteração, com a inclusão do ponto adicional, $k = 1,25$, o conjunto finito de pontos passou a ser $\tilde{\Theta} = [0,5 \ 1,25 \ 2,0]^T$, e o controlador obtido garante a estabilidade robusta do sistema para $k \in \{0,5; 2,0\}$, conforme mostrado nas Figs. 4.15 e 4.16. Essas figuras representam, respectivamente, a Variável de Processo (PV), saída do transmissor de medição, e a Variável de Controle (CV), saída de controle do controlador. Em ambas as figuras é possível perceber o ruído de medição de forma significativa, para os três vértices considerados, uma vez que tal objetivo não é contemplado neste exemplo. Na Fig. 4.15

é possível observar uma lenta e menos intensa rejeição ao distúrbio ocorrido no instante $t = 500s$, o que é perfeitamente admissível em função da inércia mecânica natural do sistema dupla massa/mola. A combinação do modelo de referência, ação integral e do controle \mathcal{H}_∞ fornece bons resultados para a resposta ao rastreamento, erro de estado estacionário, rejeição ao distúrbio e baixo esforço no sinal de controle, podendo essa última característica ser observada na Fig. 4.16.

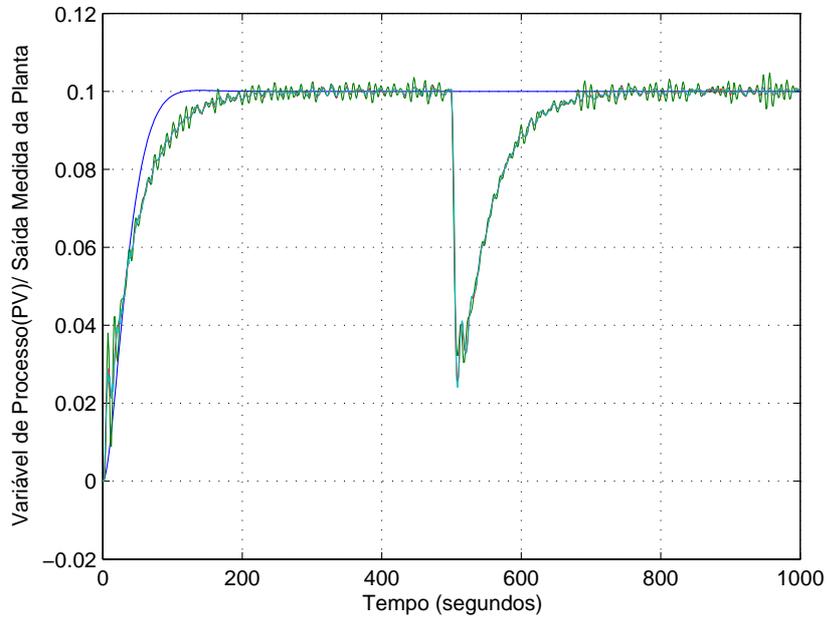


Figura 4.15.: Resposta da PV do controlador robusto K_4 , irrestrito, utilizando-se o MDGR e o AHP, definindo-se o modelo de referência em azul escuro.

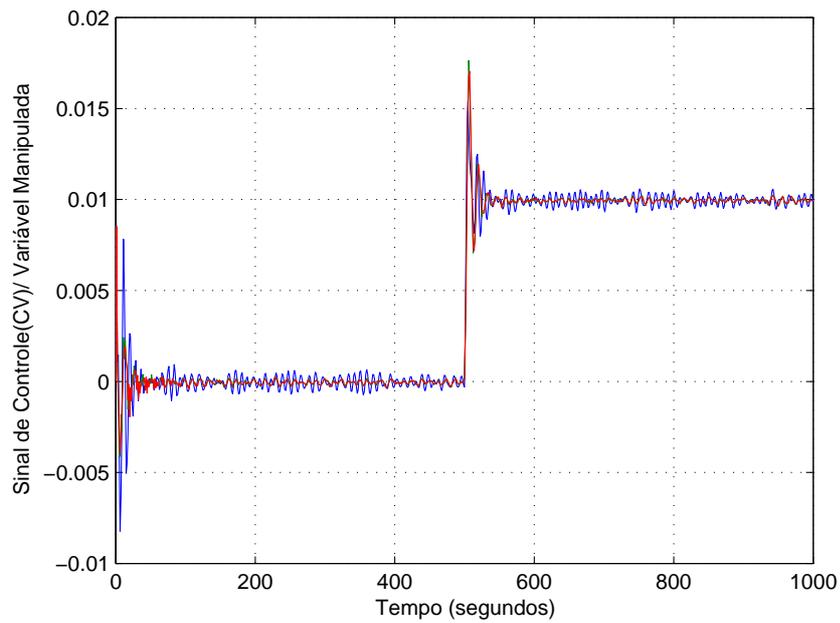


Figura 4.16.: Resposta da CV do controlador robusto K_4 , utilizando-se o MDGR e o AHP.

4.4. Sistemas em Tempo Contínuo com Abordagem Multiobjetivo

Exemplo 5 - Problema Biobjetivo Irrestrito, Considerando Atenuação de Ruído de Medição x Rejeição ao Distúrbio

Neste exemplo, um sistema hipotético e matematicamente desenvolvido é adaptado de (de Oliveira et al. 2004b) com o objetivo de demonstrar, com maior clareza, o método desenvolvido neste trabalho. A ideia principal é explicitar o processo iterativo entre as etapas de síntese e análise pois, na primeira iteração, é encontrado um sistema em malha fechada instável e portanto infactível.

Baseado no método AHP, foi definida uma matriz de preferências pelo decisor, cujos critérios *ruído* (c_1), *distúrbio* (c_2) e *ITAE* (c_3) foram especificados de forma semelhante ao exemplo 3:

$$AHP_{pref2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1/9 & 1/9 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

sendo o critério ITAE, para sistemas contínuos no tempo, calculado como:

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt . \quad (4.14)$$

Para este estudo de caso, um sistema em tempo contínuo com dois parâmetros incertos (β e σ) é adaptado de (de Oliveira et al. 2004b).

As matrizes para o sistema em malha aberta são definidas por:

$$A_i = \begin{bmatrix} -0,05 & -0,01 - \sigma_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,01 + \sigma_i & -0,1 & -0,01 - \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,01 + \beta_i & -0,05 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
B_{u,i} &= \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{w,i}^T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{z,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}^T \\
D_{zu,i} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_{zw,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{y,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
D_{yu,i} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{yw,i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com } i = 1, \dots, 5
\end{aligned}$$

e os intervalos das incertezas paramétricas que definem a matriz A do sistema, que podem assumir os valores:

$$\beta_i \in [0, 1], \quad \sigma_i \in [0, 1] \quad \text{e} \quad (\beta_i + \sigma_i) \leq 1,5$$

produzindo um politopo com cinco vértices, definido pelas interseções das cinco arestas.

O problema de controle robusto multiobjetivo considerado pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
K^*(s) &= \arg \min_{K(s)} \begin{bmatrix} \max_{\alpha \in \Theta} \|T_{un}(s, \alpha, K)\|_2 \\ \max_{\alpha \in \Theta} \|T_{cd}(s, \alpha, K)\|_\infty \end{bmatrix} \\
K(s) &\in \mathcal{F}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores robustamente estáveis em malha fechada, projetados para este exemplo como de segunda ordem.

Os dois objetivos de controle são conflitantes, sendo o primeiro diretamente relacionado com o esforço de controle na saída do controlador (CV). Se necessário, é possível incluir restrições para garantir outras características da resposta transitória do sistema, conforme demonstrado nos exemplos 2 e 3.

Na primeira iteração do algoritmo, na etapa de análise, é verificado que o controlador obtido na etapa de síntese resulta em sistemas instáveis, fora dos vértices do politopo.

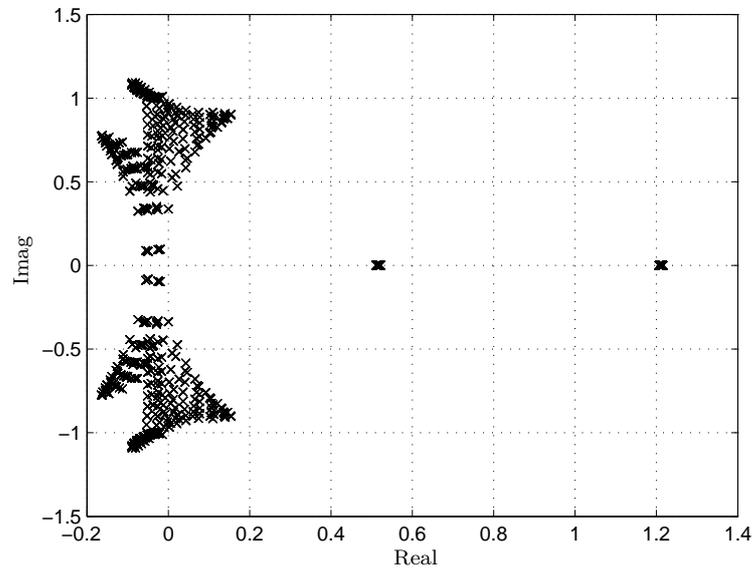
Desde modo, é necessário nova iteração do procedimento com acréscimo de ponto ao conjunto finito. Nas segunda e terceira iterações é verificada a necessidade de se adicionar novos pontos ao conjunto finito, considerado na etapa de síntese, para maior minimização das funções objetivo, como descrito na Seção 3.3.3. Esses novos pontos do politopo são $[(0,75 \ 0,75) \ (0,97 \ 0,53)]^T$. A Fig. 4.17(a) mostra a distribuição dos polos para todo o politopo, que comprova a existência de sistemas instáveis em malha fechada, onde é possível observar alguns autovalores dos sistemas com a parte real positiva. Em sequência, conforme mostrado na Fig. 4.17(b), o sistema passa a ser robustamente estável e seus autovalores possuem, em sua totalidade, a parte real negativa. Em ambas as figuras pode-se observar a distribuição dos polos em função das variações dos parâmetros incertos dentro do politopo.

De acordo com a matriz de preferências definida pelo decisor em (4.13), o método AHP encontra a ponderação “ideal” para os critérios estabelecidos e define o vetor de pesos $\mathbf{w} = [0,4737 \ 0,4737 \ 0,0526]$ utilizado pelo método MDGR. Desta maneira, o controlador inactível encontrado na primeira iteração foi K_{5a} e o controlador factível encontrado na terceira iteração foi K_{5b} . As fronteiras Pareto aproximadas são apresentadas na Fig. 4.18, onde os controladores encontrados nas respectivas iterações são marcados com (\star).

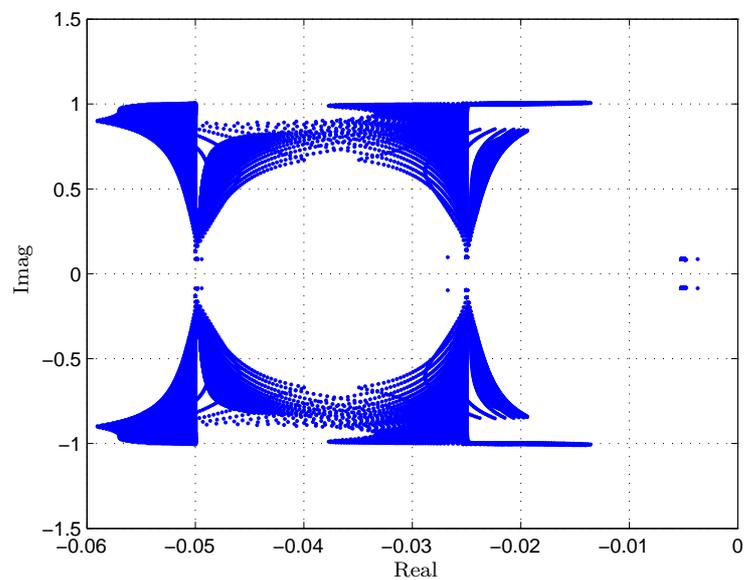
Na Tabela 4.2 são mostrados os parâmetros utilizados no MOEA-P, especificamente para este exemplo.

Tabela 4.2.: Alg. Evolucionário Multiobjetivo Multipopulacional Baseado em Preferências

Parametrização específica do MOEA-P para este exemplo		
Parâmetro	Valor	Descrição
F	0,1	Escala dos vetores-diferenças
C	0,5	Probabilidade de recombinação discreta
pm	0,1	Probabilidade de migração entre subpopulações
ep	10	Número de gerações entre migrações (época)
nb	1	Tamanho da vizinhança
m	10	Tamanho de cada subpopulação
s	6	Número de subpopulações
gmax	100	Número máximo de iterações

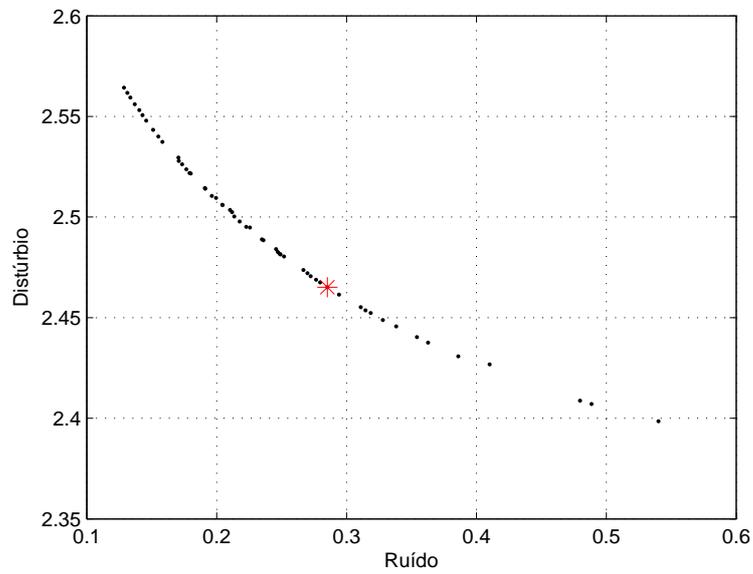


(a) Primeira iteração: distribuição de polos que comprova que o sistema não é robustamente estável em malha fechada.

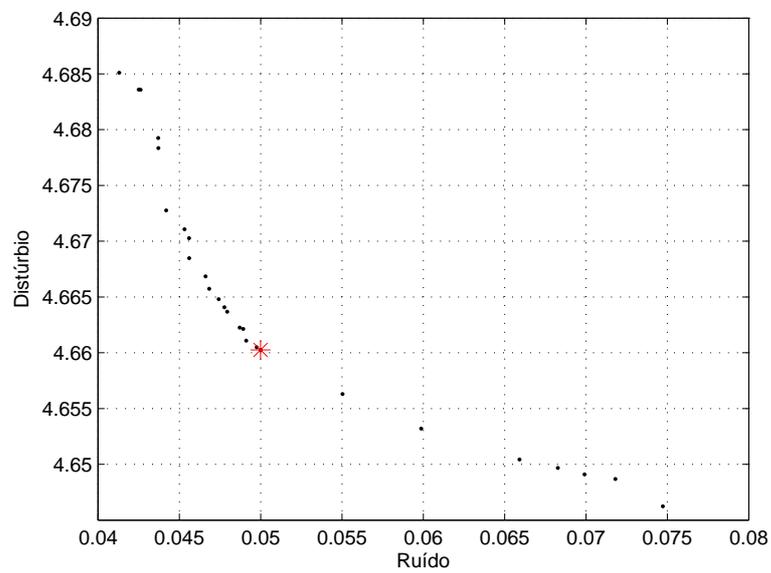


(b) Terceira iteração: distribuição de polos que torna o sistema estável em malha fechada.

Figura 4.17.: Diferença entre instabilidade e estabilidade do sistema mostrada pela distribuição dos polos em função das variações de $\beta \in [0, 1]$ e $\sigma \in [0, 1]$, através da iteração do algoritmo entre as etapas de síntese e análise.



(a) Primeira iteração: Fronteira Pareto estimada 1 e seleção de K_{5a} .



(b) Terceira iteração: Fronteira Pareto estimada 2 e seleção de K_{5b} .

Figura 4.18.: Fronteiras Pareto estimadas com os critérios *ruído* e *distúrbio*, sendo os controladores K_{5a} (inactível) e K_{5b} (factível) selecionados pelo método MRGD e marcados com (*).

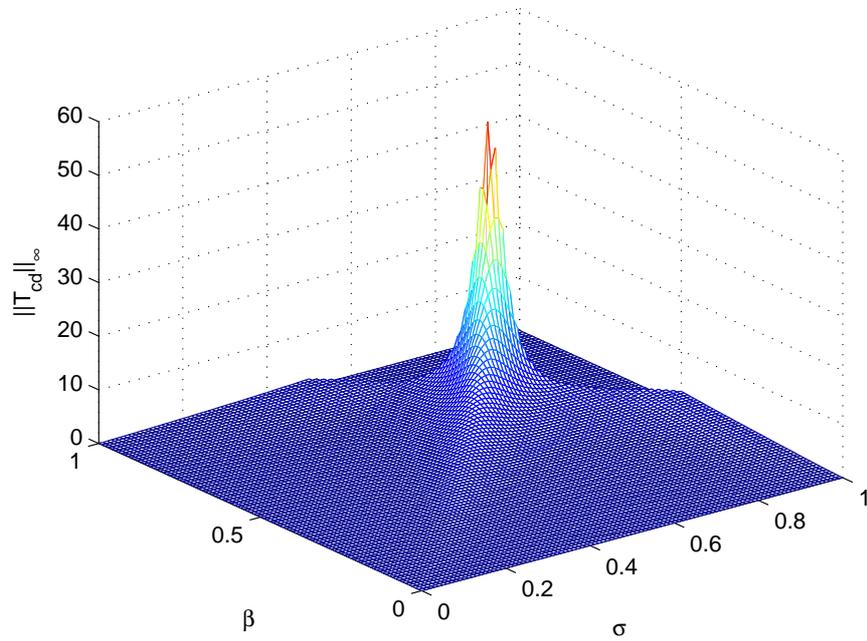
Na terceira iteração, com a adição dos novos pontos $[(0,75 \ 0,75) \ (0,97 \ 0,53)]^T$ ao polítopo original $[(0 \ 0) \ (1 \ 0) \ (1 \ 0,5) \ (0,5 \ 1) \ (0 \ 1)]^T$, foi obtido, na etapa de síntese, os valores para $\max \|T_{cd}\|_\infty = 4,6603$ e $\max \|T_{un}\|_2 = 0,0500$, enquanto na etapa de análise, para todo o conjunto Θ , foram obtidos, de fato, os valores $\max \|T_{cd}\|_\infty = 4,7214$ e $\max \|T_{un}\|_2 = 0,0505$, respectivamente, verificando a convergência do algoritmo para a precisão previamente definida.

Através da Fig. 4.19 é possível observar a minimização do máximo valor da norma $\|T_{cd}\|_\infty$ pelo acréscimo de pontos no conjunto finito considerado na etapa de síntese. Na Fig. 4.19(a), pode-se notar que quando a etapa de síntese utiliza somente os vértices do polítopo no domínio de incertezas, o valor máximo de $\|T_{cd}\|_\infty$ ocorre entre dois vértices e seu valor é muito significativo. Ao ocorrer o acréscimo de novos vértices no conjunto finito $\tilde{\Theta}$ no passo seguinte, o valor máximo de $\|T_{cd}\|_\infty$ ocorre próximo ao ponto considerado na etapa de otimização, sendo que o valor de norma é reduzido consideravelmente, conforme apresentado na Fig. 4.19(b).

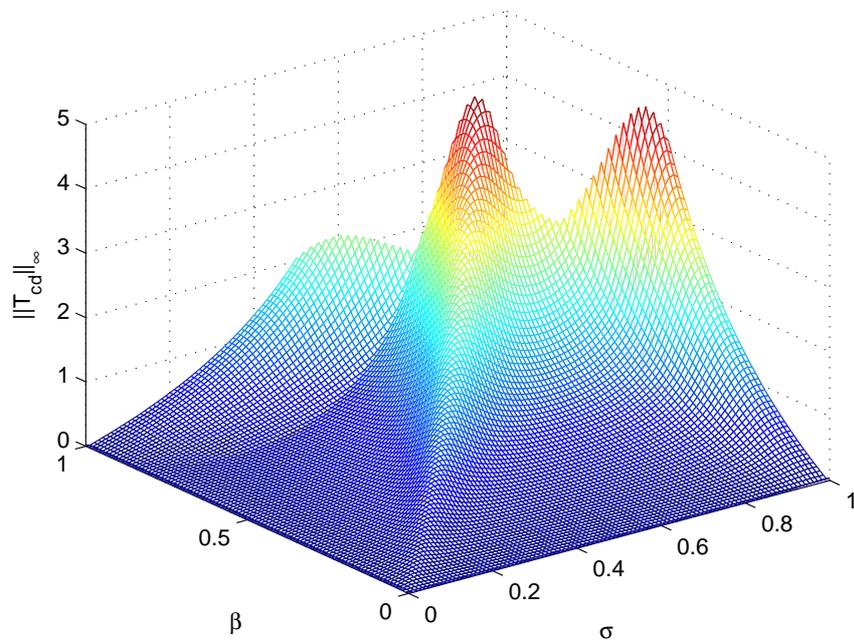
A Fig. 4.20 apresenta as curvas de nível da norma $\|T_{cd}\|_\infty$, na última iteração, onde são mostradas as localizações dos vértices mais os pontos acrescentados. Também pode ser observado pelas curvas de nível da função que a determinação dos valores máximos das normas para sistemas não-diferenciáveis, não convexos e multimodais pode não ser uma tarefa tão trivial, sendo um problema difícil de ser tratado.

Na Fig. 4.21 é apresentada a superfície de nível de $\|T_{un}\|_2$ na segunda iteração do algoritmo, onde pode ser observado um nítido achatamento da mesma.

Como foi esclarecido no início desta seção, este estudo de caso representa um sistema hipotético, cujo objetivo foi o de ilustrar o procedimento iterativo entre as etapas de síntese, tomada de decisão e análise, proposto neste trabalho.



(a) Primeira iteração: minimização do valor de norma relativo à função de transferência $\|T_{cd}\|_{\infty}$.



(b) Terceira iteração: minimização do valor de norma relativo à função de transferência $\|T_{cd}\|_{\infty}$.

Figura 4.19.: Superfícies dos valores de norma da função de transferência $\|T_{cd}\|_{\infty}$ em função de β e σ .

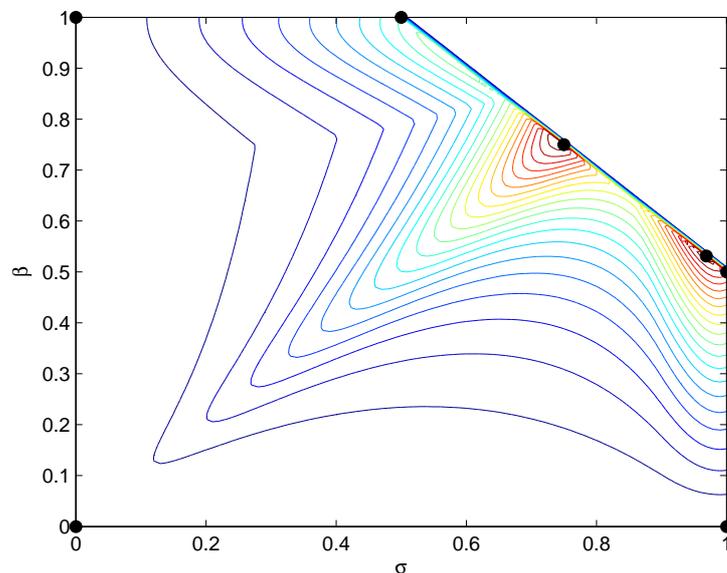


Figura 4.20.: Curva de nível dos valores de norma relativos à função de transferência $\|T_{cd}\|_{\infty}$ com o politopo original e os pontos $[(0,75 \ 0,75) \ (0,97 \ 0,53)]^T$ adicionados nas iterações 2 e 3.

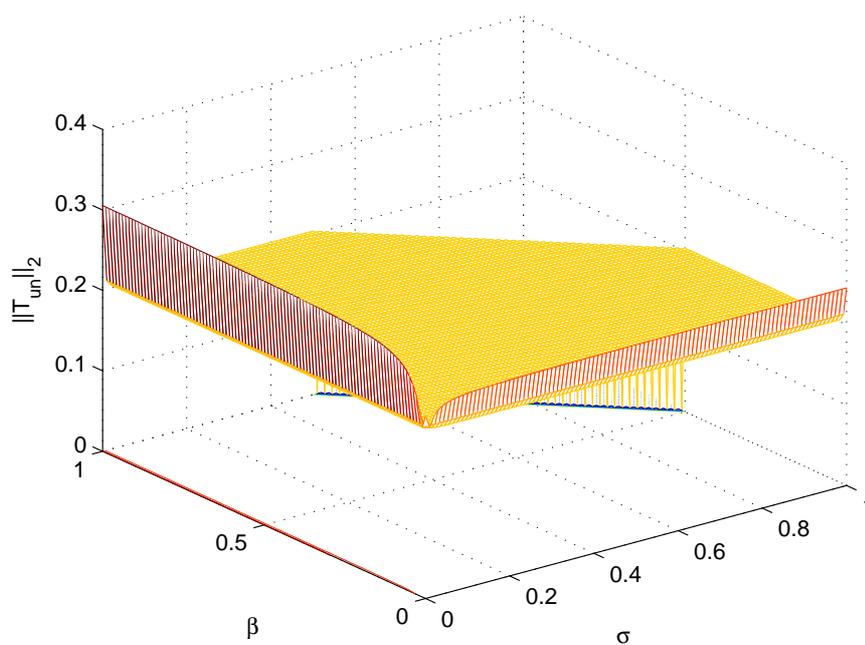


Figura 4.21.: Superfície do valor de norma relativo à função de transferência $\|T_{un}\|_2$ em função de β e σ , com o “achatamento” da curva já na segunda iteração.

4.5. Conclusão

Em todos os estudos de caso apresentados foi utilizado o algoritmo MOEA-P desenvolvido neste trabalho, conforme descrito no Capítulo 3, Seção 3.3.1. Foram adotados os métodos de auxílio à tomada de decisão, MDGR e AHP, em que o objetivo deste último foi possibilitar o cálculo mais inteligente e consistente do vetor de pesos, sendo a aplicação conjunta dos métodos uma das contribuições deste trabalho. Nos exemplos 1 e 2 uma abordagem biobjetivo relativa ao erro de rastreamento do sinal de referência e atenuação do ruído de medição foi tratada na forma irrestrita e com restrição, respectivamente. Já no exemplo 3, um interessante estudo comparativo relativo ao esforço de controle foi abordado, agregando-se valor em relação ao aumento da vida útil de alguns tipos de elementos finais de controle. No exemplo 4, um sistema totalmente diferente dos tanques interativos e puramente mecânico (dupla massa/mola) foi apresentado, com o propósito de mostrar a ampla aplicabilidade e eficácia do método desenvolvido. Em seguida, no exemplo 5, um sistema hipotético e matematicamente desenvolvido, a tempo contínuo, foi apresentado, objetivando-se demonstrar com maior clareza a iteratividade do método entre as etapas de síntese, tomada de decisão e análise. No Apêndice B, outras abordagens biobjetivo são apresentadas, considerando-se como funções objetivo a atenuação do ruído de medição em relação a rejeição ao distúrbio, e o erro de rastreamento do sinal de referência em relação a rejeição ao distúrbio, também em uma análise irrestrita e com restrições de projeto. Exemplos adicionais com aplicações das técnicas desenvolvidas neste trabalho são apresentados em Bachur et al. (2017).

Considerando a análise dos diversos exemplos apresentados, percebe-se resultados satisfatórios em função das necessidades de projeto, com bom desempenho do algoritmo, além de se agregar valor no tocante à redução do esforço de controle apresentado no exemplo 3. De forma geral, a eficácia do procedimento proposto é demonstrada neste capítulo.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões gerais, propostas para a continuidade deste trabalho e sugestões para pesquisas futuras.

Capítulo 5.

Conclusão

5.1. Sumário das Contribuições da Tese

Neste trabalho são apresentadas estratégias para o projeto de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída para garantir a resposta de rastreamento do sinal de referência, a rejeição aos distúrbios e a atenuação de ruídos de medição, baseadas em otimização evolutiva multiobjetivo, programação semi-infinita e método de auxílio à tomada de decisão multicritério. Para garantir o desempenho da resposta de rastreamento é considerada a utilização de uma função objetivo igual à norma \mathcal{H}_∞ do erro entre um modelo de referência e a função de transferência a malha-fechada entre o sinal de referência e a variável controlada. Também é considerada a otimização do modelo de referência.

Existem diferentes possibilidades para resolver o problema de otimização no caso de sistemas com incerteza politópica, sendo que é utilizado um procedimento iterativo de projeto diretamente no espaço de parâmetros do controlador, que consiste em um passo de síntese, considerando um conjunto finito de pontos do espaço de incerteza, e um passo de análise robusta, considerando todo o politopo, que define a necessidade de se acrescentar ou não novos pontos no conjunto considerado no passo de síntese. Este procedimento já foi utilizado em outros problemas de controle robusto obtendo resultados satisfatórios. Além disso, é considerada uma etapa intermediária entre a síntese e a análise onde se aplica, de forma inédita e em conjunto com a abordagem multiobjetivo e a programação semi-infinita, uma técnica para a tomada de decisão multicritério, sendo esta junção a principal contribuição deste trabalho.

A técnica de otimização multiobjetivo e o método de auxílio à tomada de decisão flexibilizam o projeto e suas aplicações industriais, uma vez que tanto o projetista como o engenheiro de controle (ou decisor) podem ponderar e priorizar seus objetivos em função das reais necessidades do “chão de fábrica” como, por exemplo, a rejeição dos distúrbios que possam ocorrer no processo e a eficaz atenuação dos ruídos de medição, sempre presentes nas instalações industriais.

A abordagem proposta permite a um projetista determinar, em paralelo, várias soluções candidatas (possivelmente menos conservadoras) restritas a uma região de interesse prático, que satisfaça as preferências do tomador de decisão. A fronteira Pareto estimada, fornecida pelo MOEA-P, é submetida ao MDGR, que fornece uma pré-ordem completa das alternativas disponíveis e indica uma ação final (projeto do controlador) que melhor reflita o desejo global da unidade de decisão. A aplicação da técnica desenvolvida neste trabalho é ilustrada através de nove exemplos, cujos resultados encontrados sugerem a eficácia da metodologia. Com base nesta investigação, as principais conclusões deste trabalho são indicadas a seguir:

(i) O MOEA-P proposto para a solução de problemas de programação semi-infinita é capaz de estimar, em paralelo, um conjunto de soluções (possivelmente) menos conservadoras, em uma região de compromisso de interesse prático.

(ii) A abordagem de auxílio à decisão proposta, MDGR, incorpora as preferências do tomador de decisão, as quais são adequadamente processadas para promover uma pesquisa direcionada e a seleção de uma solução final apropriada.

(iii) A estrutura de síntese de controle robusto proposta é capaz de realizar um processo iterativo entre síntese e análise, e representa uma característica útil para lidar com problemas de programação semi-infinita multiobjetivo.

(iv) A abordagem proposta é principalmente útil em um contexto prático, onde incertezas geralmente estão presentes – tais incertezas podem variar desde a incapacidade para indicar uma relação de preferência entre pares de soluções, até situações de informação incompleta ou ambígua, o que dificulta o estabelecimento de um modelo de preferência.

Esta tese apresenta as seguintes contribuições na área de Controle Robusto, Programação Semi-infinita, Otimização Multiobjetivo e Auxílio à Tomada de Decisão Multicritério:

1. Propõe procedimentos de projeto de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando a otimização direta no espaço de parâmetros do controlador, adotando o uso de um modelo de referência otimizado em substituição à estratégia clássica de posicionamento regional de pólos.
2. Implementa um técnica de otimização multiobjetivo, na etapa de síntese, diferentemente de implementações anteriores que transformavam o problema multiobjetivo em um problema escalar. Aplica os procedimentos de projeto implementados em sistemas de controle contínuos e discretos no tempo, que já foram tratados na literatura anteriormente, com o objetivo de ratificar a aplicabilidade do uso de modelo de referência, agora otimizado pelo MOEA-P e programação semi-infinita, de forma inédita, no contexto de otimização multiobjetivo.
3. Apresenta vantagens no uso de modelo de referência otimizado em relação ao clássico posicionamento regional de pólos, devido a simplificação e aplicação direta do algoritmo MOEA-P.
4. Implementa a simplificação e a flexibilização de projetos através da utilização da metodologia para a tomada de decisão multicritério, podendo auxiliar os grupos de decisores que normalmente possuem perfis multidisciplinares.
5. Mostra a eficácia do método de auxílio à tomada de decisão multicritério através dos resultados obtidos pelos métodos MDGR e AHP, utilizados em conjunto nos diversos exemplos apresentados no Capítulo 4 e no Apêndice B.
6. Apresenta vantagens na utilização conjunta dos métodos MDGR, AHP e da metodologia proposta no tocante à diminuição do esforço de controle do controlador, aumentando assim o desempenho e a vida útil dos Elementos Finais de Controles (EFCs), conforme apresentado no exemplo 3.

5.2. Sugestões para a Continuidade do Trabalho e Pesquisas Futuras

A proposta de se utilizar modelo de referência otimizado, programação semi-infinita, otimização multiobjetivo e métodos de auxílio à tomada de decisão com o objetivo de garantir o desempenho e as especificações de projeto de controladores, poderá ser aplicada em pesquisas futuras para síntese de controladores robustos de sistemas em

tempo contínuo ou discreto, com retardo no tempo e em sistemas multivariáveis com aplicação direta dos algoritmos utilizados neste trabalho.

Sugere-se a seguir alguns desenvolvimentos de projeto para a continuidade do trabalho, a saber:

- Ampliação do projeto para aplicação à sistemas com atraso no tempo, que podem apresentar instabilidade ou desempenho indesejável como, por exemplo, sistemas mecânicos, sistemas elétricos de potência, sistemas de telecomunicações e redes de comunicação de dados.
- Ampliação dos critérios utilizados neste trabalho e investigação de novas metodologias para o auxílio à tomada de decisão multicritério.
- Expansão do projeto para aplicação em sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), sendo que neste tipo de controle multivariável, cada variável manipulada pode depender de duas ou mais variáveis controladas, como, por exemplo, em sistemas com desacoplamento de controle ou controle por modelo preditivo.

Apêndice A.

Conceitos Preliminares

Uma das formas de se caracterizar o desempenho de sistemas de controle é por meio de normas matriciais de certas matrizes de transferência a malha fechada do sistema. Como o procedimento de projeto considera o uso de normas como critério de desempenho, neste apêndice apresenta-se inicialmente o conceito de normas de sinais e sistemas. Além disso, serão definidos outros conceitos importantes para o desenvolvimento desse projeto, envolvendo otimização vetorial, programação semi-infinita e técnicas de auxílio à tomada de decisão multicritério.

A.1. Normas de Sinais e Sistemas

A.1.1. Definição de Normas de Sinais e Sistemas

Uma das formas de calcular a norma de um sinal contínuo (discreto) no domínio do tempo é pela norma \mathcal{L}_2 (l_2) definida como

$$\|w(t)\|_2 \triangleq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} w(t)^2 dt} \quad (\text{sistema a tempo contínuo}) \quad (\text{A.1})$$

$$\|w(k)\|_2 \triangleq \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k)^2} \quad (\text{sistema a tempo discreto}). \quad (\text{A.2})$$

Se esta integral (ou somatória) é finita, o sinal é dito ser de quadrado integrável (ou passível de soma), representado por $w(t) \in \mathcal{L}_2$ ($w(k) \in l_2$), o que pode ser interpretado fisicamente como um sinal com energia limitada (Zhou et al. 1995) e (Trofino et al. 2005).

Seja $T_{zw}(p) = D + C(pI - A)^{-1}B$, em que p representa s ou z , w é a matriz de transferência relacionada ao vetor de entradas exógenas e z é o vetor de saídas controladas (o significado duplo da letra z fica claro de acordo com o contexto). Duas normas de matrizes de transferência T_{zw} de interesse são as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . A norma \mathcal{H}_2 de uma matriz de transferência, estritamente própria, de um sistema linear invariante no tempo estável no tempo contínuo, é definida como

$$\|T_{zw}\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [T_{zw}^*(j\omega)T_{zw}(j\omega)] d\omega} \quad (\text{A.3})$$

sendo $(\cdot)^*$ a transposta conjugada e $\text{Tr}(\cdot)$ o traço do argumento.

No caso de sistemas lineares invariantes no tempo estáveis a tempo discreto, a norma é definida como

$$\|T_{zw}\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr} [T_{zw}^*(e^{j\omega})T_{zw}(e^{j\omega})] d\omega} . \quad (\text{A.4})$$

A norma \mathcal{H}_∞ de uma matriz de transferência de um sistema estável corresponde ao pico do ganho da resposta em frequência, no caso de sistemas com uma entrada e uma saída (*SISO-Single Input, Single Output*), ou ao valor singular máximo no caso de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (*MIMO-Multiple Input, Multiple Output*). A norma \mathcal{H}_∞ é definida como:

$$\|T_{zw}\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[T_{zw}(j\omega)] \quad (\text{sistema a tempo contínuo}) \quad (\text{A.5})$$

$$\|T_{zw}\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma}[T_{zw}(e^{j\omega})] \quad (\text{sistema a tempo discreto}) \quad (\text{A.6})$$

sendo $\bar{\sigma}(\cdot)$ o valor singular máximo do argumento.

Estas duas normas de matrizes de transferência possuem interpretações relacionando os sinais de entrada e saída no domínio do tempo:

- Para uma entrada $w(t)$ na forma de um processo ruído branco com variância e intensidade unitárias, a variância do sinal de saída $z(t)$ em regime estacionário é dada por $\|T_{zw}\|_2$:

$$\|T_{zw}\|_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T z(t)^T z(t) dt \right\} \quad (\text{A.7})$$

sendo $E\{\cdot\}$ a esperança matemática do argumento.

- O ganho \mathcal{L}_2 ou ganho RMS de um sistema estável linear invariante no tempo, correspondendo ao maior ganho entre a entrada e saída sobre todos os sinais de entrada limitados $w(t) \in \mathcal{L}_2$, é dado por

$$\|T_{zw}\|_\infty = \max_{w \in \mathcal{L}_2, w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}. \quad (\text{A.8})$$

A.1.2. Cálculo de Normas e Custos

Para sistemas incertos, objeto deste trabalho, existem estratégias de cálculo de limitantes superiores da norma no domínio de incerteza denominados custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , baseadas em formulações por desigualdades matriciais lineares (LMIs). As primeiras formulações por LMIs são baseadas no conceito de estabilidade quadrática (Palhares et al. 1997), mas o uso de uma única função de Lyapunov para todo o domínio de incerteza implica geralmente em resultados conservadores. Para reduzir o conservadorismo, nos últimos anos foram publicados vários trabalhos que adotaram o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, variáveis matriciais extras, parâmetros de sintonia e funções de Lyapunov quadráticas com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros, como por exemplo em Apkarian et al. (2001), de Oliveira et al. (2002), de Oliveira et al. (2004a), de Oliveira et al. (2004b), Ebihara & Hagiwara (2004a), Xie et al. (2004), Trofino et al. (2005), He et al. (2005), Chesi et al. (2005) e Oliveira & Peres (2005). A vantagem desta última abordagem é que a precisão do custo garantido pode ser melhorada com o aumento do grau da dependência polinomial de parâmetros. Entretanto, a complexidade destas formulações aumenta rapidamente com o número de vértices do domínio politópico de incerteza e com o grau do polinômio. Contudo, os valores obtidos por estas estratégias são apenas limites superiores dos custos exatos, e a precisão dos resultados obtidos pode variar consideravelmente de um caso para outro. Além disso, para reduzir o conservadorismo, as novas formulações são

cada vez mais complexas, requerendo maior esforço computacional, tanto em termos de tempo de processamento quanto em requisito de memória de máquina.

Para a análise de sistemas representados por modelos politópicos, existe uma estratégia para o cálculo dos valores máximos das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ (ou custos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞) com uma precisão desejada, baseada no algoritmo *Branch-And-Bound (BnB)* (Gonçalves et al. 2007). Esta estratégia foi apresentada no Capítulo 3 uma vez que a mesma foi utilizada em um dos passos do procedimento de síntese baseado na otimização direta no espaço de parâmetros do controlador.

A.1.3. Conclusão

Nesta seção foi apresentado o conceito de normas de sistemas, considerando-as como critério de desempenho na síntese de controladores robustos. Apresentou-se a norma \mathcal{H}_∞ , conveniente para garantir estabilidade robusta de sistemas incertos e a rejeição de distúrbios na forma de sinais com energia limitada e, posteriormente, a norma \mathcal{H}_2 , útil para tratar de rejeição a distúrbios com características estocásticas, como ruídos de medição ou perturbações aleatórias.

No Capítulo 2 foi abordado o estado da arte no projeto de controladores robustos utilizando-se a programação semi-infinita em uma abordagem multiobjetivo inédita, sendo esta uma das principais contribuições deste trabalho. Posteriormente, na Seção A.2 serão apresentados os conceitos de otimização escalar e vetorial, factibilidade, soluções Pareto-ótimas, entre outras.

Nos Capítulos 3 e 4 o detalhamento de suas aplicações bem como sua eficácia como critério de desempenho ficaram mais evidentes.

A.2. Otimização Escalar e Vetorial

A.2.1. Introdução à Otimização Escalar ou Mono-objetivo

Em Otimização estuda-se métodos computacionais capazes de determinar configurações adequadas para a construção ou o funcionamento de sistemas de interesse para o ser humano, tais como:

- Um engenheiro eletricitista que desenvolve o melhor projeto possível para maximizar a recepção de um sinal em uma antena;
- Um engenheiro de controle e automação que procura o melhor ajuste possível para os parâmetros de um controlador tipo PID de um determinado processo industrial, para se minimizar o efeito de perturbações, ruídos de medição e desvios em geral;
- Um engenheiro de produção que busca a melhor configuração possível para definir as etapas de fabricação de um produto com mínimos custo e prazo, além da máxima qualidade possível;
- Um matemático computacional que estuda modelos quantitativos de epidemias, procurando determinar as melhores políticas públicas de vacinação para se minimizar o número de indivíduos enfermos;
- Um profissional da ciência da computação que estuda o desempenho de uma rede de computadores, e tenta estabelecer a melhor estratégia de tráfego de informação possível, visando maximizar o uso global de dados nessa rede.

Conceitos Básicos

Uma vez construído o modelo matemático do problema, chegamos geralmente à formulação característica do problema de otimização mono-objetivo, ou seja (Takahashi 2007):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \\ \text{sujeito a: } \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \tag{A.9}$$

em que Ω é o conjunto factível, matematicamente definido por:

$$\Omega = \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1, \dots, p \\ h_j(\mathbf{x}) = 0; j = 1, \dots, q; q \leq n \\ \mathbf{x} \in \mathbb{X} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

As funções $\mathbf{g}(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{h}(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$ representam restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente. Além disso, tem-se $\Omega \subseteq \mathbb{X}$, em que o conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ define o espaço de busca delimitado pelo domínio das variáveis de otimização:

$$\mathbb{X} = \begin{cases} x_k^{\min} \leq x_k \leq x_k^{\max} \\ k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

em que n representa o número de parâmetros do problema, e x_k^{\min} e x_k^{\max} são os limites inferior e superior da k -ésima variável de otimização, respectivamente.

A função objetivo escalar $f(\cdot) : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ mapeia o espaço de parâmetros $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ para o espaço de objetivo $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$.

A seguir são apresentadas definições de factibilidade e violação de restrições para um melhor entendimento do assunto (Takahashi 2007):

- **Região factível:** Conjunto dos pontos do espaço \mathbb{R}^n que satisfazem, simultaneamente, à todas as restrições (de desigualdade e de igualdade). Às vezes a região factível é chamada de conjunto factível ou de conjunto viável.
- **Região infactível:** Conjunto dos pontos do espaço \mathbb{R}^n que deixam de satisfazer ou violam pelo menos uma das restrições do problema.
- **Ponto factível:** Ponto pertencente à região factível.
- **Ponto infactível:** Ponto pertencente à região infactível.
- **Restrição violada:** Cada uma das componentes do vetor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ que apresentar valor positivo, ou cada uma das componentes do vetor $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ que apresentar valor não-nulo será chamada de restrição violada no ponto \mathbf{x} .

Em alguns casos, para $f(\cdot)$, $\mathbf{g}(\cdot)$ e $\mathbf{h}(\cdot)$, podem ser usadas técnicas de programação matemática para se obter a solução ótima do problema (Schrijver 1998), sendo que

existem situações em que essas técnicas são impossíveis de serem aplicadas devido à complexidade do modelo matemático ou nos casos em que os cálculos de $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são muito difíceis.

Os algoritmos de otimização processam sub-rotinas que avaliam a função objetivo, $f(\cdot)$, e as restrições, $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$, devendo fazer isso no menor número de vezes possível, para que se tenha um bom desempenho e menor custo computacional do sistema de otimização, no contexto analisado.

A Fig. A.1 apresenta um processo de otimização específico para geração e teste, contemplando-se a função objetivo e as restrições do problema, sendo adotado como critério de parada um resultado ótimo, previamente definido por uma precisão específica (Takahashi 2007).

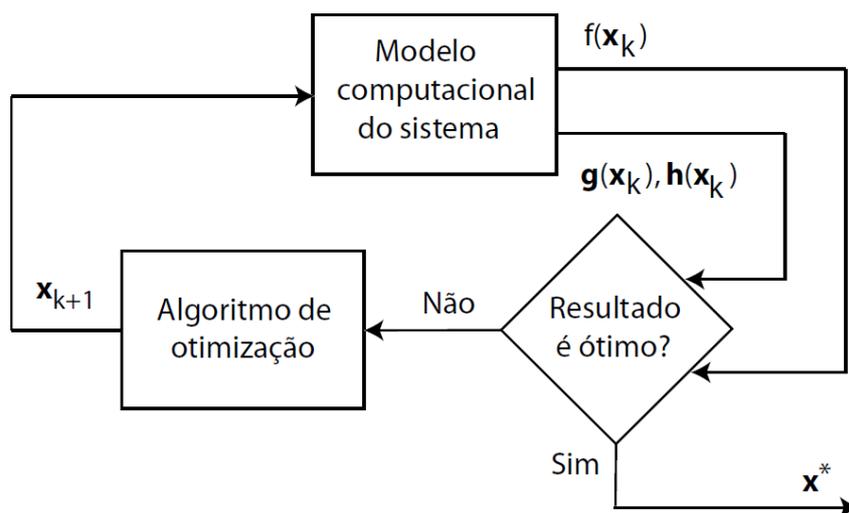


Figura A.1.: Diagrama de blocos de um processo de otimização específico.

A.2.2. Introdução à Otimização Vetorial ou Multiobjetivo

Na seção anterior foi apresentada a definição geral de otimização escalar (mono-objetivo) e indicada algumas áreas de aplicação, e.g., engenharia, ciência da computação, produção, matemática computacional etc.

Agora é realizada uma extensão da definição anterior, conhecida como otimização vetorial ou multiobjetivo, aplicada diretamente neste trabalho, e cujos princípios são definidos a seguir.

Conceitos Básicos

A modelagem matemática de um problema a partir de um sistema real é de fundamental importância em otimização. O engenheiro, ou projetista, deve ser capaz de identificar as funções objetivo e restrições, além de especificar as variáveis de controle e o domínio viável intrínseco das mesmas. Conhecidos esses parâmetros, o problema de otimização multiobjetivo é definido a seguir:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \\ \text{sujeito a: } \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

em que Ω é o conjunto factível, matematicamente definido por:

$$\Omega = \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1, \dots, p \\ h_j(\mathbf{x}) = 0; j = 1, \dots, q; q \leq n \\ \mathbf{x} \in \mathbb{X} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

O vetor de funções objetivo $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ mapeia o espaço de parâmetros $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ para o espaço de objetivos $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^m$.

Algumas definições importantes em otimização multiobjetivo são dadas a seguir (Takahashi 2007):

- **Dominância:** Supondo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ dois pontos factíveis, diz-se que \mathbf{x}_1 domina \mathbf{x}_2 se $f_i(\mathbf{x}_1) \leq f_i(\mathbf{x}_2) \forall i \in \{1, \dots, m\}$ e $\exists i$ tal que $f_i(\mathbf{x}_1) < f_i(\mathbf{x}_2)$. Equivalentemente, diz-se que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{Y}$ domina $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \in \mathbb{Y}$ no espaço de objetivos. Essa relação de dominância é comumente escrita como $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$. \square
- **Soluções incomparáveis:** Supondo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ dois pontos factíveis, diz-se que os mesmos são não-dominados entre si, ou incomparáveis entre si, caso ambas as relações de dominância $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ não sejam verificadas. \square
- **Solução Pareto-ótima:** Supondo $\mathbf{x}^* \in \Omega$ um ponto factível, diz-se que \mathbf{x}^* é uma solução Pareto-ótima do problema multiobjetivo se não existe qualquer outra solução factível $\mathbf{x} \in \Omega$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$, ou seja, \mathbf{x}^* não é dominado por nenhum outro ponto factível. \square

- **Solução Pareto-ótima local:** Supondo $\mathbf{x}^* \in \Omega$ um ponto factível, diz-se que \mathbf{x}^* é uma solução localmente Pareto-ótima do problema multiobjetivo em uma dada vizinhança $\mathcal{V}_\delta(\mathbf{x}^*)$ definida por um raio $\delta > 0$, se não existe qualquer outra solução $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_\delta(\mathbf{x}^*) \cap \Omega$ que satisfaça $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$, ou seja, se \mathbf{x}^* não é dominado por nenhum outro ponto factível dessa vizinhança. \square
- **Solução Pareto-ótima global:** Supondo $\mathbf{x}^* \in \Omega$ um ponto factível, diz-se que \mathbf{x}^* é uma solução globalmente Pareto-ótima do problema multiobjetivo se não existe nenhum outro ponto factível $\mathbf{x} \in \Omega$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. Além disso, uma solução Pareto-ótima global é também uma solução Pareto-ótima local. \square

Finalmente, define-se matematicamente o conjunto Pareto-ótimo \mathcal{P} e a fronteira Pareto-ótima \mathcal{F} para o problema de otimização multiobjetivo.

- **Conjunto Pareto-ótimo:** Dado o problema de otimização multiobjetivo, o seu conjunto Pareto-ótimo global é definido como:

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x}^* \in \Omega \mid \nexists \mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\} \quad (\text{A.14})$$

\square

- **Fronteira Pareto-ótima:** A fronteira Pareto-ótima global do problema de otimização multiobjetivo corresponde à imagem do conjunto Pareto-ótimo global no espaço de objetivos, i.e., $\mathcal{F} = \mathbf{f}(\mathcal{P})$. Dito de outra forma:

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\} \quad (\text{A.15})$$

\square

Note que quando se trata de problemas com variáveis reais, a cardinalidade do conjunto \mathcal{P} é frequentemente infinita ($|\mathcal{P}| = \infty$), sendo limitada na otimização combinatória ($|\mathcal{P}| < \infty$). Nesse sentido, do ponto de vista prático é mais interessante estimar um conjunto de soluções eficientes de tamanho limitado, porém representativo de \mathcal{P} . Além disso, caso seja difícil estabelecer a otimalidade global das soluções encontradas, ou essa globalidade seja desnecessária, a aproximação de um conjunto de soluções não-dominadas representativas de \mathcal{P} é suficiente. Essa premissa viabiliza as seguintes definições.

- **Conjunto localmente ótimo:** Supondo $\mathcal{O} \subseteq \Omega$ um conjunto arbitrário de soluções factíveis, o conjunto localmente ótimo associado é definido como:

$$\mathcal{O}^* = \{x' \in \mathcal{O} \mid \nexists x \in \mathcal{O} : f(x) \prec f(x')\} \quad (\text{A.16})$$

□

- **Fronteira localmente ótima:** Supondo $\mathcal{O} \subseteq \Omega$ um conjunto arbitrário de soluções factíveis, a fronteira localmente ótima associada (\mathcal{Y}^*) corresponde à imagem do conjunto localmente ótimo (\mathcal{O}^*) mapeada no espaço de objetivos, i.e., $\mathcal{Y}^* = f(\mathcal{O}^*)$:

$$\mathcal{Y}^* = \{y = f(x) : x \in \mathcal{O}^*\} \quad (\text{A.17})$$

□

Problemas reais possuem frequentemente duas ou mais funções objetivo, e o conjunto solução passa a depender de mais de uma função mérito. A complexidade dos problemas reais que surgem nas sociedades tecnológicas modernas é caracterizada pela existência de múltiplas perspectivas de análise, refletindo aspectos econômicos, sociais, políticos, físicos, de engenharia, administrativos, psicológicos, éticos, estéticos etc., em um dado contexto específico.

Não existe uma solução admissível que garanta o melhor valor em todas as funções mérito, e ao se considerar os diferentes aspectos da realidade em cada aplicação, a percepção dos problemas por parte dos decisores torna-se mais realista.

Devido a isso, aumenta-se o espectro de soluções em análise e torna-se necessário descobrir um conjunto de soluções com diferentes características e não apenas uma solução ótima, estabelecendo distintos compromissos entre os aspectos de avaliação.

Assim, podemos estabelecer dois tipos de problemas multicritério:

- **Multiatributo (definição enumerativa):** as ações potenciais, em número finito, são explicitamente conhecidas *a priori*, bem como os respectivos índices de mérito avaliados segundo os vários critérios.
- **Multiobjetivo (definição analítica):** as ações potenciais formam inúmeras possibilidades, definidas implicitamente por um conjunto de restrições. O espaço de decisão é mapeado no espaço dos objetivos, no qual cada alternativa tem como represen-

tação um vetor, cujos componentes são os correspondentes valores de cada função objetivo (otimização vetorial).

O processo de tomada de decisão em problemas multiobjetivo não pode ser reduzido à procura da solução ótima de uma única função objetivo, sem levar em consideração outros tipos de indicadores e a conjuntura analisada, dado um contexto específico. Portanto, a solução ótima, ou seja, o melhor valor admissível para uma única função objetivo pode depender do conjunto de soluções não dominadas, onde não existe outra solução admissível que melhore simultaneamente todas as funções objetivo.

Não existindo um ponto que otimize simultaneamente todas as funções objetivo, a simples comparação entre soluções não dominadas, usando o conceito de dominância Pareto, não fornece qualquer informação na procura de uma solução não dominada que constitua uma solução final do problema multiobjetivo. Duas soluções não dominadas são incomparáveis através da ordem natural tipo “maior ou igual a”, portanto a ordenação completa do conjunto de soluções não dominadas pressupõe a intervenção de uma relação de preferências que reflète a estrutura de prioridades do decisor.

Em um problema mono-objetivo a pesquisa da solução ótima é puramente técnica, ou seja, a melhor solução está implícita no modelo, e será objetivo do algoritmo de otimização a sua descoberta, sendo que não caberá uma tomada de decisão por outros métodos. Já em um problema multiobjetivo são necessários recursos técnicos para se calcular soluções não dominadas, além das informações sobre as preferências do decisor.

A estrutura de preferências do decisor representa um conjunto de opiniões, valores, convicções e perspectivas, que configuram um modelo pessoal da realidade sobre o qual se apoia para avaliar diferentes possibilidades de ações potenciais, sendo que não é possível classificar uma solução como boa ou ruim apenas com referência ao modelo matemático e às técnicas de resolução. Vale lembrar que a qualidade de uma decisão é influenciada não somente pelos aspectos técnicos mas também pelos organizacionais, logísticos, econômicos, políticos, culturais etc., subjacentes ao processo de decisão.

Portanto, face ao exposto acima, pode-se definir o problema de tomada de decisão multicritério como sendo a escolha, entre os elementos do conjunto de soluções não dominadas, que constitua uma solução de compromisso aceitável pelo decisor tendo em vista suas preferências, as quais podem evoluir ao longo do processo de tomada de decisão. O processo de decisão é uma entidade dinâmica, constituída por ciclos iterativos compostos de geração de ações potenciais, avaliação, interpretação de informação, alterações de

valores, aprendizagem e adaptação de preferências, cujos aspectos serão abordados com mais detalhes na Seção A.3.

A.2.3. Conclusão

A análise multiobjetivo e a técnica de otimização vetorial utilizadas no projeto do controlador robusto culminará na geração de uma fronteira Pareto cujo projetista e/ou decisor, através de técnicas que auxiliem na tomada de decisão, definirá o controlador com desempenho mais adequado para a aplicação específica, objeto do trabalho em questão. Nesta visão, a otimização vetorial, utilizando-se do MOEA-P para a determinação dos parâmetros do controlador, foi uma ferramenta primordial para o sucesso do projeto.

Para a Seção A.3, os conceitos para o auxílio na tomada de decisão tipo multicritério serão abordados, bem como será apresentado o Processo Analítico Hierárquico (AHP), ferramenta imprescindível para o processo de tomada de decisão utilizado neste trabalho.

A.3. Tomada de Decisão Multicritério

A.3.1. Introdução

Existem três maneiras de se implementar o processo de tomada de decisão: decisão *a priori*, *interativa* e decisão *a posteriori*, sendo essa última, utilizada neste trabalho. Em cada uma delas, o decisor define suas preferências em diferentes circunstâncias. Na decisão *a priori*, ele é consultado uma única vez, antes do início do processo de otimização e a informação obtida quanto aos seus interesses é usada para orientar a busca pela solução favorita pertencente à fronteira Pareto. Na decisão *interativa*, o decisor é consultado várias vezes durante o processo de otimização. Assim, ele pode definir suas preferências tendo em mão a informação disponível na iteração corrente quanto às possíveis soluções. Sua preferência orienta a busca nas próximas iterações, até que nova consulta seja realizada. O processo de decisão *interativa* só é interrompido quando o decisor estiver totalmente satisfeito com sua escolha.

A decisão *a posteriori* inicia-se com a execução de uma busca multiobjetivo. O decisor é consultado apenas depois que uma aproximação discreta satisfatória da fronteira Pareto for encontrada. Essa abordagem possui algumas vantagens: antes de fazer sua escolha, o decisor pode analisar todas as soluções ótimas disponíveis e, se seus interesses se modificarem, não é necessário executar o algoritmo de otimização novamente. Além disso, geralmente é mais fácil incluir novos critérios na análise realizada *a posteriori* do que *a priori* ou progressivamente. Por outro lado, essa abordagem geralmente exige maior tempo de processamento do que as demais, pois a busca por uma aproximação da fronteira Pareto tende a exigir maior esforço computacional do que a busca por um único ponto ótimo.

A.3.2. Suporte à Tomada de Decisão

Frequentemente, uma decisão precisa ser tomada em relação à vários critérios, em vez de um único. Isto requer a avaliação de diversos critérios e alternativas, com base em cada critério e em seguida, a agregação destas avaliações para conseguir a classificação relativa das alternativas no que diz respeito ao problema. Desta forma, um método de tomada de decisão multicritério (MTDM) consiste na definição de ponderações (pesos), classificação ou níveis de importância para um dado conjunto de ações (alternativas). De acordo com o seu impacto e/ou consequência, o mesmo é implementado na prática,

sendo a decisão final tomada considerando-se algumas opiniões de peritos, experiências profissionais dos decisores e julgamentos prévios (Chankong & Haimes 2008).

Embora alguns métodos MTDM sofisticados tenham sido estudados na literatura (Figueira et al. 2005b), uma estratégia híbrida mais simples e eficiente é aplicada neste trabalho, sendo que a mesma utiliza, como primeira etapa, um recurso do tradicional e consagrado método *Analytic Hierarchy Process (AHP)*, a fim de especificar níveis de importância para os critérios, além de uma ferramenta desenvolvida que é o Método de Decisão pelo Ganho Relativo (MDGR), cujo objetivo é a definição da solução final.

O Processo Analítico Hierárquico (AHP)

O AHP (*Analytic Hierarchy Process*) é uma abordagem sistemática que estabelece a estrutura de uma metodologia bem definida derivada de princípios matemáticos (Saaty 1977, Saaty 1980). Este fornece uma técnica formalizada que minimiza o tempo investido no processo de tomada de decisão e garante uma melhor qualidade das soluções, principalmente em problemas complexos (Saaty 2000). Além disso, a simplicidade e a eficácia do AHP permitiu sua utilização generalizada em vários contextos e aplicações (Bhushan & Rai 2004, Figueira et al. 2005b, Saaty & Vargas 1991).

A metodologia do AHP pode ser explicada através dos seguintes passos (Saaty & Vargas 2012):

1. O problema é decomposto em uma hierarquia de objetivo, critérios, subcritérios e alternativas, indicando a relação entre os componentes de um nível com os do nível imediatamente inferior, conforme mostrado na Fig. A.2. Nesta estrutura, o tomador de decisão precisa se concentrar em apenas parte do problema, no qual a contribuição dos elementos do nível inferior é imediatamente comparada com a do nível superior.
2. Algumas informações são adquiridas dos especialistas e/ou decisores, a fim de realizar uma comparação par a par das alternativas, com base em uma escala quantitativa que permite atribuir diferentes intensidades de preferência às ações. Esta escala fundamental é mostrado na Tabela A.1.
3. As comparações de pares são organizados em uma matriz quadrada com elementos unitários na diagonal. Basicamente, o critério para a i -ésima linha é melhor do

que na j -ésima coluna se o valor do elemento (i, j) for maior que 1; além disso, o elemento (j, i) é recíproco ao (i, j) .

4. O vetor de prioridade, ou a importância relativa dos diferentes critérios de comparação, é dado pelo autovetor direito principal, normalizado, correspondente a cada matriz de comparação.
5. Como as comparações realizadas pelo AHP são subjetivas, um índice de consistência (IC) de cada matriz de decisão é avaliado como:

$$IC = (\lambda_{max} - s)/(s - 1)$$

no qual λ_{max} é o autovalor máximo da matriz de decisão e s a sua ordem. Este IC é então comparado com o de uma matriz aleatória (RI), conforme Tabela A.2, onde a razão de consistência é definida ($RC = IC/RI$). A literatura sugere $RC \leq 0,1$ (Saaty 2000, Forman 1990).

6. A avaliação de cada alternativa é multiplicada pelas ponderações dos subcritérios e redefinidas para se obter pesos locais em relação a cada critério. Os pesos locais são então multiplicados pelos pesos dos critérios e também redefinidos para se obter as classificações globais e a finalização do procedimento.

Uma vez que neste trabalho o AHP é usado especificamente para indicar níveis de importância $w_i, i = 1, \dots, n_c$, para os n_c critérios, somente os passos anteriores de 1 a 5 são considerados. Estes valores de peso foram utilizados pelo MDGR, apresentado no Capítulo 3, a fim de se definir tanto uma função de preferência global como a escolha final da alternativa.

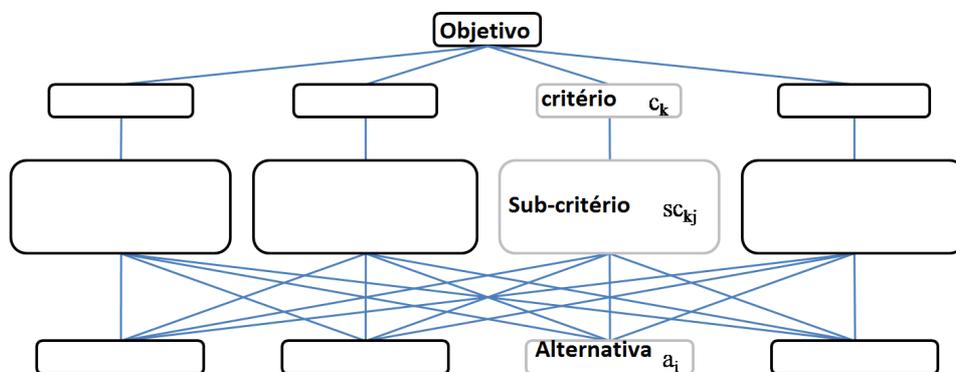


Figura A.2.: Estrutura genérica hierárquica do AHP.

Tabela A.1.: Escala quantitativa fundamental do AHP.

Definição	Intensidade da Importância
Mesma importância	1
Importância moderada	3
Importância forte	5
Importância muito forte	7
Extrema importância	9
Importância intermediária	2, 4, 6, 8
Importância próxima	1,1 ; 3,5 etc

Tabela A.2.: Índice de consistência aleatório em função da ordem da matriz.

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49

A.3.3. Conclusão

As vantagens da utilização de técnicas de auxílio à tomada de decisão multicritério ficam evidentes, uma vez que é necessário escolher entre as várias soluções eficientes, aquela mais apropriada, considerando-se os vários critérios significativos e pertinentes ao projeto.

Na Seção A.4 é apresentado um Algoritmo Evolução Diferencial (AED) básico, utilizado na síntese do controlador robusto, aplicado como motor evolutivo de uma técnica de otimização multiobjetivo.

A.4. Algoritmo Evolução Diferencial (AED)

A.4.1. Introdução

Algoritmos evolucionários são métodos de otimização estocástica particularmente bem adaptados para problemas difíceis, onde pouco se sabe sobre o espaço de busca. Eles mantêm uma população de soluções candidatas que são transformadas de forma iterativa por alguns operadores inspirados na natureza: mutação, recombinação e seleção. O processo evolutivo tende a encontrar globalmente soluções satisfatórias para o problema de otimização (Zaharie & Pectu 2003b).

A.4.2. AED Clássico

O Algoritmo Evolução Diferencial (AED), desenvolvido por Storn & Price (1997), tem sido aplicado com sucesso na solução de problemas de otimização contínua encontrados em projetos de engenharia em geral porém, quando aplicado a problemas reais de alta dimensão ou quando a avaliação das funções é custosa, pode se tornar muito lento. Para descrever a estrutura do AED consideramos a tarefa de encontrar o mínimo de uma função objetivo sobre a qual não se impõem qualquer restrição.

Em termos de implementação, o AED clássico baseia-se na evolução de uma população de tamanho fixo, que é inicializada aleatoriamente. Após a inicialização da população, um processo iterativo é iniciado, e, em cada iteração (ou geração), uma nova população é produzida até que uma condição de parada seja satisfeita. Em cada geração, cada elemento da população pode ser substituído por um novo elemento gerado. O novo elemento é uma combinação linear entre um elemento selecionado aleatoriamente e uma diferença vetorial entre outros dois elementos também selecionados de maneira aleatória (Storn & Price 1997).

Além do tamanho da população N , os parâmetros do AED básico são a taxa de recombinação, que representa a taxa de cruzamento entre o vetor mutante e o vetor base. Nesse caso, a solução final pode herdar características (variáveis) de ambos esses vetores. Outro fator é a amplificação do termo “diferencial”, também conhecido como escala dos vetores-diferenças, simbolizado pela letra F . Estudos experimentais mostram que propriedades de convergência do AED, em alguns casos, podem ser dependentes da escolha correta dos parâmetros do algoritmo, porém, em geral, o que se observa é que

o AED, em função da sua habilidade de auto-adaptação aos contornos da função, não é muito sensível à escolha desses parâmetros.

O mecanismo de busca do AED utiliza vetores-diferença com as seguintes características:

- Dois indivíduos são selecionados aleatoriamente para se criar um vetor-diferença;
- Este vetor-diferença é somado a um terceiro indivíduo, também selecionado aleatoriamente, produzindo uma solução mutante;
- A solução mutante é portanto o resultado de uma perturbação em algum indivíduo da população;
- Esta perturbação é um vetor-diferença construído aleatoriamente.

Seja uma população de soluções candidatas $X_t = \{\mathbf{x}_{t,i}; i = 1, \dots, N\}$, onde cada indivíduo é representado por um vetor coluna, em que o terceiro índice indica uma entre as n variáveis do problema:

$$\mathbf{x}_{t,i} = \begin{bmatrix} x_{t,i,1} \\ x_{t,i,2} \\ \vdots \\ x_{t,i,n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

A equação A.19 ilustra a operação mutação diferencial:

$$\mathbf{v}_{t,i} = \mathbf{x}_{t,r_1} + F(\mathbf{x}_{t,r_2} - \mathbf{x}_{t,r_3}), \quad r_1, r_2, r_3 \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{A.19})$$

em que $\mathbf{v}_{t,i}$ representa a i -ésima solução mutante, F é um fator de escala aplicado ao vetor-diferença e o vetor \mathbf{x}_{t,r_1} é denominado vetor de base. Além disso, os vetores r_1 , r_2 e r_3 são mutuamente distintos, sendo também mutuamente distintos do vetor $x_{t,i}$ usado na recombinação.

A partir deste procedimento, obtém-se uma população mutante $V_t = \{\mathbf{v}_{t,i}; i = 1, \dots, N\}$ onde a recombinação é obtida da seguinte maneira:

- Os indivíduos da população corrente X_t são recombinados com os indivíduos da população mutante V_t .
- Produz-se a descendência ou população de soluções teste U_t .

- Na versão clássica do AED, emprega-se recombinação discreta com probabilidade $C \in [0, 1]$:

$$u_{t,i,j} = \begin{cases} v_{t,i,j}, & \text{se } \mathcal{U}_{[0,1]} \leq C \vee j = \delta_i \\ x_{t,i,j}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

em que $\delta_i \in \{1, \dots, n\}$ é um índice gerado aleatoriamente e C controla o efeito da recombinação discreta.

O Algoritmo A.1 mostra a implementação básica do método evolução diferencial, contemplando-se as etapas de geração da população inicial, mutação diferencial, recombinação e seleção.

Algoritmo A.1: Pseudocódigo Básico Evolução Diferencial (AED).

Entrada: Parâmetros de Configuração N, F, C

```

1 início
2    $t \leftarrow 1$ ;
3    $X_t = \{\mathbf{x}_{t,i}; i = 1, \dots, N\}$ ; // Inicializa a população
4   enquanto algum critério de parada não for satisfeito faça
5     para  $i = 1$  até  $N$  faça
6       Selecionar vetor de base  $\mathbf{x}_{t,r_1}$ ; // Seleção para reprodução
7       Selecionar vetor-diferença  $(\mathbf{x}_{t,r_2} - \mathbf{x}_{t,r_3})$ ;
8       Selecionar fator de escala  $F$ ;
9       Gerar a solução mutante  $\mathbf{v}_{t,i} = \mathbf{x}_{t,r_1} + F(\mathbf{x}_{t,r_2} - \mathbf{x}_{t,r_3})$ ;
10      Adicionar  $\mathbf{v}_{t,i}$  à população mutante  $V_t$ ;
11    fim
12    Recombinar  $X_t$  e  $V_t$  com parâmetro  $C$ , gerando  $U_t$ ; // Variação
13    Aplicar a seleção para sobrevivência entre  $X_t$  e  $U_t$ ; // Atualização
14     $t \leftarrow t + 1$ ;
15  fim
16 fim

```

Saída: Solução ótima aproximada

O AED satisfaz alguns requisitos interessantes como, por exemplo, a capacidade de lidar com funções de custo não-lineares, não-diferenciáveis e multimodais, sendo também passível de paralelização. Possui além disso boa acessibilidade, devido à existência de poucas variáveis de controle, cujos valores são ajustados de maneira relativamente simples.

A Fig. A.3 ilustra a geração de um vetor mutante e as possíveis soluções teste obtidas após a recombinação, indicadas por ■.

Nas Figs. A.4 a A.6 é mostrado o funcionamento básico do AED onde são destacados os processos de mutação diferencial e o mecanismo de busca utilizando-se os vetores-diferença.

Na seção seguinte apresenta-se um AED multipopulacional com o intuito de controlar a diversidade das soluções estimadas.

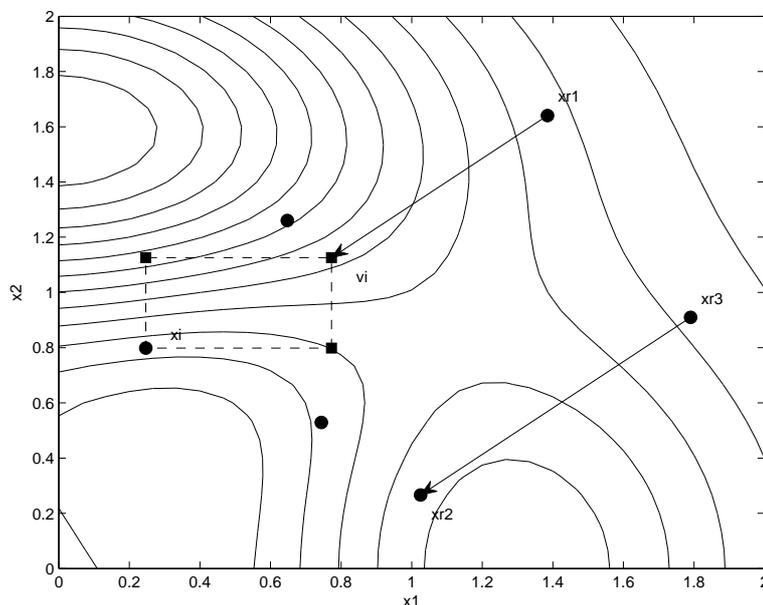
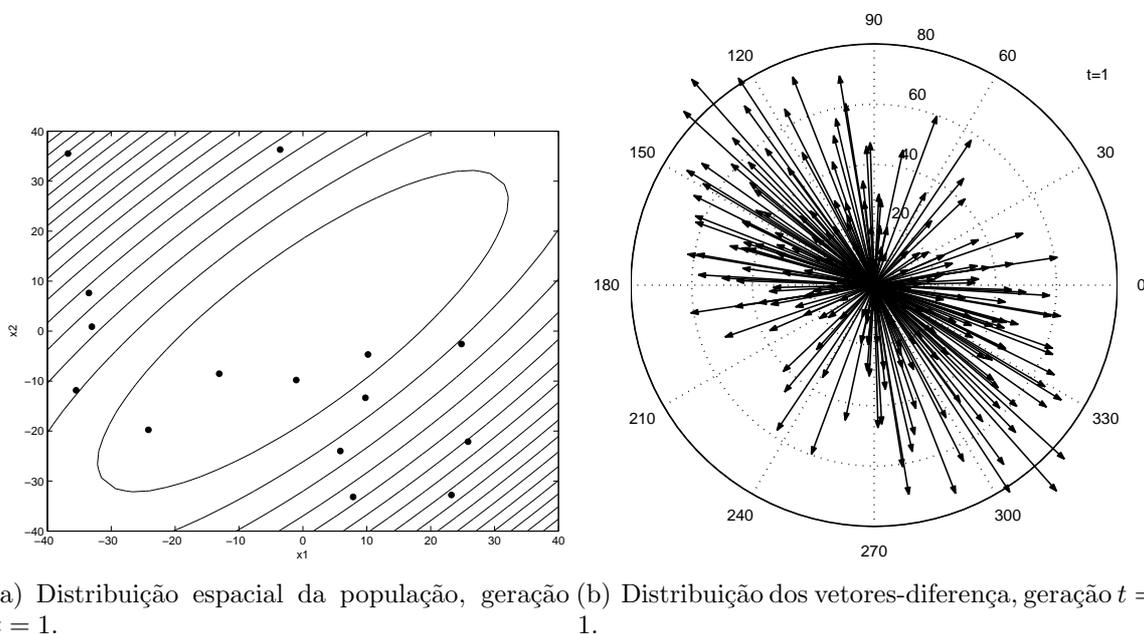
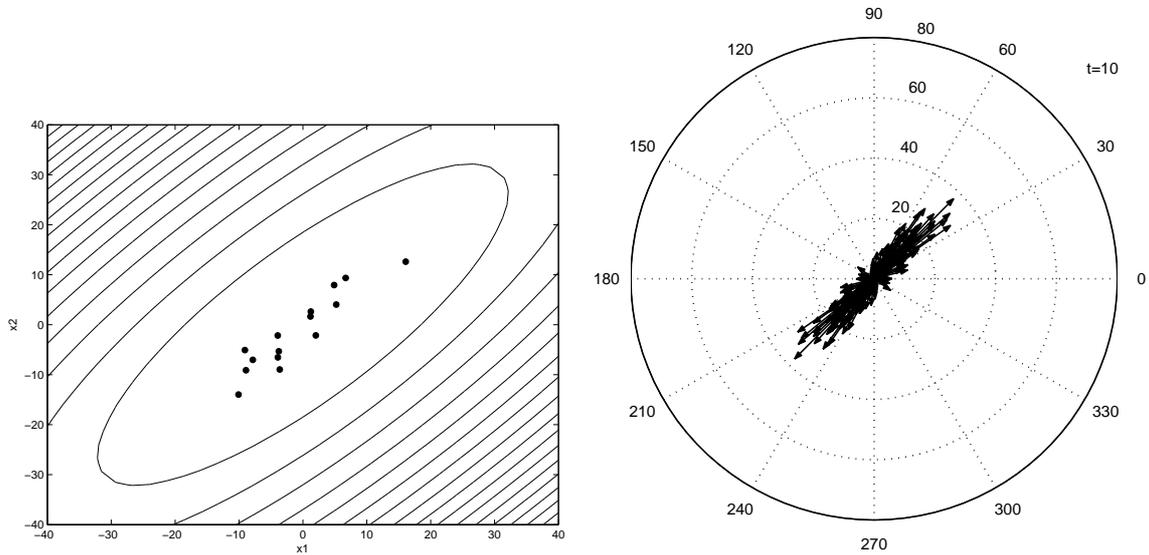


Figura A.3.: Mutação diferencial e recombinação no AED.



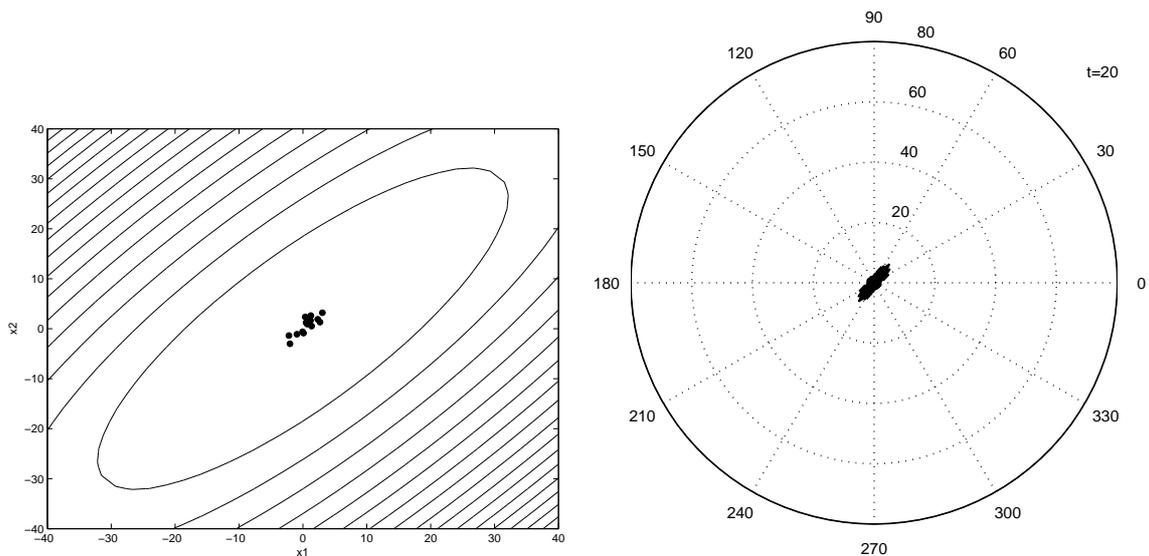
(a) Distribuição espacial da população, geração $t = 1$. (b) Distribuição dos vetores-diferenç a, geração $t = 1$.

Figura A.4.: Distribuição das soluções candidatas do AED em uma função objetivo quadrática em $t = 1$.



(a) Distribuição espacial da população, geração $t = 10$. (b) Distribuição dos vetores-diferença, geração $t = 10$.

Figura A.5.: Distribuição das soluções candidatas do AED em uma função objetivo quadrática em $t = 10$.



(a) Distribuição espacial da população, geração $t = 20$. (b) Distribuição dos vetores-diferença, geração $t = 20$.

Figura A.6.: Distribuição das soluções candidatas do AED em uma função objetivo quadrática em $t = 20$.

A.4.3. Algoritmo Evolução Diferencial Multipopulacional

A paralelização de um algoritmo evolutivo pode ser feita em um dos seguintes níveis: nível de avaliação da função objetivo (modelo mestre-escravo), nível de população (modelo multipopulação, também chamado modelo de ilha ou modelo de migração), nível de elementos (modelo celular).

O objetivo deste trabalho é a implementação paralela da evolução diferencial com base no modelo multipopulação. A razão de escolha do modelo multipopulação deve-se principalmente à fomentação da preservação de diversidade da população por meio do processo de migração. Devido à ausência de uma mutação clássica, conforme observada em algoritmos genéticos, a evolução diferencial é altamente predisposta a uma diminuição da diversidade da população, o que pode levar à convergência prematura indesejável. A abordagem multipopulacional pode ajudar a evitar tal situação. Além disso, considera-se a paralelização da avaliação da função objetivo. O paralelismo em termos da função objetivo tem como motivação principal o fato de que a maioria dos cálculos dispendiosos estão na avaliação da função (Zaharie & Pectu 2003b) e (Zaharie & Pectu 2003a).

No modelo multipopulação, a população é dividida em subpopulações chamadas de ilhas. Em cada ilha um algoritmo evolutivo sequencial padrão é executado. A comunicação entre subpopulações é assegurada por um processo de migração onde, depois de algumas gerações, vários elementos podem deixar sua ilha e migrar para outra. Este processo tem um importante papel na preservação da diversidade da população, de forma a se evitar a convergência prematura.

O AED clássico portanto é modificado considerando que após algumas gerações pré-definidas, um processo de migração é iniciado, com base em uma topologia de ligação aleatória. Mais especificamente, a estratégia de migração consiste no fato de que cada elemento de cada subpopulação pode ser permutado com uma determinada probabilidade de migração com outro elemento selecionado aleatoriamente de outra subpopulação, selecionada também aleatoriamente, incluindo a subpopulação que contém o elemento inicial (Zaharie & Pectu 2003b). Devido ao processo de migração, uma subpopulação com baixa diversidade poderá ser “revivida”.

Em função da abordagem multiobjetivo adotada neste trabalho, uma variação do algoritmo evolução diferencial básico foi utilizada, cuja principal característica é a paralelização baseada em uma topologia de conexão aleatória, através do conceito de ilhas.

Conforme apresentado em Montañó et al. (2010), o objetivo dessa técnica é melhorar a eficiência do algoritmo, ou seja, reduzir o tempo de execução utilizando-se uma pequena dimensão populacional em cada subpopulação. Os resultados obtidos pela implementação do algoritmo mostram não só um aumento de velocidade no tempo de execução, mas também uma maior probabilidade de convergência.

Em Zaharie & Pectu (2003b) um algoritmo de evolução diferencial multipopulacional é apresentado. Esta abordagem consiste em dividir a população principal em subpopulações (ilhas), sendo todas de mesmo tamanho. Em cada ilha, uma versão básica (série) do algoritmo é executada e então evoluída por uma época. Em seguida, uma migração é iniciada. Para mais informações sobre esses trabalhos, sugere-se a leitura dos artigos (Zaharie & Pectu 2003b, Zaharie & Pectu 2003a).

A.4.4. Conclusão

Anteriormente, no Capítulo 3, foi formulado o problema de controle robusto bem como a solução em termos de síntese, auxílio à tomada de decisão, e a análise, baseados na otimização direta no espaço de parâmetros do controlador.

Em seguida, no Capítulo 4, foi apresentada a tabela de parametrização do MOEA-P cujo algoritmo é utilizado efetivamente neste trabalho, através de inúmeros testes e exemplos realizados, além de abordagens múltiplas e variadas.

Na Seção A.3, os conceitos para o auxílio à tomada de decisão multicritério foram abordados, bem como apresentado o Processo Analítico Hierárquico (AHP), ferramenta imprescindível para o processo de tomada de decisão desenvolvido neste trabalho.

Em seguida, na Subseção A.4.2 foi apresentado o AED básico e suas variações para aplicações em otimização escalar e vetorial.

Finalmente, na Subseção A.4.3, foram mostrados os conceitos importantes relativos às regras de adaptação e multipopulação, cujo objetivo foi a análise final multiobjetivo, aplicada nos Capítulos 3 e 4.

Apêndice B.

Resultados Adicionais

Outras formulações semelhantes aos exemplos 1 e 2, abordados no Cap. 4, são apresentados neste apêndice, a título de expansão dos testes realizados e aplicações práticas em geral. Basicamente, essas outras formulações são feitas variando-se a análise biobjetivo e a aplicação ou não das restrições, à cada exemplo.

A matriz de preferências (AHP_{pref1}) e o vetor de pesos (w_{AHP}) utilizados nos exemplos 6 a 9 são idênticos aos do exemplo 1, sendo estes resultados adicionais também baseados no mesmo processo dos tanques interativos (exemplos 1 a 3).

Exemplo 6 - Problema Biobjetivo Irrestrito, Considerando o Erro ao Modelo de Referência x Rejeição ao Distúrbio

O problema de síntese de controlador robusto multiobjetivo tratado neste exemplo é estabelecido como: dado um sistema incerto linear invariante no tempo, em tempo discreto, representado por um modelo politópico, $\mathcal{P}(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \Theta$, e um modelo de referência, $T_m(z)$, com as características desejadas de resposta transitória, encontrar um controlador por realimentação dinâmica de saída, $K(z)$, que minimize a norma \mathcal{H}_∞ máxima do erro entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada, $E(z)$, e a norma \mathcal{H}_∞ máxima da função de transferência $T_{cd}(z)$ relacionada com a rejeição ao distúrbio, no domínio politópico de incerteza:

$$K^*(z) = \arg \min_{K(z)} \left[\begin{array}{l} \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|E(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \\ \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{cd}(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \end{array} \right] \quad (\text{B.1})$$

sujeito a: $K(z) \in \mathcal{F}$

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável.

Agora, de acordo com o procedimento de projeto proposto neste exemplo, os parâmetros utilizados pelo MOEA-P foram $m = 10$, $s = 6$ e $gmax = 300$. O controlador K_6 , escolhido pelo MDGR e marcado com * na Fig. B.1, resultou em $\max \|E\|_\infty = 0,1903$ e $\max \|T_{cd}\|_\infty = 2,8504$. Os sinais da variável de processo (PV) e da variável de controle (CV), obtidos na síntese, são mostrados nas Figs. B.2 e B.3, respectivamente.

Devido as funções objetivo consideradas, observa-se uma mais rápida rejeição ao distúrbio em relação ao controlador K_1 (exemplo 1), sendo a fronteira Pareto estimada melhor definida na região do “joelho” da curva, conforme mostrado na Fig. B.1. Também pode-se notar o efetivo conflito de interesses entre as duas novas funções objetivo escolhidas.

Ainda em relação a K_1 , percebe-se inclusive uma menor atenuação do ruído de medição no sinal de saída do controlador (CV), de acordo com a Fig. B.3, uma vez que tal característica não é valorizada nessa proposta biobjetivo do projeto.

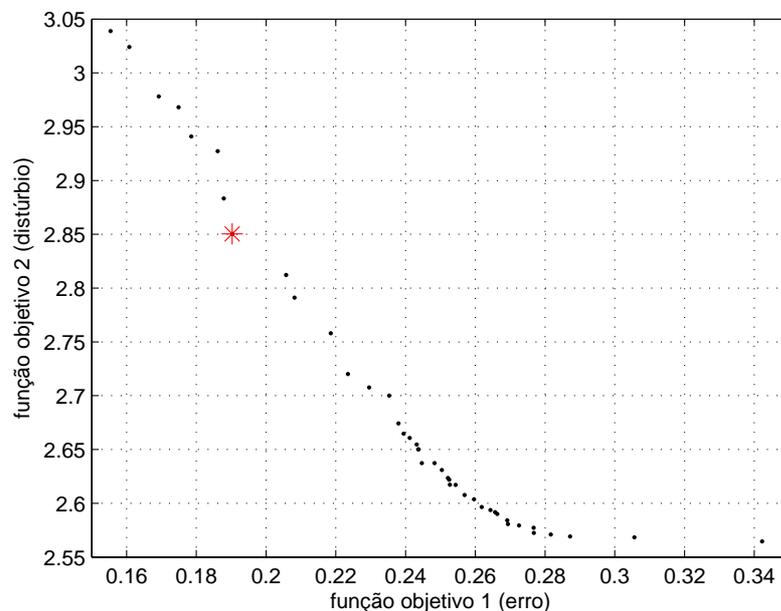


Figura B.1.: Fronteira Pareto estimada com o controlador K_6 escolhido pelo MDGR e marcado com *.

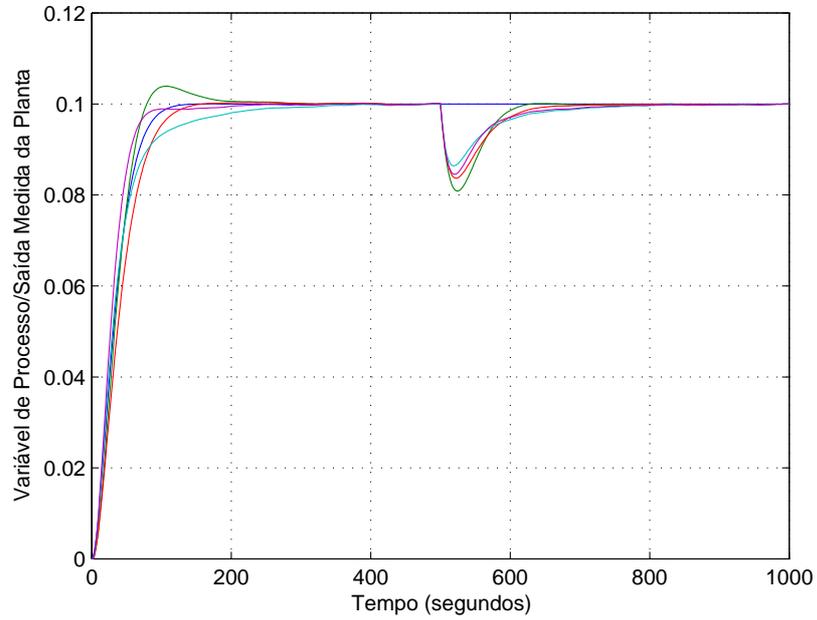


Figura B.2.: Resposta da PV do controlador K_6 robusto.

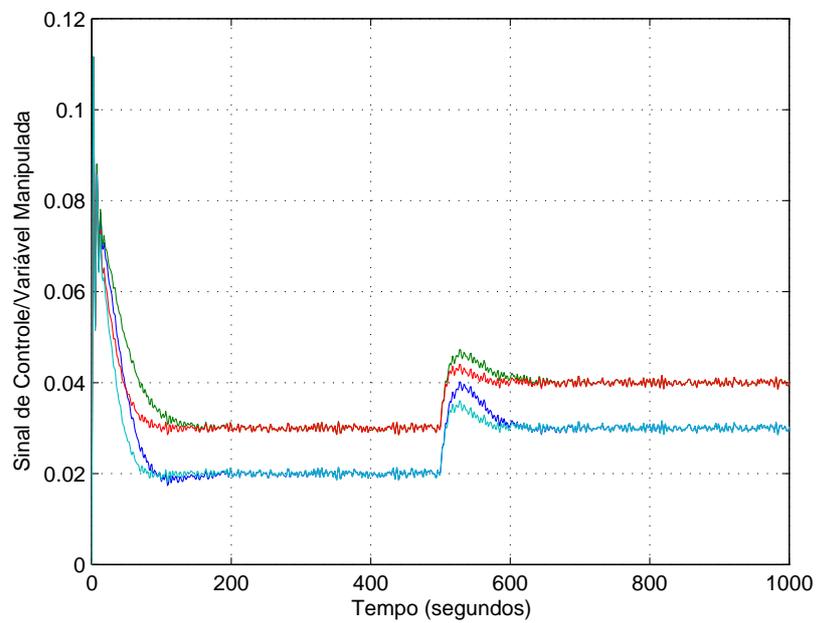


Figura B.3.: Resposta da CV do controlador K_6 robusto.

Exemplo 7 - Problema Biobjetivo Irrestrito, Considerando a Rejeição ao Distúrbio x Ruído de Medição

O problema de síntese de controlador robusto multiobjetivo tratado neste exemplo é estabelecido como: dado um sistema incerto linear invariante no tempo, em tempo discreto, representado por um modelo politópico, $\mathcal{P}(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \Theta$, e um modelo de referência, $T_m(z)$, com as características desejadas de resposta transitória, encontrar um controlador por realimentação dinâmica de saída, $K(z)$, que minimize a norma \mathcal{H}_∞ máxima da função de transferência $T_{cd}(z)$ relacionada com a rejeição ao distúrbio, e a norma \mathcal{H}_2 máxima da função de transferência $T_{un}(z)$ relacionada com a atenuação do ruído de medição, no domínio politópico de incerteza:

$$K^*(z) = \arg \min_{K(z)} \begin{bmatrix} \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{cd}(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \\ \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{un}(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

sujeito a: $K(z) \in \mathcal{F}$

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável.

De acordo com o procedimento de projeto proposto neste exemplo, os parâmetros utilizados pelo MOEA-P foram $m = 10$, $s = 6$ e $gmax = 100$. O controlador K_7 , escolhido pelo MDGR e marcado com * na Fig. B.4, resultou em $\max \|T_{un}\|_2 = 0,7278$ e $\max \|T_{cd}\|_\infty = 2,6707$. Os sinais da variável de processo (PV) e da variável de controle (CV), obtidos na síntese, são mostrados nas Figs. B.5 e B.6, respectivamente. Observa-se uma fronteira Pareto estimada esparsa ($gmax = 100$), conforme a Fig. B.4, porém ainda pode-se notar o efetivo conflito de interesses entre as duas novas funções objetivo escolhidas. Também é possível perceber um maior erro em relação ao modelo de referência, de acordo com a Fig. B.5, uma vez que tal característica não é valorizada nessa proposta biobjetivo do projeto.

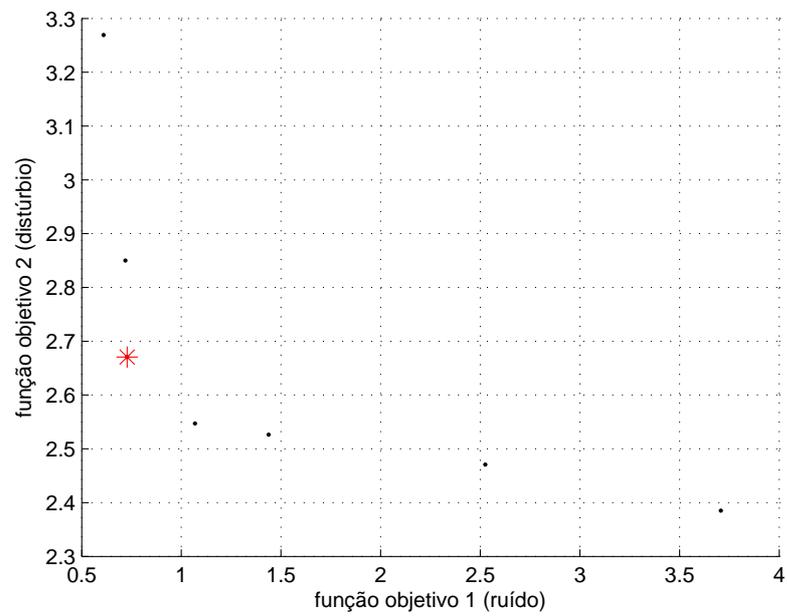


Figura B.4.: Fronteira Pareto estimada com o controlador K_7 escolhido pelo MDGR e marcado com *.

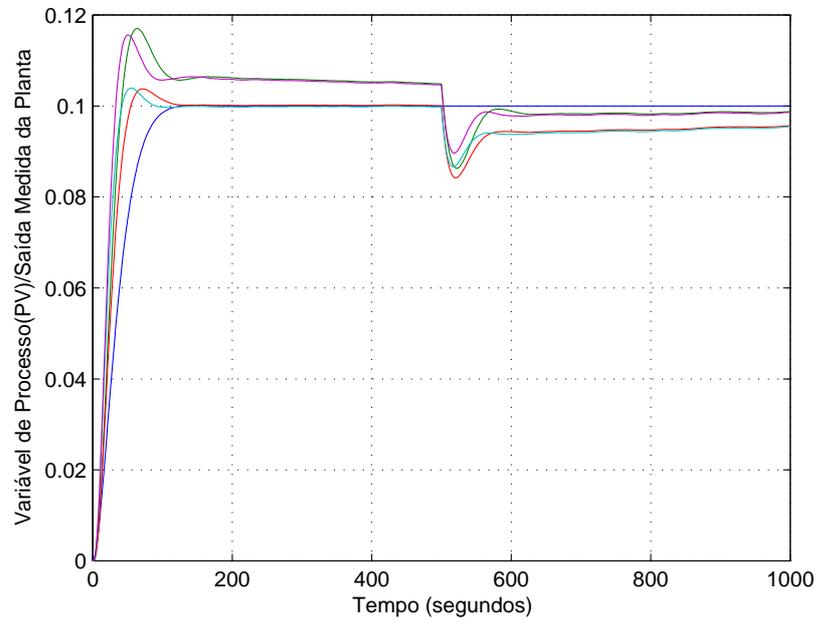


Figura B.5.: Resposta da PV do controlador K_7 robusto.

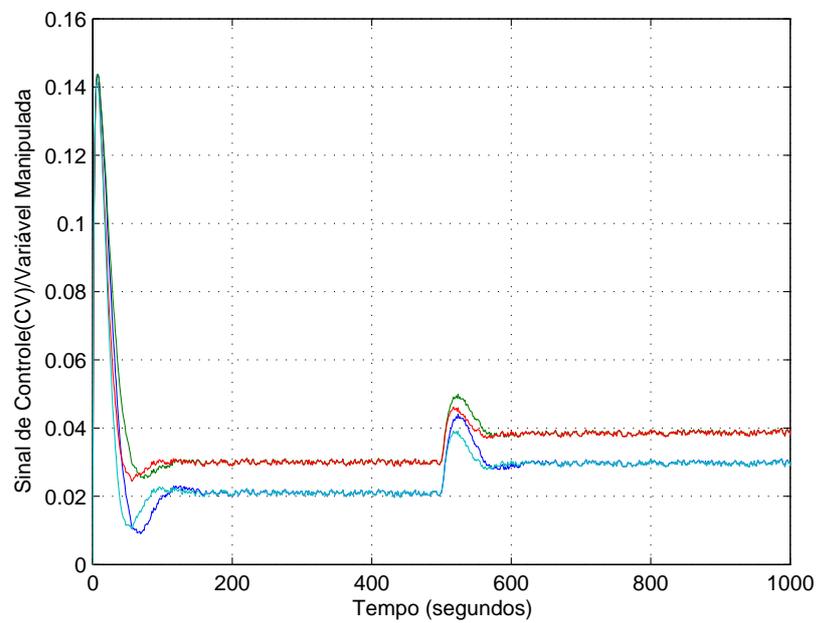


Figura B.6.: Resposta da CV do controlador K_7 robusto.

Exemplo 8 - Problema Biobjetivo Restrito, Considerando o Erro ao Modelo de Referência x Rejeição ao Distúrbio e Garantindo um Limite de Atenuação do Ruído

O problema de síntese de controlador robusto multiobjetivo tratado neste exemplo é estabelecido como: dado um sistema incerto linear invariante no tempo, em tempo discreto, representado por um modelo politópico, $\mathcal{P}(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \Theta$, e um modelo de referência, $T_m(z)$, com as características desejadas de resposta transitória, encontrar um controlador por realimentação dinâmica de saída, $K(z)$, que minimize a norma \mathcal{H}_∞ máxima do erro entre o modelo de referência e a função de transferência em malha fechada, $E(z)$, e a norma \mathcal{H}_∞ máxima da função de transferência $T_{cd}(z)$ relacionada com a rejeição ao distúrbio, no domínio politópico de incerteza, sujeito a um limitante de atenuação de ruído de medição definido pelo parâmetro ϵ_r , determinado pelas especificações de projeto, conforme a formulação abaixo:

$$K^*(z) = \arg \min_{K(z)} \begin{bmatrix} \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|E(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \\ \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{cd}(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

sujeito a: $\max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{un}\|_2 \leq \epsilon_r$, $K(z) \in \mathcal{F}$

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável.

Considerando o procedimento de projeto proposto neste exemplo, os parâmetros utilizados pelo MOEA-P foram $m = 10$, $s = 6$ e $gmax = 300$. O controlador K_8 , escolhido pelo MDGR e marcado com * na Fig. B.7, resultou em $\max \|E\|_\infty = 0,2161$ e $\max \|T_{cd}\|_\infty = 2,7957$, para $\epsilon_r = 1$. Os sinais da variável de processo (PV) e da variável de controle (CV), obtidos na síntese, são mostrados nas Figs. B.8 e B.9, respectivamente.

Devido as mesmas funções objetivo consideradas e a restrição com relação a uma atenuação mínima no ruído de medição, observa-se uma maior atenuação do ruído com menor valor máximo da ação de controle no sinal de saída do controlador (CV), em relação ao controlador K_6 irrestrito (exemplo 6). Também pode ser observada uma rejeição ao distúrbio mais lenta em relação a K_6 , devido a restrição imposta que diminui o esforço de controle. Nota-se que a fronteira Pareto estimada apresentou-se de forma descontínua para as mesmas trezentas iterações da rotina, conforme a Fig. B.7, onde ainda pode ser observado o conflito de interesses entre as duas funções objetivo, para as sub-regiões dessa fronteira.

Finalmente, na Fig. B.8 pode-se notar um maior sobre-sinal na variável de processo (PV), em relação a K_6 , devido a um maior erro em relação ao modelo de referência.

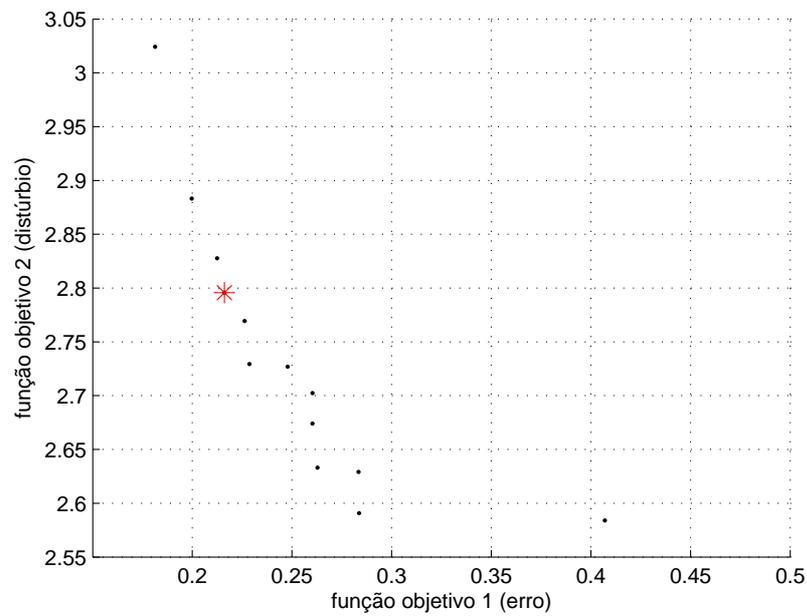


Figura B.7.: Fronteira Pareto estimada com o controlador K_8 escolhido pelo MDGR e marcado com *, com restrição em $\epsilon_r = 1$.

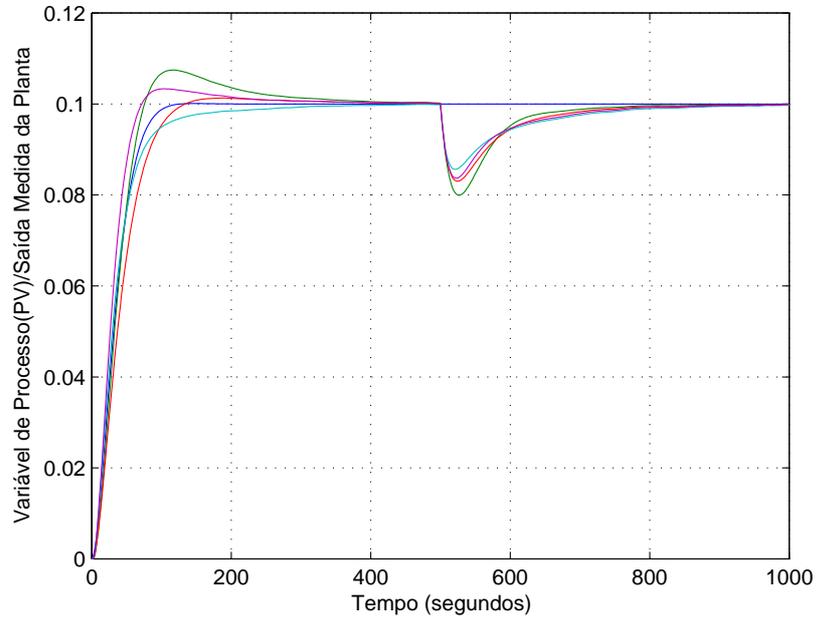


Figura B.8.: Resposta da PV do controlador K_8 robusto, com restrição em $\epsilon_r = 1$.

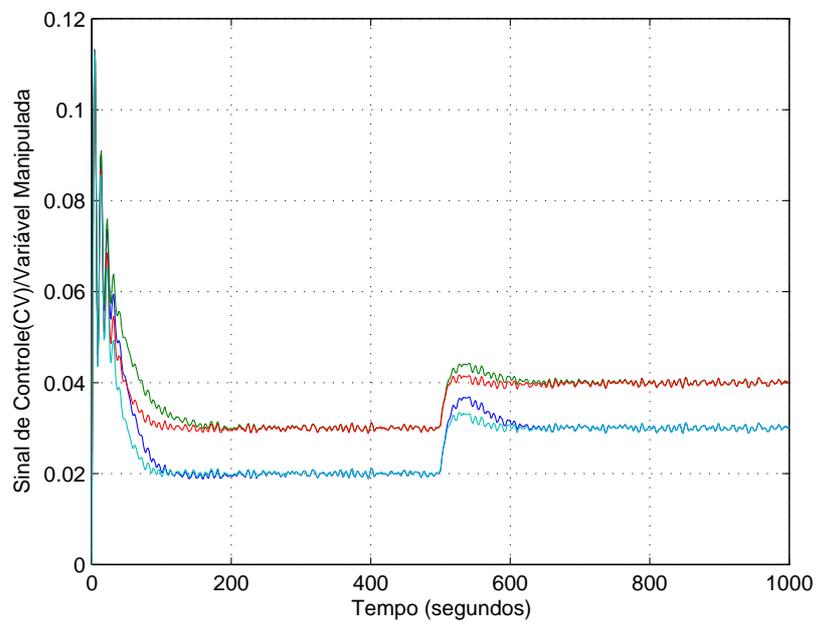


Figura B.9.: Resposta da CV do controlador K_8 robusto, com restrição em $\epsilon_r = 1$.

Exemplo 9 - Problema Biobjetivo Restrito, Considerando a Rejeição ao Distúrbio x Ruído de Medição e Garantindo um Limite de Erro em Relação ao Modelo de Referência

Finalmente, o problema de síntese de controlador robusto multiobjetivo tratado neste último exemplo é estabelecido como: dado um sistema incerto linear invariante no tempo, em tempo discreto, representado por um modelo politópico, $\mathcal{P}(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \Theta$, e um modelo de referência, $T_m(z)$, com as características desejadas de resposta transitória, encontrar um controlador por realimentação dinâmica de saída, $K(z)$, que minimize a norma \mathcal{H}_∞ máxima da função de transferência $T_{cd}(z)$ relacionada com a rejeição ao distúrbio, e a norma \mathcal{H}_2 máxima da função de transferência $T_{un}(z)$ relacionada com a atenuação do ruído de medição, no domínio politópico de incerteza, sujeito à um erro máximo em relação ao modelo de referência definido pelo parâmetro ϵ_e , conforme a formulação abaixo:

$$K^*(z) = \arg \min_{K(z)} \begin{bmatrix} \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{cd}(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_\infty \\ \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|T_{un}(z, \boldsymbol{\alpha}, K)\|_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

sujeito a: $\max_{\boldsymbol{\alpha} \in \Theta} \|E\|_\infty \leq \epsilon_e$, $K(z) \in \mathcal{F}$

sendo \mathcal{F} o conjunto de controladores tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável.

Considerando o procedimento de projeto proposto neste último exemplo, os parâmetros utilizados pelo MOEA-P também foram $m = 10$, $s = 6$ e $gmax = 100$. O controlador K_9 , escolhido pelo MDGR e marcado com * na Fig. B.10, resultou em $\max \|T_{un}\|_2 = 1,2398$ e $\max \|T_{cd}\|_\infty = 3,5585$, para $\epsilon_e = 0,5$, sendo que os valores das funções objetivos são maiores em relação ao exemplo 7, devido à restrição adicionada ao problema. Os sinais da variável de processo (PV) e da variável de controle (CV), obtidos na síntese, são mostrados nas Figs. B.11 e B.12, respectivamente.

Também em comparação aos resultados obtidos no exemplo 7, observa-se que as respostas transitórias são determinadas principalmente pela imposição do modelo de referência através da restrição imposta. A resposta desejada requer um esforço de controle menor do que o obtido no referido exemplo.

Devido as funções objetivo consideradas e a restrição com relação à um erro máximo em relação ao modelo de referência, observa-se um menor erro em relação ao modelo de referência, e uma menor atenuação do ruído de medição com menor esforço de controle no

sinal de saída do controlador (CV). Também ocorreu uma maior rejeição ao distúrbio, em relação ao controlador K_7 irrestrito, projetado anteriormente (exemplo 7). A fronteira Pareto estimada ficou menos definida (mais esparsa) e com sub-regiões distintas, para as mesmas cem iterações da rotina, o que é explicável pela restrição imposta, conforme a Fig. B.10, onde ainda pode ser notado o conflito de interesses entre as duas funções objetivo.

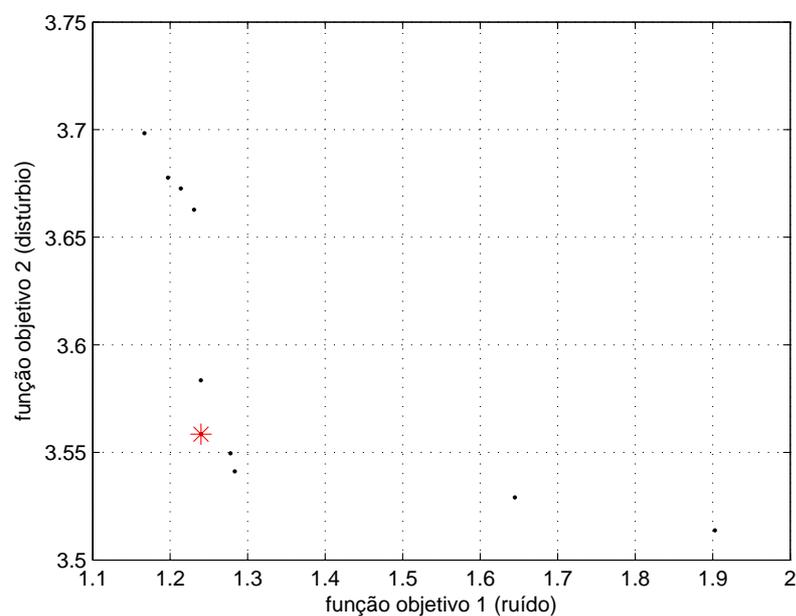


Figura B.10.: Fronteira Pareto estimada com o controlador K_9 escolhido pelo MDGR e marcado com *, com restrição em $\epsilon_e = 0,5$.

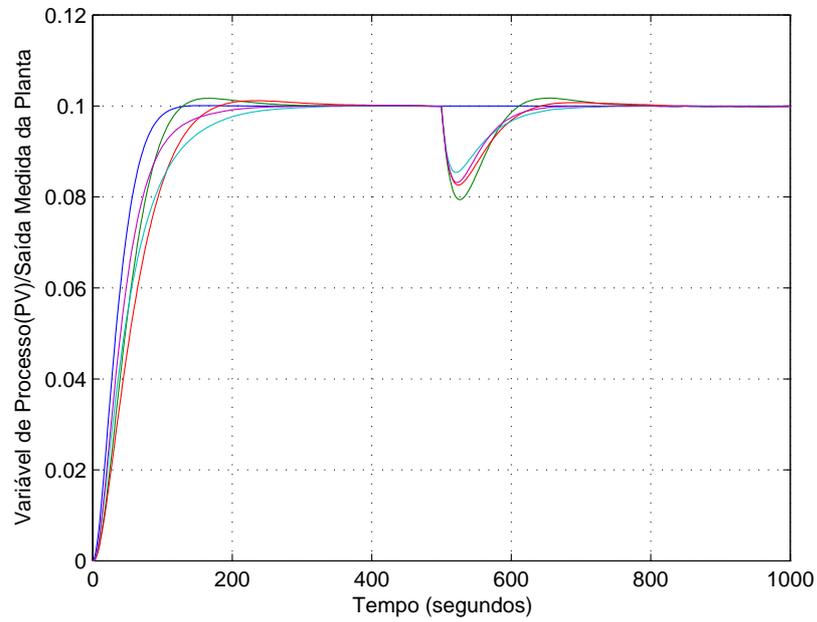


Figura B.11.: Resposta da PV do controlador K_9 robusto com restrição em $\epsilon_e = 0,5$.

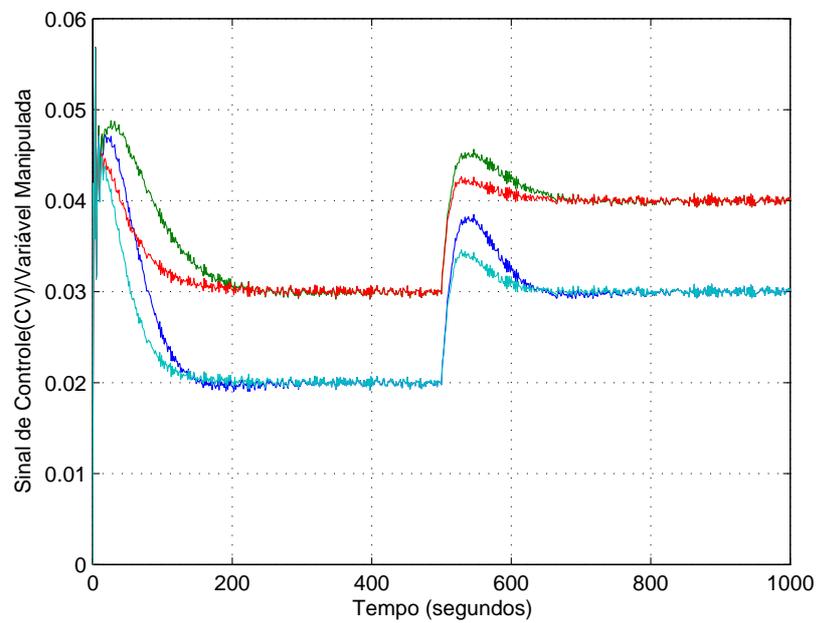


Figura B.12.: Resposta da CV do controlador K_9 robusto com restrição em $\epsilon_e = 0,5$.

Referências

- Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. & Peres, P. L. D. (2012). LMI relaxations for reduced-order robust \mathcal{H}_∞ control of continuous-time uncertain linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **57**(6): 1532–1537.
- Alt, G. H. & Lages, W. F. (2003). Controle em tempo real de sistemas dinâmicos através de redes IP, *Terceiro Congresso Internacional de Automação, Sistemas e Instrumentação*, São Paulo, SP, Brasil, pp. 1–27.
- Apkarian, P., Tuan, H. D. & Bernussou, J. (2001). Continuous-time analysis, eigenspectrum assignment and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced LMI characterizations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(12): 1941–1946.
- Araújo, M. R., GONÇALVES, E. N., LEITE, V. J. S. & PALHARES, R. M. (2010). Síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência baseada em formulações LMI, *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, Bonito, MS, Brasil, pp. 4056–4061.
- Bachur, W. E. G. (2011). *Síntese de controladores robustos com realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência*, Master's thesis, CEFET-MG, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Ramírez, J. A. & Batista, L. S. (2017). A multiobjective robust controller synthesis approach aided by multicriteria decision analysis, *Applied Soft Computing* **60**: 374–386.
- Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. & Leite, V. J. S. (2011). Multiobjective robust discrete dynamic output-feedback control synthesis based on closed-loop reference model, *IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design (CACSD)*, Denver, CO, USA, pp. 632–637.
- Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. & Mesquita, R. C. (2010a). Multiobjective robust dynamic output-feedback control synthesis

- based on reference model, *CDC 49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, GA, USA, pp. 2330–2335.
- Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. & Mesquita, R. C. (2010b). Síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência baseada em otimização no espaço de parâmetros do controlador, *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*, Bonito, RS, Brasil, pp. 4062–4067.
- Bhushan, N. & Rai, K. (2004). *Strategic Decision Making*, Applying the Analytic Hierarchy Process Series, 1st edn, Springer-Verlag London.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA.
- Calafiore, G. C. & Campi, M. C. (2006). The scenario approach to robust control design, *IEEE Transactions on Automatic Control* **51**(5): 742–753.
- Chankong, V. & Haimes, Y. Y. (2008). *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, Dover Books on Engineering, Dover Publications.
- Cheng, C. Y. (2006). *Autotuning of PID controllers: a Relay Feedback Approach.*, Springer-Verlag, London-England.
- Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A. & Vicino, A. (2005). Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust \mathcal{H}_∞ performance analysis, in P. Horacek, M. Simandl & P. Zitek (eds), *Preprints of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, pp. 457–462.
- Chilali, M. & Gahinet, P. (1996). \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- Coello Coello, C. A. (2000). Handling preferences in evolutionary multiobjective optimization: A survey, *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, Vol. 1, Piscataway, NJ, pp. 30–37.
- Crusius, C. A. R. & Trofino, A. (1999). Sufficient LMI conditions for output feedback control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(5): 1053–1057.
- Cruz, J. J. (2005). *Controle Robusto Multivariável: O Método LQG/LTR*, Edusp, São Paulo, SP, Brasil.

- Das, I. & Dennis, J. E. (1998). Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems, *SIAM Journal of Opt.* **8**(3): 631–657.
- de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. & Bernussou, J. (2002). Extended \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.
- de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F. & Peres, P. L. D. (2004a). \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions, *International Journal of Systems Science* **35**(5): 305–315.
- de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F. & Peres, P. L. D. (2004b). \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions, *Automatica* **40**: 305–315.
- Dong, J. & Yang, G.-H. (2013). Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties, *Automatica* **49**: 1821–1829.
- Dorf, R. C. & Bishop, R. H. (2010). *Sistemas de Controle Modernos*, 11 edn, Addison Wesley, São Paulo, SP, Brasil.
- Doyle, J. C. (1978). Guaranteed margins for LQG regulators, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-23**(4): 756–757.
- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. & Francis, B. A. (1989). State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems, *IEEE Transactions in Automatic Control* **34**(8): 831–847.
- Doyle, J., Packard, A. & Zhou, K. (1991). Review of LFTs, LMIs, and μ , *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, pp. 1227–1232.
- Ebihara, Y. & Hagiwara, T. (2004a). New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis, *Automatica* **40**: 2003–2009.
- Ebihara, Y. & Hagiwara, T. (2004b). On \mathcal{H}_∞ model reduction using LMIs, *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**(7): 1187–1191.
- Figueira, J., Greco, S. & Ehrgott, M. (eds) (2005a). *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Vol. 78 of *International Series in Operations Research & Management Science*, 1st edn, Springer-Verlag New York.

- Figueira, J., Greco, S. & Ehrgott, M. (eds) (2005b). *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Vol. 78 of *International Series in Operations Research & Management Science*, 1st edn, Springer-Verlag New York.
- Forman, E. H. (1990). Random indices for incomplete pairwise comparison matrices, *European Journal of Operational Research* **48**(1): 153–155.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. & Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB®*, The MATH WORKS Inc., Natick.
- Geromel, J. C., Egas, R. G. & Kawaoka, F. R. R. (2005). \mathcal{H}_∞ model reduction with application to flexible systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(3): 402–406.
- Geromel, J., Korogui, R. & Bernussou, J. (2007). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust output feedback control for continuous time polytopic systems, *IET Control Theory Appl.* **1**(5): 1541–1549.
- Gonçalves, E. N., Bachur, W. E. G., Palhares, R. M. & Takahashi, R. H. C. (2011). Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ reference model dynamic output-feedback control synthesis, *International Journal of Control* **84**(12): 2067–2080.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. & Chasin, A. N. V. (2009). Robust model reduction of uncertain systems maintaining uncertainty structure, *International Journal of Control* **82**(11): 2158–2168.
- Gonçalves, E. N. (2006). *Análise e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Domínios Politépicos de Incerteza*, PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. & Mesquita, R. C. (2006). Algorithm 860: SimpleS – an extension of Freudenthal’s simplex subdivision, *ACM Transactions on Mathematical Software* **32**(4): 609–621.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. & Mesquita, R. C. (2007). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ ε -guaranteed cost computation of uncertain linear systems, *IET Control Theory and Applications* **1**(1): 201–209.
- Grigoriadis, K. M. (1995). Optimal \mathcal{H}_∞ model reduction via linear matrix inequalities: Continuous- and discrete-time cases, *Systems & Control Letters* **26**(5): 321–333.
- He, Y., Wu, M. & She, J.-H. (2005). Improved bounded-real-lemma representation and \mathcal{H}_∞ control of systems with polytopic uncertainties, *IEEE Transactions on Circuits*

- and Systems - II: Express Briefs* **52**(7): 380–383.
- Helmersson, A. (1994). Model reduction using LMIs, *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, pp. 3217–3222.
- Marcos, D. M. & Gonçalves, E. N. (2016). Análise de estabilidade robusta pelo método de evolução diferencial, *XXI Congresso Brasileiro de Automática*, Vitória, ES, Brasil, pp. 1–6.
- Miettinen, K. (1999). *Nonlinear Multiobjective Optimization*, 1st edn, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Miller, D. & Davison, E. (1991). An adaptive controller which provides an arbitrarily good transient and steady-state response, *IEEE Transactions on Automatic Control* **36**(1): 68–81.
- Montaño, A. A., Coello, C. A. C. & Mezura-Montes, E. (2010). pMODE-LD+SS: An effective and efficient parallel differential evolution algorithm for multi-objective optimization, *Parallel Problem Solving from Nature (PPSN XI)*, Vol. 6239 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, Kraków, Poland, pp. 21–30.
- Moreira, H. R., Oliveira, R. C. L. F. & Peres, P. L. D. (2011). Robust \mathcal{H}_2 static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems, *Optimal Control Applications and Methods* **32**: 1–13.
- Munier, N. (2011). *A Strategy for Using Multicriteria Analysis in Decision-Making, A Guide for Simple and Complex Environmental Projects*, 1st edn, Springer Netherlands.
- Nicosia, S. & Tomei, P. (1984). Model reference adaptive control algorithms for industrial robots, *Automatica* **20**(5): 635–644.
- Ogata, K. (1987). *Discrete-Time Control Systems*, 1 edn, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Ogata, K. (2010). *Engenharia de Controle Moderno*, 5 edn, Pearson, São Paulo, SP, Brasil.
- Oliveira, R. C. L. F. & Peres, P. L. D. (2005). \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions, in P. Horacek, M. Simandl & P. Zitek (eds), *Preprints of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic,

- pp. 1–6.
- Palhares, R. M. & Gonçalves, E. N. (2007). Desigualdades matriciais lineares em controle, in L. A. Aguirre (ed.), *Enciclopédia de Automática*, 1 edn, Vol. 1, Edgard Blücher, São Paulo, Brasil, pp. 155–195.
- Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. & Peres, P. L. D. (1997). \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 guaranteed costs computation for uncertain linear systems, *International Journal of Systems Science* **28**(2): 183–188.
- Parreiras, R. O. & Vasconcelos, J. A. (2009). Decision making in multiobjective optimization aided by the multicriteria tournament decision method, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* **71**: e191–e198.
- Rodrigues, L. A., Gonçalves, E. N., Leite, V. J. S. & Palhares, R. M. (2009). Robust reference model control with LMI formulation, *Proceedings of the IASTED International Conference Control and Applications*, Cambridge, UK, pp. 127–132.
- Saaty, T. L. (1977). A scaling method for priorities in hierarchical structures, *Journal of Mathematical Psychology* **15**(3): 234–281.
- Saaty, T. L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York.
- Saaty, T. L. (2000). *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory With the Analytic Hierarchy Process*, Vol. 6 of *Analytic Hierarchy Process Series*, RWS Publications, Pittsburgh.
- Saaty, T. L. & Vargas, L. G. (1991). *Prediction, Projection and Forecasting*, Applications of the Analytic Hierarchy Process in Economics, Finance, Politics, Games and Sports, Springer.
- Saaty, T. L. & Vargas, L. G. (2012). *Models, Methods, Concepts & Applications of the Analytic Hierarchy Process*, Vol. 175 of *International Series in Operations Research & Management Science*, 2nd edn, Springer.
- Sadabadi, M. S. & Karimi, A. (2015). Fixed-order control of LTI systems subject to polytopic uncertainty via the concept of strictly positive realness, *American Control Conference*, Chicago, IL, USA, pp. 2882–2887.
- Scherer, C., Gahinet, P. & Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(7): 896–911.

- Schrijver, A. (1998). *Theory of Linear and Integer Programming*, Interscience series in discrete mathematics and optimization, 1st edn, John Wiley and Sons.
- Skelton, R. E., Iwasaki, T. & Grigoriadis, K. (1998). *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*, 1st edn, Taylor & Francis.
- Storn, R. M. & Price, K. V. (1997). Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *Journal of Global Optimization* **11**(4): 341–359.
- Takahashi, R. H. C. (2007). *Otimização Escalar e Vetorial*, Departamento de Matemática - UFMG, Belo Horizonte, MG , Brasil.
- Trofino, A., Coutinho, D. F. & Barbosa, K. A. (2005). Improved \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems, *Revista Controle & Automação* **16**(4): 427–434.
- Vandenberghe, L. & Boyd, S. (1996). Semidefinite programming, *SIAM Review* **38**(1): 49–95.
- Wie, B. & Bernstein, D. S. (1990). A benchmark problem to robust control design, *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, CA, USA, pp. 961–962.
- Xie, L., Lu, L., Zhang, D. & Zhang, H. (2004). Improved robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time systems, *Automatica* **40**: 873–880.
- Yaesh, I. & Shaked, U. (2009). Robust reduced-order output-feedback \mathcal{H}_∞ control, *6th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Haifa, Israel, pp. 155–160.
- Yousefi, A. & Lohmann, B. (2008). A parameterization of reduced stable models and controllers, *International Journal of Control* **81**(1): 146–155.
- Zaharie, D. & Pectu, D. (2003a). Adaptive Pareto differential evolution and its parallelization, in R. Wyrzykowski et al. (ed.), *International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics*, pp. 261–268.
- Zaharie, D. & Pectu, D. (2003b). Parallel implementation of multi-population differential evolution, *Concurrent information processing and computing* pp. 223–232.
- Zakovic, S. & Rustem, B. (2002). Semi-infinite programming and applications to minimax problems, *Annals of Operations Research, Kluwer Academic Publishers* **124**: 81–110.

- Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses, *IEEE Transaction on Automatic Control* **AC-26**(2): 301–320.
- Zhang, Q. & Li, H. (2007). MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition, *IEEE Transactions On Evolutionary Computation* **11**(6): 712–731.
- Zhou, K. & Doyle, J. C. (1998). *Essentials of Robust Control*, 1st edn, Prentice-Hall. Inc., New Jersey.
- Zhou, K., Doyle, J. C. & Glover, K. (1995). *Robust and optimal control*, Prentice-Hall. Inc., New Jersey.