TESE DE DOUTORADO Nº 284

CONTROLE EM REDE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES: UMA ABORDAGEM POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Tiago Gaiba de Oliveira

DATA DA DEFESA: 05/10/2018





Controle em Rede de Sistemas Não Lineares: Uma Abordagem por Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Tiago Gaiba de Oliveira

Tese de Doutorado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador:	Prof. Reinaldo Martinez Palhares, Dr.	
Co-orientadores:	Prof. Eduardo Nunes Gonçalves, Dr.	
	Prof. Víctor Costa Silva Campos, Dr.	

Belo Horizonte, 05 de Outubro de 2018

À minha familia e aos meus amigos.

Agradecimentos

Sempre que alcançamos um objetivo, devemos olhar pra trás e lembrar daquelas pessoas que nos ajudaram a chegar até aqui. Talvez não só pra trás, mas também para o céu. O primeiro agradecimento deste trabalho vai para aquele que me guia desde sempre, Deus. Eu não sei por que motivo o Senhor me escolheu, mas eu sou muito grato por esta oportunidade e por toda a proteção que me foi dada desde sempre.

Em segundo, aos meus pais Renato e Celeste, por incentivarem e apoiarem incondicionalmente a formação dos filhos e por vezes abrirem mão do própio sonho, para que os nossos fossem realizados. Aos meus irmãos pela amizade e incentivo. Ao Ricardo e Aline por sempre me apoiarem.

À minha esposa Priscilla, por estar sempre ao meu lado, pelo amor, paciência e por entender minha ausência. Espero um dia poder retribuir todo o bem que você me faz.

Ao Reinaldo, que foi o grande regente deste trabalho. Obrigado por me abrir as portas da UFMG, orientar e compartilhar um pouco do seu vasto conhecimento. Pelo apoio, paciência, competência e amizade.

Ao Eduardo, obrigado por me orientar tão bem no mestrado e pela indicação ao Reinaldo para poder cursar o doutorado.

Ao Víctor, que além de coorientador se tornou um grande amigo, que compartilhou tanto seu conhecimento científico quanto suas experiências já vividas. A UFMG ganhou um grande membro.

Aos professores Fernando e Eduardo Mazoni por compartilharem brilhantemente seus conhecimentos durante as disciplinas cursadas.

Aos membros da banca, Professores Leonardo Tôrres, Leonardo Mozelli, Renato Borges e Marcio Braga, que contribuiram (e irão contribuir) brilhantemente na construção desta tese, com experiencias que abrem novos horizontes para que este trabalho não pare por aqui.

Aos amigos do D!FCOM, Luiz, Pedro Coutinho, Heitor, Fulvia, Rosileide, Matheus, Rodrigo, Pedro Soares, Guilherme, Antoniel, Wagner, Ramon, Thomas por todo compartilhamento de conhecimento. Pelas conversas, que por muitas vezes de um conteúdo nada científico, mas que nos renovam para concluir esta caminhada. Aproveito para desejar sucesso na jornada de cada um de vocês.

Aos amigos que eu dividi morada durante este longo tempo, Rafael, Aécio e Jean, pela amizade e companheirismo.

Aos amigos que fiz durante estas incontáveis idas e vindas de Belo Horizonte para Ipatinga, Willian e Rafael, obrigado por todas as conversas, que tornaram nossas viagens muito mais agradáveis.

Aos membros do PPGEE pela prestatividade e boa vontade de resolver os problemas administrativos.

Por fim, agradeço ao apoio financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, fundamental para a realização deste trabalho.

Enfim, agradeço a todos que sempre torceram pelo meu sucesso e me ajudaram a construir este sonho.

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes" Marthin Luther King

Resumo

O foco principal deste trabalho é propor novas abordagens para o controle em rede de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), e levar em conta restrições típicas impostas pela rede, tais como retardo no tempo e limitação da largura de banda. A metodologia adotada para obter condições menos conservadoras segue o padrão dos trabalhos disponíveis na literatura, isto é, faz-se uma escolha apropriada de um Funcional de Lyapunov-Krasovskii (FLK) e aplicamse desigualdades integrais (ou somatórias) nos termos que surgem na derivada (ou diferença) do FLK. A partir da escolha apropriada do FLK, com termos que explicitam a presença do retardo (incerto) induzido pela rede, associada com o uso de novas desigualdades integrais (ou somatórias) para relaxar as parcelas relativas ao retardo no tempo, obtêm-se novas condições de análise e síntese de controladores. A metodologia proposta é avaliada tanto no contexto de sistemas a tempo contínuo quanto a tempo discreto. Para tratar possíveis limitações na capacidade de transmissão de dados ao longo da rede, faz-se uso de um esquema de acionamento por eventos que decide quando novos dados devem ser enviados para a atualização do controle. Um conjunto de experimentos numéricos são apresentados para ilustrarem as possíveis vantagens (e desvantagens) dos métodos propostos.

Palavras-chave: Sistemas de Controle em Rede, Retardo no Tempo, Funcional de Lyapunov-Krasovskii (FLK), Desigualdades Integrais (Somatórias), Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno.

Abstract

The main focus of this work is to propose new approaches for the networked control for classes of nonlinear systems described by Takagi-Sugeno (T–S) fuzzy models, taking into account typical constraints imposed by the network, as networked induced (uncertain) time delay and bandwidth limitation. The methodology adopted to obtain less conservative conditions follows the standard results available, focusing on the appropriate choice of Lyapunov-Krasovskii Functional (FLK) and the application of integral (or summation) inequalities in the terms that derive in the derivative (or difference) of the FLK. With the appropriate choice of FLK, with terms that explain the presence of network-induced (uncertain) delay, associated with the use of new integral (or summation) inequalities to relax the time-delay terms, new analysis and synthesis conditions are obtained. The proposed methodology is evaluated both in the context of continuous time and discrete time systems. In order to deal with possible limitations on bandwidth over the network, an event-triggered scheme is used, which decides when or not, a new data will be sent for the control. Some numerical examples are presented to illustrate the possible advantages (and disadvantages) of the proposed methods.

Keywords: Networked Control Systems, Time Delay, Lyapunov-Krasovskii Functional, Integral (Summation) Inequalities, Takagi-Sugeno Fuzzy Models.

Lista de Figuras

1.1	Estruturas de controle em malha fechada	2
2.1	Configuração do sistema de controle com acionamento por evento	11
2.2	Configurações de geradores de evento	12
2.3	Sinais de referência e distúrbio	21
2.4	Atraso variante no tempo	22
2.5	Erro de seguimento de referência ($\tau_M = 0.09 \text{ s}$)	22
2.6	Erro de seguimento de referência ($\tau_M = 0,119$ s)	24
2.7	Erro de seguimento de referência ($\tau_M = 0,126 \text{ s}$)	25
2.8	Erro de seguimento de referência ($\tau_M = 0,137$ s)	26
2.9	Erro de seguimento de referência ($\tau_M = 0,155$ s)	26
3.1	Atraso variante no tempo com amplitude pseudo-aleatória	35
3.2	Resposta de seguimento de referência, $\tau_m = 0.03s \text{ e } \tau_M = 0.09s. \dots$	36
3.3	Erro de seguimento de referência, $\tau_m = 0.03s$ e $\tau_M = 0.09s$	36
3.4	Resposta de Seguimento de Referência, $\tau_M = 0,16s.$	38
3.5	Gerador de eventos, (70)	39
3.6	Gerador de Eventos, Teorema 2	39
3.7	Resposta de rastreamento de saída, $\tau_m = 0.03s$ e $\tau_M = 0.09s$	41
3.8	Erro de rastreamento de saída, $\tau_m = 0.03s$ e $\tau_M = 0.09s$	41
3.9	Resposta de Seguimento de Referência, $\tau_M = 0,12s$	42
3.10	Erro de Seguimento de Referência, $\tau_M = 0,12s.$	43
3.11	Gerador de eventos, (70)	44

3.12	Gerador de eventos, Nota 1	44
3.13	Sinais de referência e distúrbio	46
3.14	Erro de eeguimento de referência, $\tau_m = 0,03s$ e $\tau_M = 0,09s$	47
3.15	Resposta de seguimento de referência com ação integral, $\tau_M = 0,09s.$	48
3.16	Erro de seguimento de referência com ação integral, $\tau_M = 0,09s.$	48
3.17	Resposta de Seguimento de Referência com Ação Integradora, $\tau_M = 0,105s$	50
3.18	Erro de Seguimento de Referência com Ação Integradora, $\tau_M = 0,105s$.	50
4.1	Sinais de referência e distúrbio	65
4.2	Seguimento de referência.	66
4.3	Erro de seguimento de referência.	67
4.4	Seguimento de referência.	68
4.5	Erro de seguimento de referência.	68
4.6	Gerador de eventos - Teorema 3: algoritmo do cone complementar	69
4.7	Gerador de eventos - (35): algoritmo do cone complementar	70
4.8	Percentual de pacotes enviados - Teorema 3: algoritmo do cone comple-	
	mentar	71
4.9	Percentual de pacotes enviados - (35): algoritmo do Cone Complementar.	71
5.1	Atraso variante no tempo com amplitude limitada.	80
5.2	Evolução do estado $x_1(\mathbf{k})$, com $\tau_M = 5$	81
5.3	Evolução do estado $x_2(\mathbf{k})$, com $\tau_M = 5$	82
5.4	Evolução do estado $x_1(\mathbf{k})$, com τ_M = 7	83
5.5	Evolução do estado $x_2(\mathbf{k})$, com $\tau_M = 7$	83
5.6	Evolução do estado $x_1(\mathbf{k})$, com $\tau_M = 10$.	84
5.7	Evolução do estado $x_2(\mathbf{k})$, com $\tau_M = 17$.	84
5.8	Gerador de eventos, configuração (4.4).	85
5.9	Gerador de eventos, configuração (4.5).	86
5.10	Gerador de eventos, configuração (4.6).	86
5.11	Gerador de eventos, configuração (4.4).	87
5.12	Gerador de eventos, configuração (4.5).	88

5.13	Gerador de eventos, configuração (4.6).	88
5.14	Evolução do estado com diferentes configurações de geradores de eventos.	89

Lista de Tabelas

2.1	Ganhos dos controladores	21
2.2	Índice de desempenho ($\tau_M = 0.09 \text{ s}$)	23
2.3	Índice de desempenho (τ_M = 0,119 s)	24
2.4	Índice de desempenho (τ_M = 0,126 s)	25
2.5	Índice de Desempenho (τ_M = 0,137 s)	25
2.6	Atraso máximo, τ_M	27
3.1	Ganhos dos Controladores Fuzzy	34
3.2	Índice de Desempenho \mathcal{H}_{∞}	37
3.3	Atraso máximo, τ_M , obtido considerando $\tau_m = 0.03s \text{ e } \gamma = 0.48$	37
3.4	Esquema de Acionamento por Eventos	38
3.5	Atraso máximo, τ_M	40
3.6	Ganhos do Controlador Linear	40
3.7	Esquema de Acionamento por Eventos.	43
3.8	Índice de desempenho \mathcal{H}_{∞}	45
3.9	Atraso máximo no tempo, τ_M , obtido considerando $\tau_m = 0.03s$ e $\gamma = 0.72$.	45
3.10	Atraso máximo, τ_M	45
3.11	Ganhos do controlador com ação integral	47
3.12	Índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} com Ação Integral. \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	49
3.13	Atraso máximo, τ_M , considerando $\tau_m = 0.03s \text{ e } \gamma = 0.48. \dots$	49
3.14	Atraso máximo, τ_M	51
4.1	Ganhos dos controladores a tempo discreto	66
4.2	Norma \mathcal{H}_{∞}	66

4.3	Esquema de Acionamento por Eventos	69
5.1	Ganhos dos Controladores Discretos	81
5.2	Esquema de Acionamento por Eventos.	85

Sumário

1	Intr	Introdução		
	1.1	Motivação	6	
	1.2	Objetivos	7	
		1.2.1 Objetivos Específicos	7	
	1.3	Estrutura do Texto	7	
2	Met	odologia de Projeto para o Caso Contínuo no Tempo	9	
	2.1	Formulação do Problema de Controle	9	
	2.2	Esquema de Amostragem por Eventos	10	
	2.3	Controlador Fuzzy	13	
	2.4	Sistema em Malha-Fechada	14	
	2.5	Exemplo Numérico	19	
	2.6	Conclusão	27	
3	Proj	eto de Controladores Através de Funções de Lyapunov–Krasovskii Fuzzy	28	
	3.1	Propriedades	28	
	3.2	Exemplo Numérico	34	
	3.3	Substituição de Termos do Funcional de Lyapunov	51	
	3.4	Funções de Pertinência com Memória	52	
	3.5	Conclusão	55	
4	Met	odologia de Projeto para o Caso a Tempo Discreto	56	
	4.1	Formulação do Problema de Controle	56	
	4.2	Exemplo Numérico	63	

SI	IMÁRIO
~ ~	1,11,11,11,0

	4.3	Conclusão	72
5	Con	dições Convexas de Síntese de Controladores a Tempo Discreto	73
	5.1	Propriedades	73
	5.2	Exemplo Numérico	79
	5.3	Conclusão	89
6	Con	clusões	90
	6.1	Propostas para Trabalhos Futuros	90
	6.2	Produções Relacionadas ao Trabalho	91
Re	eferêr	ncias Bibliográficas	91

Introdução

A maioria dos sistemas de controle são projetados assumindo-se uma perfeita comunicação entre os canais que conectam os elementos da malha de controle. Essa perfeição em muitos casos é considerada devido ao fato de que os elementos da malha de controle estão próximos entre si e são conectados através de um meio físico. Esta arquitetura que conecta os componentes do sistema de controle através de um meio físico considerado perfeito é comumente conhecida como arquitetura ponto-a-ponto. A Figura 1.1(a) apresenta uma estrutura de controle ponto-a-ponto. Com a evolução da tecnologia de redes de comunicação, principalmente para casos em que componentes da malha de controle estão espacialmente distribuídos, a arquitetura ponto-a-ponto vem sendo substituída por uma arquitetura que conecta os componentes da malha através de uma rede de comunicação comum a todos os elementos, dando origem aos sistemas de controle em rede (NCS, do inglês Networked Control Systems). Baixo custo de manutenção, alta flexibilidade, facilidade de manutenção e instalação são vantagens que podem ser citadas quando se opta por uma arquitetura deste tipo. Contudo, ao se projetar um sistema de controle em rede, deve-se levar em consideração as características do meio físico onde circulam as informações, pois a rede influencia na dinâmica do sistema. A Figura 1.1(b) apresenta uma estrutura de controle em rede, sendo a linha em azul referente ao trecho em que os dados são transmitidos pela rede e a linha preta referente ao trecho em que os dados são transmitidos por um link dedicado, considerado perfeito. Podem ser citadas as seguintes características do meio físico da rede:

• Atraso ou Retardo no tempo: a informação leva um certo tempo para chegar ao seu destino, por isto deve ser levado em consideração um atraso induzido pela

rede;

- Perda de pacotes: no caso de protocolos de redes não determinísticos, podem ocorrer perdas de informações durante a transmissão, ou seja, a informação enviada pode não chegar ao seu destino;
- Largura de banda: toda rede possui uma limitação na capacidade de transmissão dos dados, restringindo a quantidade de informações que trafegam por ela.

Uma estrutura de controle ponto-a-ponto considera que a comunicação entre seus componentes é supostamente ideal, ou seja, nenhuma das restrições citadas acima interfere na transmissão dos dados. Entretanto, qualquer modificação no sistema requer um reprojeto do seu sistema.



Figura 1.1: Estruturas de controle em malha fechada.

O atraso no transporte de uma informação ocorre principalmente quando a distância entre o ponto de envio e de recebimento da informação é grande. Este atraso pode ser tratado como constante ou variante no tempo. Já a perda de pacotes ocorre com maior frequência em redes não cabeadas (conhecidas também como redes *wireless*, do inglês, sem fio), isto porque a transmissão de informação depende das condições do local em que está inserida. Chuva, névoa, fumaça, paredes podem dificultar a transmissão de informação nestes casos. Toda rede, seja ela cabeada ou não, possui uma limitação de transmissão de dados que pode ser interpretada como uma limitação física dos componentes que compõem o sistema, de maneira que nenhuma rede é capaz de transmitir uma quantidade infinita de dados ao mesmo tempo. Estas características do meio físico que foram citadas anteriormente podem ser tratadas como restrições do sistema, e os controladores devem ser projetados levando em consideração as mesmas.

Para uma introdução sobre o tema, os trabalhos de (74; 15; 71; 65; 44; 45; 9; 73; 14) apresentam uma visão geral a respeito de sistemas de controle em rede, abordando diversos aspectos teóricos e práticos, tais como amostragem, retardo induzido pela rede e perda de pacotes. Também são abordados aspectos relacionados a modelagem do sistema de controle em rede e suas restrições, esquema de amostragem por eventos, estabilidade, síntese de controladores, filtragem e algumas barreiras a serem vencidas nesse contexto, tanto em um domínio contínuo quanto discreto no tempo.

Um vasto número de trabalhos a respeito da modelagem das restrições induzidas pela rede pode ser encontrado na literatura. A restrição do retardo induzido pela rede pode ser modelada através de uma representação no espaço de estados com atraso, conforme pode ser visto no trabalho de (30; 54) considerando um sistema linear, em (29; 72; 23; 34) considerando um sistema fuzzy T–S, em (64; 5) considerando um sistema com incerteza politópica e em (62; 46) considerando um sistema com saltos Markovianos. A perda de pacotes é frequentemente modelada como um processo estocástico, como em (43; 63; 66) em que é considerada uma função de densidade de probabilidade de Bernoulli.

Usualmente, os sistemas de controle em rede operam usando um método de acionamento periódico. No caso, um intervalo fixo de amostragem deve ser selecionado de maneira a garantir um índice de desempenho desejado sob condições adversas tais como distúrbios, incertezas ou atraso no tempo. No entanto, em casos de protocolos de rede que possuam largura de banda baixa ou restrita, torna-se interessante investigar alternativas para reduzir o tráfego de dados pela rede, evitando a saturação da capacidade de transmissão da rede. De maneira a atenuar este problema, métodos de acionamento periódico vêm sendo substituídos por métodos de acionamento por eventos. Esta classe de métodos fornece uma maneira de determinar quando uma amostragem deve ser realizada, o que garante que apenas informações "necessárias" sejam enviadas para o controlador, o que resulta na redução de dados transmitidos pela rede, economizando largura de banda. Os trabalhos de (75; 79; 61; 17) apresentam uma revisão geral a respeito de controle baseado em eventos focado em sistemas de controle em rede. Estendendo o tema, os trabalhos de (52; 59; 4; 33) investigam o problema de controle \mathcal{H}_{∞} em rede baseado em eventos. (2; 78) apresentam uma discussão entre os métodos de acionamento por evento e acionamento periódico do ponto de vista da teoria de controle. Os trabalhos de (39; 3; 1) apresentam um esquema de amostragem autoacionado para sistemas de controle em rede considerando perdas de pacotes e atraso induzidos pela rede. O esquema de amostragem auto-acionado determina dinâmicamente o instante de amostragem de acordo com o pacote transmitido, o desempenho de controle desejado, o número permitido de perdas de pacotes e atrasos de comunicação consecutivos. Com isto, o intervalo de amostragem pode ser ajustado de maneira a se adaptar a uma determinada situação. (42; 13) apresentam estudos comparativos entre o controle baseado em acionamento por eventos e auto-acionado.

O estudo da teoria de estabilidade de Lyapunov é amplamente abordado quando se deseja obter relaxações para o retardo no tempo. A escolha apropriada dos termos do Funcional de Lyapunov-Krasovskii, que carregam informações a respeito do retardo no tempo, pode nos auxiliar a obter condições menos conservadoras para análise e síntese de controladores. O trabalho de (36) aborda a análise de estabilidade e síntese de controladores \mathcal{H}_{∞} para sistemas contínuos no tempo descentralizados baseados no funcional de Lyapunov–Krasovskii fuzzy. O trabalho de (60) faz o estudo da estabilização local de sistemas para sistemas fuzzy T–S com retardo no tempo. Num contexto discreto no tempo, em (28), são desenvolvidas condições relaxadas para síntese de controladores para sistemas T–S fuzzy baseados no funcional de Lyapunov fuzzy. Em (12) estuda-se a análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas fuzzy T–S com retardo baseados na escolha de um funcional de Lyapunov-Krasovskii fuzzy.

Com relação especificamente à análise de estabilidade para sistemas com retardo no tempo, um vasto número de trabalhos presentes na literatura apresentam novas estratégias para obter condições de estabilidade menos conservadoras expressas em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, LMIs), tanto num contexto contínuo quanto discreto no tempo. Uma possível classe de estrátegia menos conservadora, que permite robustificar o desempenho de sistemas frente à presença de retardo no tempo (possivelmente variante no tempo ou mesmo incerto, mas limitado), é baseada em desigualdades integrais. Exemplos de desigualdades integrais são dadas pela desigualdade de Jensen ou, mais recentemente, a desigualdade de Wirtinger. Em (11; 77) para o caso contínuo e em (22) para o caso discreto no tempo, a desigualdade de Jensen é utilizada para obter condições de estabilidade menos conservadoras para sistemas com retardo no tempo. Em se tratando da desigualdade de Wirtinger, condições de estabilidade menos conservadoras para sistemas com retardo no tempo são apresentados em (48; 50; 37) para sistemas a tempo contínuo e (51; 16; 32) para sistemas a tempo discreto. (49) apresentam uma análise do grau de conservadorismo entre desigualdades integrais de Jensen e de Wirtinger. Vale ressaltar que novas extensões de desigualdades como as de Jensen e Wirtinger podem ser encontradas na literatura como, por exemplo, uma nova classe de desigualdades integrais para funções quadráticas por meio da adição de funções auxiliares, proposta por (38) para o caso contínuo no tempo e em (16) para o caso discreto no tempo.

No domínio contínuo no tempo, os trabalhos de (57; 76; 7; 68; 53) investigam o problema de análise de estabilidade de modelos fuzzy T-S com retardo no tempo. No domínio discreto, os trabalhos de (27; 26) tratam sobre o mesmo tema. (55), (8) e (25) apresentam condições de análise de estabilidade menos conservadoras para sistemas lineares em malha fechada com retardo no tempo, sujeitos a incertezas paramétricas. As condições de estabilidade obtidas foram aplicadas em um problema de síntese de controladores robustos para sistemas de controle em rede, considerando os atrasos induzidos pela rede e perdas de pacotes. Em (56), uma nova condição de estabilidade para sistemas com atraso é obtida em termos de LMIs, através da escolha apropriada de um funcional de Lyapunov e utilizando desigualdades integrais.

(52) investiga o problema de controle \mathcal{H}_{∞} para sistemas de controle em rede com os estados e as entradas sujeitos a quantizações. Em (35; 19; 47) é abordado o controle $\mathcal{H}_{\infty}/\mathcal{H}_2$ em rede, sendo a restrição do retardo induzido pela rede modelado de diferentes maneiras. (67; 20) apresentam o problema de síntese de controladores \mathcal{H}_{∞} para seguimento de referência para sistemas lineares de controle em rede utilizando método de acionamento por evento. (70; 21; 58) apresentam o problema de síntese de controladores \mathcal{H}_{∞} para seguimento de referência para sistemas fuzzy T–S em rede utilizando método de acionamento por evento.

Quando se trata de sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy T–S, com o controlador não-linear, há um assincronismo entre as variáveis premissas do controlador e da planta. Os trabalhos de (24; 41) apresentam técnicas de relaxação para lidar com o problema de assincronismo das variáveis premissas.

1.1 Motivação

Motiva este trabalho o estudo da classe de funções de Lyapunov–Krasovskii fuzzy em conjunto com novas desigualdades integrais (ou somatórias, no caso de sistemas a tempo discreto), buscando obter soluções menos conservadoras para restrições induzidas pela rede, a saber: retardo no tempo e restrição sobre demanda da banda de transmissão. Para isto, este trabalho concentra-se principalmente em dois pontos. O primeiro deles é o estudo das funções de Lyapunov-Krasovskii fuzzy, cuja principal peculiaridade está no surgimento da derivada (ou diferença) das funções de pertinência quando se toma a derivada (ou diferença) do funcional de Lyapunov-Krasovskii fuzzy ao longo das trajetórias. Lembrando que, neste caso, o funcional fuzzy depende da função de pertinência, que por sua vez depende das variáveis premissas e do tempo. Nota-se que há um gama de manipulações disponíveis na literatura que auxiliam na formulação de condições de análise e síntese de controladores para sistemas fuzzy. O segundo ponto é investigar novas desigualdades integrais (ou somatórias) que são aplicadas nos termos que surgem após tomar a derivada (ou a diferença) do FLK fuzzy. A maioria dos trabalhos disponíveis na literatura, no geral, fazem uso de classes de funções de Lyapunov-Krasovskii mais simples, ou de desigualdades integrais (ou somatórias) mais simples (a desigualdade de Jensen).

Também motiva este trabalho, investigar quais dos pontos mencionados acima são mais eficientes na redução de conservadorismo no problema de controle em rede. Por exemplo, é mais interessante utilizar uma classe FLK com termos mais complexos, que carregam informações a respeito do retardo no tempo ou é mais interessante utilizar desigualdades integrais (ou somatórias) mais elaboradas para relaxar os limites máximos e mínimos de atraso obtidos através de uma desigualdade mais conservadora? Combinações entre elas também são bem-vindas.

1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é obter condições novas menos conservadoras para a síntese de controladores para sistemas não lineares de controle em rede. A descrição para sistemas não lineares a ser considerada neste trabalho envolve modelos fuzzy T–S e a síntese de controladores é baseada em técnicas de otimização convexa e novas relaxações via desigualdades matriciais lineares.

1.2.1 Objetivos Específicos

- Obter um modelo fuzzy T–S adequado para o sistema não linear a ser controlado em rede;
- Selecionar funcionais de Lyapunov-Krasovskii apropriados;
- Selecionar desigualdades integrais apropriadas, limitantes superiores para as parcelas associadas ao atraso no tempo no FLK, e avaliar o seu impacto na estabilidade e controle;
- Selecionar uma proposta adequada para o controle em rede acionado por eventos;
- Analisar os resultados obtidos e as metodologias para análise de estabilidade e síntese de controle, comparando com abordagens recentes na literatura;
- Criticar e avaliar os resultados obtidos sob a luz das abordagens propostas.

1.3 Estrutura do Texto

Este texto está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 foram apresentadas a motivação e a justificativa do trabalho. O Capítulo 2 apresenta o estado da arte das

condições recentes para o problema de controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno controlados via rede e considerando um esquema de acionamento por evento. O Capítulo 3 apresenta a introdução do funcional de Lyapunov fuzzy para resolver o problema do capítulo anterior. O Capítulo 4 aborda o funcional de Lyapunov–Krasovskii discreto para resolver o problema de rastreamento de referência. O Capítulo 5 apresenta uma nova formulação do funcional de Lyapunov–Krasovskii discreto, com o intuito de obter uma formulação convexa direta para o problema de síntese de controladores discretos. O Capítulo 6 apresenta conclusões, propostas para trabalhos futuros e lista as publicações relacionadas ao trabalho.

Metodologia de Projeto para o Caso Contínuo no Tempo

Este capítulo apresenta a metodologia para síntese de controladores para sistemas não lineares, representados por modelos fuzzy T–S, em um contexto contínuo no tempo. Também é introduzido o esquema de acionamento por evento, que restringe o número de informações que são enviadas pela rede, visando a economia da largura de banda. Condições menos conservadoras para síntese de controladores na forma de LMIs são obtidas. Para isto, novas desigualdades integrais dísponíveis na literatura foram utilizadas.

2.1 Formulação do Problema de Controle

Um modelo fuzzy T–S é composto por um conjunto de regras *se-então* que estabelecem que para um conjunto de variáveis premissas, a dinâmica de um modelo pode ser representada por somatório fuzzy de sistemas lineares. Considere um sistema descrito da seguinte maneira:

Regra da Planta: Se $\theta_1(t) \notin M_{i1}$, $\theta_2(t) \notin M_{i2} \in ... \in \theta_g(t) \notin M_{ig}$, então:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + E_i w(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}$$
(2.1)

onde $i = 1, 2, ..., r \in r$ representa o número de regras *se-então*. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entradas de controle, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de

entradas exógenas e $y(t) \in \mathbb{R}^r$ o vetor de saídas controladas. Sejam θ_j (j = 1, 2, ..., g) as variáveis premissas, $\theta(t) = [\theta_1(t), \theta_2(t), ..., \theta_g(t)] \in \mathbb{R}^g$ o vetor formado pelo empilhamento das variáveis premissas e $M_{ij}(i = 1, 2, ..., r)(j = 1, 2, ..., g)$ os conjuntos fuzzy. Considera-se que as matrizes A_i , B_i , C_i e E_i do sistema contínuo no tempo possuem dimensão apropriada e que as variáveis premissas são conhecidas.

O modelo fuzzy T–S é descrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\theta(t))[A_i x(t) + B_i u(t) + E_i w(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\theta(t))[C_i x(t)] \end{cases}$$
(2.2)

Por simplicidade, usa-se μ_i como uma notação compacta de $\mu_i(\theta(t))$. As funções de pertinência satisfazem as seguintes propriedades:

$$\mu_i \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^r \mu_i = 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{\mu}_i = 0.$$
(2.3)

É importante notar que as propriedades acima são iguais às propriedades de representação de um sistema linear com incerteza politópica, e diversos resultados de controle de sistemas lineares sujeito à incertezas politópicas podem ser adaptados para o controle de sistemas não lineares.

2.2 Esquema de Amostragem por Eventos

Neste trabalho foi adotado o esquema de acionamento por evento (EAE). Este esquema é introduzido de maneira a decidir quando um dado amostrado pelo sensor deve ser transmitido pela rede. Um melhor detalhamento a respeito das diferentes configurações de geradores de eventos é apresentado na próxima seção.

A Figura 2.1 mostra a configuração de um sistema de controle em rede em malhafechada que foi adotada neste trabalho.

Existem diferentes configurações de geradores de eventos disponíveis na literatura. Em todos eles, o instante inicial de acionamento é definido como 0, ou seja, $t_k h = 0$,



Figura 2.1: Configuração do sistema de controle com acionamento por evento.

quando k = 0. Seja $t_k \in \mathbb{R}$ os instantes de acionamento e h o período de amostragem. O próximo instante de amostragem é definido de acordo com a configuração adotada, da seguinte forma:

$$t_{k+1} = \inf\left\{t > t_k | \left\| W^{\frac{1}{2}} \left[x(t) - x(t_k) \right] \right\| - \sigma \left\| W^{\frac{1}{2}} x(t_k) \right\| > 0 \right\}, \forall k \in \mathbb{N}$$
(2.4)

$$t_{k+1} = \inf\left\{t > t_k | \left\| W^{\frac{1}{2}} \left[x(t) - x(t_k) \right] \right\| - \sigma > 0 \right\}, \forall k \in \mathbb{N}$$
(2.5)

$$t_{k+1} = \inf\left\{t > t_k | \left\| W^{\frac{1}{2}} \left[x(t) - x(t_k) \right] \right\| - \sigma \left\| W^{\frac{1}{2}} x(t) \right\| > 0 \right\}, \forall k \in \mathbb{N}$$
(2.6)

As figuras 2.2(a), 2.2(b) e 2.2(c) apresentam o detalhe de cada gerador de eventos, descritos pelas expressões acima:





Figura 2.2: Configurações de geradores de evento.

Os parâmetros σ (σ > 0) e W (W > 0) ajudam adeterminam com qual frequência e quantos dados amostrados devem ser transmitidos. Em (67), (40), (20) o parâmetro W e os ganhos do controlador são determinados em termos de LMI para um dado valor de σ . Note que ao considerar o sensor e o gerador de eventos como um conjunto, este pode ser interpretado físicamente como sendo um *smart sensor*, sendo que a amostragem ocorre quando a condição de chaveamento é satisfeita, e não pelo período de amostragem do sensor.

2.3 Controlador Fuzzy

Devido principalmente aos atrasos induzidos pela rede, o sistema fuzzy e o controlador fuzzy não compartilham das mesmas premissas. Isto implica que o sistema fuzzy e o controlador fuzzy operam de maneira assíncrona. A regra de controle do controlador por realimentação de estados é definida da seguinte maneira:

Se $\theta_1(t_k)$ é M_{j1} e $\theta_2(t_k)$ é M_{j2} e ... e $\theta_g(t_k)$ é M_{jg} , então:

$$u(t) = F_j x(t_k) \tag{2.7}$$

Sendo assim, o controlador fuzzy é definido da seguinte forma:

$$u(t) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j(\theta(t_k)) \left[F_j x(t_k) \right], \ t \in [t_k + \tau_{tk}, t_{k+1} + \tau_{tk+1}]$$
(2.8)

em que $\tau_{tk} = \tau_{tk}^{sc} + \tau_{tk}^{ca}$, sendo τ_{tk}^{sc} o atraso correspondente ao tempo que a informação leva para percorrer o canal de comunicação entre o sistema e o controlador e τ_{tk}^{ca} o atraso correspondente ao tempo que a informação leva para percorrer entre o controlador e o atuador. Outros atrasos, tais como o tempo que o computador leva para calcular os ganhos do controlador são ignorados neste caso. Neste trabalho τ_{tk} é considerado variante no tempo, descrito como $\tau(t)$, da seguinte forma:

$$0 < \tau_m \le \tau(t) \le \tau_M < \infty \tag{2.9}$$

sendo τ_m e τ_M os atrasos no tempo mínimos e máximos induzidos pela rede, respectivamente.

Note que em (70) o controlador fuzzy é projetado para o seguimento de referência tal que a saída do sistema acompanhe a saída de um modelo de referência da maneira mais próxima possível levando em consideração os limites de desvio das funções de pertinência assíncronas normalizadas, que são descritos por:

$$\left|\mu_i(\theta(t)) - \mu_i(\theta(t_k))\right| \le \delta_i, \ i = 1, 2, \dots, r, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$(2.10)$$

sendo δ_i constantes positivas dadas.

2.4 Sistema em Malha-Fechada

Considerando o modelo da planta não linear, Eq. (2.2) o controlador fuzzy, Eq. (2.8), e o esquema de amostragem por eventos, o sistema em malha-fechada com assincronismo entre as premissas da planta e do controlador pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i}(\theta(t)) \mu_{j}(\theta(t_{k})) \left[A_{i}x(t) + B_{i}F_{j}x(t-\tau(t)) - B_{i}F_{j}e(t-\tau(t)) + E_{i}\omega(t) \right] \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i}(\theta(t)) \left[C_{i}x(t) \right] \end{cases}$$
(2.11)

sendo $e(t - \tau(t)) = x(t - \tau(t)) - x(t_k)$ o erro entre a amostragem atual e a última amostra transmitida, satisfazendo:

$$\left\| W^{\frac{1}{2}} \left[e(t - \tau(t)) \right] \right\| \le \sigma \left\| W^{\frac{1}{2}} \left[x(t - \tau(t)) - e(t - \tau(t)) \right] \right\|.$$
(2.12)

De maneira a obter condições menos conservadoras para as restrições impostas pela rede, este trabalho faz o uso do seguinte Lema.

Lema 1. [Ver (38)] Para uma matriz definida positiva R > 0, e uma função diferenciável $x(\alpha) \in [a,b]$, as seguintes desigualdades são válidas:

$$\int_{a}^{b} \dot{x}^{T}(\alpha) R \dot{x}(\alpha) d\alpha \geq \frac{1}{b-a} \Omega_{1}^{T} R \Omega_{1} + \frac{3}{b-a} \Omega_{2}^{T} R \Omega_{2} + \frac{6}{b-a} \Omega_{3}^{T} R \Omega_{3}, \qquad (2.13)$$

$$\int_{a}^{b} \int_{\beta}^{b} \dot{x}^{T}(\alpha) R \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta \geq 2\Omega_{4}^{T} R \Omega_{4} + 4\Omega_{5}^{T} R \Omega_{5}, \qquad (2.14)$$

sendo

$$\Omega_1 = x(b) - x(a), \tag{2.15}$$

$$\Omega_2 = x(b) + x(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b x(\alpha) d\alpha,$$
(2.16)

$$\Omega_3 = x(b) - x(a) + \frac{6}{b-a} \int_a^b x(\alpha) d\alpha - \frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_\beta^b x(\alpha) d\alpha d\beta,$$
(2.17)

$$\Omega_4 = x(b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b x(\alpha) d\alpha,$$
(2.18)

$$\Omega_5 = x(b) + \frac{2}{b-a} \int_a^b x(\alpha) d\alpha - \frac{6}{(b-a)^2} \int_a^b \int_\beta^b x(\alpha) d\alpha d\beta.$$
(2.19)

É interessante registrar que a desigualdade (2.13) engloba a desigualdade de Wirtinger, que por sua vez engloba a desigualdade de Jensen. A desigualdade apresentada pelo Lema 1 adiciona um termo à desigualdade de Wirtinger, chamado de termo auxiliar, com o intuito relaxar as desigualdades anteriores.

Posto isto, considere o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato:

$$V(t) = \sum_{i=0}^{7} V_i(x(t)), \qquad (2.20)$$

$$V_0(t) = \left[\int_{t-\tau_m}^{t} x(s)ds\right]^T \bar{P}\left[\int_{t-\tau_m}^{t} x(s)ds\right], \qquad (2.20)$$

$$V_1(t) = \int_{t-\tau_m}^{t} x^T(s)Q_1x(s)ds, \qquad V_2(t) = \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_m} x^T(s)Q_2x(s)ds, \qquad V_3(t) = \tau_m \int_{-\tau_m}^{0} \int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds,$$

$$\begin{aligned} V_4(t) &= (\tau_M - \tau_m) \int_{-\tau_M}^{-\tau_m} \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta) R_2 \dot{x}(\theta) d\theta ds, \\ V_5(t) &= (\tau_M - \tau(t)) \int_{t-\bar{\tau}(t)}^t \dot{x}^T(\theta) R_3 \dot{x}(\theta) d\theta, \\ V_6(t) &= (\tau_M - \tau(t)) \left[(x(t) - x(t - \tau(t)))^T R_4 (x(t) - x(t - \tau(t))) \right], \\ V_7(t) &= \int_{\tau_m}^0 \int_{\gamma}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\theta) G_1 \dot{x}(\theta) \, ds d\theta d\mu, \end{aligned}$$

sendo

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}.$$

Neste cenário, três diferentes alternativas são propostas para serem analisadas e comparadas com a solução proposta em (70). As alternativas serão pontuadas a seguir:

- Alternativa 1: Uso do FLK proposto pela Equação (2.20) e Lemas propostos em (70);
- Alternativa 2: Uso do FLK proposto em (70) e Lema 1 para modificar as desigualdades integrais;
- Alternativa 3: Uso do FLK proposto pela Equação (2.20) e Lema 1 para modificar as desigualdades integrais.

A comparação destas três alternativas visa verificar o quanto cada alternativa tem a contruibuir na solução do problema por si só (a ser analisada através das Altervativas 1 e 2) e em conjunto (a ser analisada através da Alternativa 3).

O FLK (2.20) guarda grande similaridade com o funcional proposto por (70). A principal diferença entre eles é a introdução de um termo de integral tripla, em $V_7(t)$. Os efeitos da adição de um termo de integral tripla no funcional de Lyapunov–Krasovskii podem ser vistos no trabalho de (56). Interessante ressaltar que a Alternativa 2 faz o uso

do mesmo funcional de Lyapunov–Krasovskii proposto por (70). Posto isto, o Teorema a seguir apresenta as condições para síntese do controlador para o caso da Alternativa 3.

Teorema 1. Dados escalares positivos γ , τ_m , τ_M , ϵ , δ_i , i = 1, 2, ..., r, σ e uma matriz de relaxação U > 0, sob um esquema de comunicação chaveado por evento, o sistema (2.11) é assintóticamente estável com ganho que minimiza a norma \mathcal{H}_{∞} , se existirem matrizes simétricas W, P_{ii} , Q_i , R_i , G_1 e matrizes P_{12} , X, M_i , N_i , i = 1, 2, ..., r, $T_{ij} = T_{ji}^T$, i, j = 1, 2, ..., 2r tais que as LMIs abaixo sejam válidas:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ * & P_{22} \end{bmatrix} > 0,$$
 (2.21)

$$\begin{aligned} \Xi_{ij}^{(1)} & \Gamma_i & 0 & e_1^T X^T C_i^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -\tau R_3 & 0 \\ * & * & * & -U^{-1} \end{aligned} \le 0, \ \forall (i, j = 1, 2, ..., r)$$
(2.22)

$$\begin{bmatrix} \Xi_{ij}^{(2)} & \Gamma_i & e_1^T X^T C_i^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -U^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \ \forall (i, j = 1, 2, ..., r)$$
(2.23)

$$\begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \dots & T_{1,2r} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \dots & T_{2,2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{2r,1} & T_{2r,2} & \dots & T_{2r,2r} \end{bmatrix} < 0,$$
(2.24)

$$T_{i,j} + T_{j,i} - 2M_i \le 0, \ \forall (i, j = 1, 2, ..., r)$$
 (2.25)

$$-2N_j - T_{(j+r),(i+r)} - T_{(i+r),(j+r)} \le 0 \quad \forall (i, j = 1, 2, ..., r),$$

$$(2.26)$$

sendo:

$$\Xi_{ij}^{(1)} = \Omega_{ij}^{(0)} + e_3 \epsilon W e_3 + sym \left\{ e_3^T \epsilon W e_4 \right\} - e_4^T (1 - \epsilon) W e_4 - \varepsilon_0 \Upsilon_{ij} \varepsilon_0^T,$$

$$\Xi_{ij}^{(2)} = \Omega_{ij}^{(0)} + \tau \Omega_{ij}^{(1)} + e_3 \epsilon W e_3 + sym \left\{ e_3^T \epsilon W e_4 \right\} - (1 - \epsilon) W e_4 - \varepsilon_0 \Upsilon_{ij} \varepsilon_0^T,$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^{(0)} &= e_1^T \Big(A_i X + X^T A_i^T + Q_1 + P_{12} + P_{12}^T - 9R_1 - \frac{9}{\tau} R_3 - R_4 - 6G_1 \Big) e_1 \\ &+ e_2^T (\tau_m^2 R_1 + \tau^2 R_2 - \sigma X + \sigma X^T) e_2 + e_3^T (-2R_2) e_3 - e_5^T \Big(R_4 + \frac{9}{\tau} R_3 \Big) e_5 \\ &+ e_6^T (Q_2 - Q_1 - 9R_1 - 9R_2) e_6 + e_7^T (Q_2 + 9R_2) e_7 \\ &- e_8^T (180R_1 - 18G_1) e_8 - e_9^T 720R_1 e_9 - e_{10}^T 192R_2 e_{10} - e_{11}^T 720R_1 e_{11} \\ &- e_{12}^T 192R_3 e_{12} - e_{13}^T 720R_3 e_{13} + e_{14} (-144G_1) e_{14} \\ &+ sym \Big\{ e_1^T \Big(\sigma X^T A_i^T - X + P_{11} \Big) e_2 + e_1^T B_i Y_j e_3 - e_1^T B_i Y_j e_4 \Big\} \\ &+ sym \Big\{ e_1^T R_4 e_5 - e_1 (2R_1 + P_{12}) e_6 + e_1^T (\tau_m P_{22} + 6R_1 - 6G_1) e_8 \Big\} \\ &+ sym \Big\{ + e_1^T (\tau_m P_{22} + 6R_1) e_8 - e_1^T 192R_3 e_{12} \Big\} \\ &+ sym \Big\{ -e_1^T 720R_3 e_{13} + e_1^T (96G_1) e_{14} \Big\} \\ &+ sym \Big\{ e_2^T \sigma B_i Y_j e_3 - e_2^T \sigma B_i Y_j e_4 + e_2^T \tau_m P_{12} e_8 \Big\} \\ &+ sym \Big\{ e_6^T (-3R_2) e_8 + e_6^T (6R_1 - \tau_m P_{22}) e_8 + e_6^T (24R_2) e_{10} \Big\} \\ &+ sym \Big\{ e_7^T (-36R_2) e_{10} + e_7^T (60R_2) e_{11} + e_8^T (48G_1) e_{12} + e_8^T (48G_1) e_{14} \Big\} \end{aligned}$$

$$\Omega_{ij}^{(0)} = sym \left\{ e_1^T R_4 e_2 - e_2^T R_4 e_5 \right\} + e_2^T R_3 e_2,$$

$$\Gamma_i = e_1^T E_i + e_2^T \sigma E_i, \quad \tau = \tau_M - \tau_m,$$

$$\tau=\tau_M-\tau_m,$$

$$\begin{split} \Upsilon_{ij} &= \frac{T_{ij} + T_{ji} + T_{(i+r),(j+r)}}{2} + T_{i,(j+r)} + T_{(j+r),i} \\ &- \sum_{k=1}^{r} \delta_k \left\{ M_i + \frac{T_{ik} + T_{ki}}{2} + N_j + \frac{T_{(j+r),(k+r)} + T_{(k+r),(j+r)}}{2} \right\}. \end{split}$$
$$\varepsilon_0 &= \left[e_1^T \ e_2^T \ e_3^T \ e_4^T \right]. \end{split}$$

sendo $e_i = I_{(i)} \otimes I$, i = 1, 2, ..., 14, uma matriz $p \times 14p$, I representa uma matriz identidade de ordem p, $I_{(i)}$ representa a i-*ésima* linha de uma matriz identidade de ordem 14, p é a dimensão de x(t) e \otimes indica o produto de Kronecker entre as matrizes. Os ganhos dos controlador fuzzy são dados por $F_j = Y_j X^{-1}$, j = 1, 2, ..., r.

Demonstração. A demonstração do Teorema 1 é apresentada no Anexo A. □ Importante ressaltar que a Alternativa 2, que é baseada nos mesmos Lemas utilizados em (70), possui uma LMI a mais e uma matriz de relaxação a mais que nas Alternativas 1 e 3, isto é, a matriz *S* e a LMI:

$$\begin{bmatrix} R_2 & S \\ * & R_2 \end{bmatrix} > 0.$$
(2.27)

2.5 Exemplo Numérico

Este exemplo aborda o problema de seguimento de referência, onde deseja-se que a saída do sistema acompanhe a saída de um modelo de referência da maneira mais próxima posssível. Considere um modelo de referência, Hurwitz estável, definido pelo seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_r x_r(t) + B_r r(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) \end{cases}$$
(2.28)

O modelo do sistema é não linear, descrito de acordo com a Equação (2.2). Desta forma, um sistema aumentado em malha fechada, que inclui o modelo da planta e o modelo de referência é definido da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j} \left[\bar{A}_{i} \xi(t) + \bar{B}_{i} \bar{F}_{j} \xi(t - \tau(t)) - \bar{B}_{i} \bar{F}_{j} \bar{\epsilon}(t - \tau(t)) + \bar{E}_{i} \bar{\omega}(t) \right] \\ e(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} \left[\bar{C}_{i} \xi(t) \right] \end{cases}$$
(2.29)

sendo $\xi(t) = [x^T(t) \ x_r^T(t)]^T e \bar{e}(t - \tau(t)) = \xi(t - \tau(t)) - \xi(t_k h)$ a diferença entre a amostragem

atual e a última transmissão de informação, satisfazendo:

$$\left\|W^{\frac{1}{2}}\bar{\epsilon}(t-\tau(t))\right\| \le \sigma \left\|W^{\frac{1}{2}}\xi(t-\tau(t)) - \bar{\epsilon}(t-\tau(t))\right\|$$
(2.30)

 $\operatorname{com} \sigma$ um escalar positivo e:

$$\bar{A}_{i} = \begin{bmatrix} A_{i} & 0\\ 0 & A_{r} \end{bmatrix}, \ \bar{B}_{i} = \begin{bmatrix} B_{i}\\ 0 \end{bmatrix}, \ \bar{E}_{i} = \begin{bmatrix} E_{i} & 0\\ 0 & B_{r} \end{bmatrix}, \ \bar{C}_{i} = \begin{bmatrix} C_{i} & -C_{r} \end{bmatrix}, \ \bar{F}_{j} = \begin{bmatrix} F_{1i} & F_{2i} \end{bmatrix},$$
$$\mu_{i} = \mu_{i}(\theta(t)), \quad \mu_{i}^{(k)} = \mu_{i}(\theta(t_{k}h)) \ge 0, \ i = 1, 2, \dots, r,$$
$$\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}^{(k)} = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \bar{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega^{T}(t) & r^{T}(t) \end{bmatrix}^{T}.$$

sendo F_{1i} e F_{2i} os ganhos do controlador fuzzy.

Este exemplo é o mesmo considerado em (70, Seção 5, p. 38), e tem como propósito comparar os limites superiores máximos de retardo no tempo permitidos que garantem a estabilidade assintótica de cada sistema. Considera-se o estado inicial do sistema $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e o estado inicial do modelo de referência $x_r(0) = -2$, entrada de distúrbio $\omega(t) = 12 \cos(t)e^{-t}$ e a entrada de referência $r(t) = 6 \operatorname{sen}(1.2t)e^{-0.11t}$. Considere o seguinte sistema aumentado fuzzy T-S:

$$\begin{split} \bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 25 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_1 &= \bar{B}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \ \bar{E}_1 &= \bar{E}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{C}_1 &= \bar{C}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbb{D} &= \{x(t) : |x_1(t)| \le 5\} \\ \mu_1(\theta(t)) &= 1 - x_1^2(t)/25, \ \mu_2(\theta(t)) = x_1^2(t)/25, \ \theta(t) = x_1(t). \end{split}$$

A Tabela 2.1 apresenta os valores de ganhos obtidos através das alternativas mencionadas anteriormente.

As Figuras 2.3 e 2.4 apresentam os sinais de referência e distúrbio aplicados e o

	\bar{F}_1	$ $ \bar{F}_2
(70)	[-27,27 -7,84 22,08]	[-5,98 -7,24 22,76]
Alternativa 1 (A1)	[-8,22 -10,17 -1,40]	[-10,28 -6,26 -9,65]
Alternativa 2 (A2)	[-13,04 -1,92 -0,47]	[-18,98 -12,69 0,89]
Alternativa 3 (A3)	[-6,82 -3,21 3,31]	[-3,21 -0,93 11,76]

Tabela 2.1: Ganhos dos controladores.

atraso variante no tempo. O atraso é definido como variante no tempo com amplitude mínima (τ_m) igual a 0,03 s e máxima (τ_M) igual a 0,09 s. Lembrando que o atraso, neste caso é uma função diferenciável no tempo.



Figura 2.3: Sinais de referência e distúrbio.


Figura 2.4: Atraso variante no tempo.

A Figura 2.5 apresenta o erro de seguimento de referência. Conforme podemos observar, o controlador projetado por (70) é mais robusto para pequenos valores de atrasos. A grande vantagem das alternativas propostas é que elas garantem a estabilidade do sistema em uma faixa de atraso variante no tempo mais ampla, como será visto a seguir.



Figura 2.5: Erro de seguimento de referência ($\tau_M = 0.09$ s).

A Tabela 2.2 apresenta o valor da integral da raiz quadrada do sinal de erro ao quadrado, (IAE, do ingles, *Integral Absolute Error*). Na prática, este resultado numérico equivale a energia do sinal que queremos minimizar ao considerar o problema de seguimento de referência. O que se espera é que o erro de seguimento de referência seja o menor possível. Conforme foi citado anteriormente, para os valores mínimos e máximos de atraso aplicados, o controlador projetado por (70) apresenta um menor erro de seguimento de referência em relação aos demais controladores. A IAE é calculada da seguinte forma:

$$IAE = \int_0^{t_f} \sqrt{e(t)^2} dt$$

Controlador	IAE
(70)	15,2805
Alternativa 1 (A1)	27,4894
Alternativa 2 (A2)	27,0386
Alternativa 3 (A3)	18,6121

Tabela 2.2: Índice de desempenho ($\tau_M = 0.09$ s).

A Figura 2.6 apresenta o erro de seguimento de referência considerando um atraso variante no tempo mínimo de 0,03 s e máximo de 0,119 s. O que se espera em um problema de seguimento de referência é que o erro de seguimento de referência tenda a zero com a evolução do tempo. Neste caso, nota-se claramente que o controlador projetado por (70) não atende esta especificação, sendo que um aumento no valor de atraso máximo ($\tau_M = 0,119 s$), acarreta na instabilização do sistema.

A Tabela 2.3 apresenta o valor da integral da raiz quadrada do sinal de erro ao quadrado. Conforme podemos notar, o controlador projetado por (70) apresentou o pior índice para este caso.

A Figura 2.7 apresenta o erro de seguimento de referência considerando um atraso variante no tempo mínimo de 0,03 s e máximo de 0,126 s. Para este caso, o controlador projetado por (70) não foi apresentado, pois para este valor de atraso máximo, o sistema já apresentava comportamento instável. Conforme podemos notar, o controlador



Figura 2.6: Erro de seguimento de referência ($\tau_M = 0,119$ s).

Controlador	IAE
(70)	73,9022
Alternativa 1 (A1)	47,7015
Alternativa 2 (A2)	43,0838
Alternativa 3 (A3)	25,9904

Tabela 2.3: Índice de desempenho ($\tau_M = 0,119$ s).

obtido através da Alternativa 1 não atende à especificação de seguimento de referência, sendo que aumentando levemente o valor do atraso máximo, o sistema já apresenta um comportamento instável. Este resultado ilustra que a proposta feita através da Alternativa 1 (que propõe alteração apenas no funcional de Lyapunov–Krasovskii) é mais conservadora que a Alternativa 2 (que propõe alteração apenas nas desigualdades integrais), e consequentemente que a Alternativa 3, pelo menos para este exemplo específico.

A Tabela 2.4 apresenta o valor da raiz quadrada da integral do erro ao quadrado. Conforme podemos notar, o controlador obtido através da Alternativa 1 apresentou o pior índice de desempenho dentre os controladores testados.

A Figura 2.8 apresenta o erro de seguimento de referência, considerando um atraso variante no tempo mínimo de 0,03 s e máximo de 0,137 s. Conforme podemos notar, para este valor de atraso máximo, o controlador obtido através da Alternativa 2 não



Figura 2.7: Erro de seguimento de referência ($\tau_M = 0,126$ s).

Tabela 2.4: Índice de desempenho ($\tau_M = 0,126$ s).

Controlador	IAE
Alternativa 1 (A1)	35,4725
Alternativa 2 (A2)	32,1780
Alternativa 3 (A3)	27,5495

atende à especificação de seguimento de referência.

A Tabela 2.5 apresenta o valor da integral da raiz quadrada do erro ao quadrado. Esta tabela ilustra que a Alternativa 2 apresentou um desempenho menos satisfatório que o controlador obtido através da Alternativa 3.

Tabela 2.5: Índice de Desempenho ($\tau_M = 0,137$ s).

Controlador	IAE
Alternativa 2 (A2)	31,8499
Alternativa 3 (A3)	29,1355

A Figura 2.9 apresenta o erro de seguimento de referência considerando o valor do atraso variante no tempo mínimo de 0,03 s e máximo de 0,155 s. Para este valor de atraso, o sistema não atende a especificação de seguimento de referência.



Figura 2.8: Erro de seguimento de referência (τ_M = 0,137 s).



Figura 2.9: Erro de seguimento de referência ($\tau_M = 0,155$ s).

A Tabela 2.6 apresenta os valores de atraso máximo, τ_M , que resultam em uma solução factível do problema de otimização, considerando diferentes valores de atraso mínimo, τ_m . É possível notar que as alternativas propostas neste capítulo geram soluções menos conservadoras em relação ao retardo no tempo para o problema de síntese de controladores para sistemas de controle em rede, para este exemplo específico.

Método	$\tau_m = 0,03$	$\tau_m = 0,05$	$\tau_m = 0,07$	$\tau_m = 0,09$
(70)	0,127	0,133	0,148	0,157
Alternativa 1	0,135	0,141	0,154	0,162
Alternativa 2	0,142	0,148	0,159	0,168
Alternativa 3	0,145	0,158	0,165	0,171

Tabela 2.6: Atraso máximo, τ_M .

2.6 Conclusão

Neste capítulo, o problema de síntese de controladores para sistemas de controle em rede contínuos no tempo, amostrado por eventos, foi abordado considerando diferentes escolhas de relaxamento via desigualdades integrais, bem como a escolha adequada de um funcional de Lyapunov–Krasovskii. No geral, tanto a adição de um termo de integral tripla no funcional de Lyapunov–Krasovskii, quanto o uso de novas desigualdades integrais presentes na literatura (bem como a combinação entre eles) resultaram em condições menos conservadoras para o problema investigado em relação a resultado anteriormente publicado.

No próximo capítulo será considerado um funcional de se Lyapunov–Krasovskii fuzzy em busca de obter condições menos conservadoras que as condições obtidas neste capítulo.

Projeto de Controladores Através de Funções de Lyapunov–Krasovskii Fuzzy

Este capítulo avalia se o projeto de controle tem desempenho melhorado ao selecionar um funcional de Lyapunov-Krasovskii fuzzy. A principal peculiaridade dessa classe de funções em relação as funções quadráticas, que foram utilizadas no capítulo anterior, é o surgimento da derivada temporal das funções de pertinência quando se toma a derivada do FLK. Algumas propriedades das funções de pertinência disponíveis na literatura permitem manipulações que podem ser interessantes na formulação de condições de análise e síntese para sistemas fuzzy e foram utilizadas para se obter soluções menos conservadoras.

Além disto, investiga-se a implementação de um controlador linear e o sincronismo entre as funções de pertinência do sistema e do controlador fuzzy.

Por fim, um controlador fuzzy por realimentação de estados com ação integral foi proposto de maneira a eliminar o erro em estado estacionário para uma entrada em degrau.

Todos os casos acima foram investigados considerando o mesmo exemplo numérico que foi abordado no capítulo anterior.

3.1 Propriedades

As seguintes manipulações presentes em (31) são consideradas para se introduzir variáveis de relaxações.

•
$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) = 1 \implies \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)M = M,$$

•
$$\sum_{i=1}^{r} \dot{\mu}_i(x) = 0 \implies \sum_{i=1}^{r} \dot{\mu}_i(x)M = 0 \implies \sum_{i=1}^{r} \dot{\mu}_i(x)(M + P_i) = \sum_{i=1}^{r} \dot{\mu}_i(x)P_i.$$

De forma a obter condições menos conservadoras, além do Lema 1, este capítulo faz o uso do seguinte Lema:

Lema 2. [Veja (31)] Considere ϕ_k escalares positivos dados. Assumindo que $|\dot{\mu}_k| \le \phi_k$, $P_k + M > 0$, $\forall k$ e definindo

$$P_{\phi} = \sum_{i=1}^{r} \phi_i (P_i + M), \tag{3.1}$$

Então a seguinte desigualdade é valida:

$$x^{T} \sum_{i=1}^{r} \dot{\mu}_{i} (P_{i} + M) x \le x^{T} P_{\phi} x.$$
(3.2)

Neste cenário, este capítulo propõe uma alternativa diferente para ser analisada e comparada com a alternativa proposta por (70) e as alternativas propostas no Capítulo 2. Para isto, foi considerado um funcional com os mesmos termos que na Equação (2.20), com exceção do termo $V_0(t)$, que agora trata-se de uma função de Lyapunov–Krasovskii fuzzy, descrito da seguinte forma:

$$V_0(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-\tau_m}^t x(s)ds \end{bmatrix}^T \bar{P} \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-\tau_m}^t x(s)ds \end{bmatrix}$$

sendo que

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \begin{bmatrix} P_{11,i} & P_{12,i} \\ & \\ P_{12,i}^T & P_{22,i} \end{bmatrix}$$

Como é necessário tomar a derivada temporal do FLK com a parcela acima, é necessário considerar uma forma de lidar com a derivada das funções de pertinência, $\mu(x(t))$, que surgem em $\dot{V}_0(t)$. Uma estratégia interessante para reduzir o conservadorismo na análise de estabilidade ao selecionar tais limites superiores foi apresentada em (31) e é considerada neste trabalho. Existem outras formas para lidar com estes limitantes disponíveis na literatura, conforme pode ser visto em (6). Entretanto, a alternativa proposta em (31) é mais simples e possui um desempenho muito próximo das outras, e por este motivo foi escolhida.

Teorema 2. Dados escalares positivos γ , τ_m , τ_M , ϵ , δ_i , (i = 1, 2, ..., r), σ e uma matriz de relaxação U > 0, sob esquema de acionamento por evento, o sistema (2.11) é assintóticamente estável, se existirem matrizes simétricas $P_{11,i}$, $P_{22,i}$ W > 0, $Q_i > 0$, $R_i > 0$, G > 0, $T_{i,i} > 0$ e matrizes $P_{12,i}$, X, M_i , N_i , (i = 1, 2, ..., r), $T_{i,j} = T_{j,i}^T$, (i, j = 1, 2, ..., 2r) tais que as seguintes LMIs são válidas:

$$\begin{bmatrix} P_{11,i} & P_{12,i} \\ & \\ P_{12,i}^T & P_{22,i} \end{bmatrix} > 0, \ \forall (i = 1, 2, ..., r)$$
(3.3)

$$\begin{aligned} \Xi_{ij}^{(1)} & \Gamma_i & 0 & e_1^T X^T C_i^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -\tau R_3 & 0 \\ * & * & * & -U^{-1} \end{aligned} \le 0, \ \forall (i, j = 1, 2, ..., r) \end{aligned}$$
(3.4)

$$\begin{bmatrix} \Xi_{ij}^{(2)} & \Gamma_i & e_1^T X^T C_i^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -U^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \ \forall (i, j = 1, 2, ..., r)$$
(3.5)

$$\begin{vmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \dots & T_{1,2r} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \dots & T_{2,2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{2r,1} & T_{2r,2} & \dots & T_{2r,2r} \end{vmatrix} < 0,$$
(3.6)

$$T_{i,j} + T_{j,i} - 2M_i \le 0, \ \forall (i, j = 1, 2, ..., r)$$
 (3.7)

$$-2N_j - T_{(j+r),(i+r)} - T_{(i+r),(j+r)} \le 0, \ \forall (i, j = 1, 2, \dots, r).$$
(3.8)

sendo $e_i = I_{(i)} \otimes I$, (i = 1, 2, ..., 14), uma matriz de dimensão $p \times 14p$, I denota uma matriz identidade de ordem p, $I_{(i)}$ denota i-*ésima* linha de uma matriz identidade 14×14 , p é a dimensão de x(t) e \otimes indica o produto de Kronecker entre as matrizes.

$$\begin{split} \Xi_{ij}^{(1)} &= \Omega_{ij}^{(0)} + e_3 \epsilon W e_3 + sym \left\{ e_3^{\mathsf{T}} \epsilon W e_4 \right\} - (1 - \epsilon) W e_4 - \kappa_0 \Upsilon \kappa_0^{\mathsf{T}}, \\ \Xi_{ij}^{(2)} &= \Omega_{ij}^{(0)} + \tau \Omega_{ij}^{(1)} + e_3 \epsilon W e_3 + sym \left\{ e_3^{\mathsf{T}} \epsilon W e_4 \right\} - (1 - \epsilon) W e_4 - \kappa_0 \Upsilon \kappa_0^{\mathsf{T}}, \\ \Omega_{ij}^{(0)} &= e_1^{\mathsf{T}} \left(A_i X + X^{\mathsf{T}} A_i^{\mathsf{T}} + Q_1 + P_{\phi 11} + P_{12} + P_{12}^{\mathsf{T}} - 9R_1 - \frac{9}{\tau} R_3 - R_4 - 6G_1 \right) e_1 \\ &+ e_2^{\mathsf{T}} (\tau_m^2 R_1 + \tau^2 R_2 - \sigma X + \sigma X^{\mathsf{T}}) e_2 + e_3^{\mathsf{T}} (-2R_2) e_3 - e_5^{\mathsf{T}} \left(R_4 + \frac{9}{\tau} R_3 \right) e_5 \\ &+ e_6^{\mathsf{T}} (Q_2 - Q_1 - 9R_1 - 9R_2) e_6 + e_7^{\mathsf{T}} (Q_2 + 9R_2) e_7 \\ &- e_8^{\mathsf{T}} (180R_1 - 18G_1 + P_{\phi 22}) e_8 - e_9^{\mathsf{T}} 720R_1 e_9 - e_{10}^{\mathsf{T}} 192R_2 e_{10} - e_{11}^{\mathsf{T}} 720R_1 e_{11} \\ &- e_{12}^{\mathsf{T}} 192R_3 e_{12} - e_{13}^{\mathsf{T}} 720R_3 e_{13} + e_{14} (-144G_1) e_{14} \\ &+ sym \left\{ e_1^{\mathsf{T}} \left(\sigma X^{\mathsf{T}} A_i^{\mathsf{T}} - X + P_{11} \right) e_2 + e_1^{\mathsf{T}} B_i Y_j e_3 - e_1^{\mathsf{T}} B_i Y_j e_4 \right\} \\ &+ sym \left\{ e_1^{\mathsf{T}} R_4 e_5 - e_1 (2R_1 + P_{12}) e_6 + e_1^{\mathsf{T}} (\tau_m P_{22} + 6R_1 - 6G_1 + P_{\phi_{12}}) e_8 \right\} \\ &+ sym \left\{ -e_1^{\mathsf{T}} 720R_3 e_{13} + e_1^{\mathsf{T}} (96G_1) e_{14} \right\} \\ &+ sym \left\{ e_2^{\mathsf{T}} G_B Y_j e_3 - e_2^{\mathsf{T}} \sigma B_i Y_j e_4 + e_2^{\mathsf{T}} \tau_m P_{12} e_8 \right\} \\ &+ sym \left\{ e_6^{\mathsf{T}} (-3R_2) e_8 + e_6^{\mathsf{T}} (6R_1 - \tau_m P_{22}) e_8 + e_6^{\mathsf{T}} (24R_2) e_{10} \right\}, \\ &+ sym \left\{ e_7^{\mathsf{T}} (-36R_2) e_{10} + e_7^{\mathsf{T}} (60R_2) e_{11} \right\}, \\ &+ sym \left\{ e_8^{\mathsf{T}} (48G_1) e_{12} + e_8^{\mathsf{T}} (48G_1) e_{14} \right\} \end{split}$$

$$\begin{split} \Omega_{ij}^{(0)} =& sym \left\{ e_1^T R_4 e_2 - e_2^T R_4 e_5 \right\} + e_2^T R_3 e_2, \\ \Gamma_i =& e_1^T E_i + e_2^T \sigma E_i, \\ \Upsilon_{ij} =& \frac{T_{i,j} + T_{j,i} + T_{(i+r),(j+r)}}{2} + T_{i,(j+r)} + T_{(j+r),i} \\ &- \sum_{k=1}^r \delta_k \left\{ M_i + \frac{T_{i,k} + T_{k,i}}{2} + N_j + \frac{T_{(j+r),(k+r)} + T_{(k+r),(j+r)}}{2} \right\}. \end{split}$$

Então os ganhos do controlador fuzzy são dados por $F_j = Y_j X^{-1}$, (j = 1, 2, ..., r).

Demonstração. A demonstração do Teorema 2 está no Apêndice B.

Nota 1. Avalia-se a robustez do sistema quando se considera um sincronismo entre as pertinências do sistema não linear e do controlador. Em paralelo, para este caso, considera-se um controlador linear.

$$u(t) = Fx(t_k), \ t \in [t_k + \tau_{tk}, \ t_{k+1} + \tau_{tk+1}]$$
(3.9)

Note que o sincronismo entre as pertinências não está relacionado com o controlador linear, ou seja, pode-se obter sincronismo entre as pertinências considerando um controlador não linear. Neste caso, o sistema em malha-fechada é dado da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i [A_i x(t) + B_i F x(t - \tau(t)) - B_i F \epsilon_k (t - \tau(t)) + E_i \omega(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i [C_i x(t)] \end{cases}$$
(3.10)

sendo *F* o ganho do controlador linear. Uma representação alternativa da ação de controle (3.9) pode ser feita da seguinte maneira:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i [Fx(t_k)]$$
(3.11)

sendo μ_i a pertinência do sistema fuzzy (2.2). O sinal de controle descrito na Equação (3.9), pela simplicidade em relação à (3.11), foi adotado como padrão.

Nota 2. Note que uma ação integral pode ser introduzida na lei de controle fuzzy se, por exemplo, desejar erro nulo para uma entrada em degrau. Isto pode ser feito adicionando-se uma nova variável de estado, a integral do erro de saída. Neste caso, o controlador fuzzy é definido da seguinte maneira:

$$q(t) = \int_0^t e(s)ds, \qquad (3.12)$$

$$u(t) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j(\theta(t_k)) \left[F_j x(t_k) + H_j q(t_k) \right], \ t \in [t_k + \tau_{tk}, \ t_{k+1} + \tau_{tk+1}] .$$
(3.13)

O sistema em malha-fechada aumentado é representado da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j} [\tilde{A}_{i} \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{i} \tilde{F}_{j} \tilde{x}(t - \tau(t)) - \tilde{B}_{i} \tilde{F}_{j} \tilde{\epsilon}(t - \tau(t)) + \tilde{E}_{i} \tilde{\omega}(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} [\tilde{C}_{i} \tilde{x}(t)] \end{cases}$$
(3.14)

sendo

$$\tilde{A}_{i} = \begin{bmatrix} A_{i} & 0 \\ C_{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{i} = \begin{bmatrix} B_{i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_{i} = \begin{bmatrix} E_{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_{i} = \begin{bmatrix} C_{i} & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_{j} = \begin{bmatrix} F_{j} & H_{j} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & q^T(t) \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega^T(t) & 0 \end{bmatrix},$$

e q(t) é a integral do erro de saída.

Nota 3. Considerando a discussão da Nota 1, que trata sobre o controlador linear, a demonstração segue os mesmo passos daquela no Teorema 1, com exceção do termo Y_j que deve ser substituído por Y. Neste caso, a matriz ganhos do controlador linear são dados por $F = YX^{-1}$.

Nota 4. No caso do controlador com ação integral, discutido na Nota 2, a demonstração também é similar àquela do Teorema 1, com excessão da dimensão das matrizes do sistema aumentado. Os ganhos do controlador com ação integral são dados por $\tilde{F}_j = Y_j X^{-1}$, (j = 1, 2, ..., r).

3.2 Exemplo Numérico

Considere o mesmo estudo de caso avaliado na Seção 2.5. Para propósitos de comparação, serão considerados os ganhos dos controladores obtidos em (70) e Alternativa 3 (A3), que apresentou o melhor resultado dentre as alternativas comparadas no capítulo anterior. A Tabela 3.1 apresenta os ganhos do controlador obtidos para cada cenário, considerando um atraso variante no tempo mínimo, τ_m , igual a 0,03 s, e máximo igual a 0,09 s.

	F_1	F_2	
(70)	[-27,27 -7,84 22,08]	[-5,98 -7,24 22,76]	
Alternativa 3	[-6,82 - 3,21 3,31]	[-3,21 - 0,93 11,76]	
Teorema 2	[-9,95 - 3,56 5,09]	[10,75 - 3,71 6,38]	

Tabela 3.1: Ganhos dos Controladores Fuzzy

As características do atraso variante no tempo são apresentadas na Figura 3.1.



Figura 3.1: Atraso variante no tempo com amplitude pseudo-aleatória.

As Figuras 3.2 e 3.3 apresentam a saída e o erro de seguimento de referência. Conforme pode ser visto, para pequenos valores de atraso, os resultados já existentes na literatura são melhores que os resultados obtidos neste trabalho. A grande vantagem dos métodos que foram propostos neste trabalho é que eles mantém um melhor seguimento de referência por uma maior faixa de valores de atraso.



Figura 3.2: Resposta de seguimento de referência, $\tau_m = 0.03s$ e $\tau_M = 0.09s$.



Figura 3.3: Erro de seguimento de referência, $\tau_m = 0,03s \text{ e } \tau_M = 0,09s$.

Tabela 3.2 apresenta o índice γ_{min} obtido para o ganho \mathcal{H}_{∞} considerando $\tau_m = 0,03s$ e $\tau_M = 0,09s$. Conforme pode-se notar, as estratégias de controle propostas neste trabalho garantem um melhor índice \mathcal{H}_{∞} quando comparado com os outros resultados presentes na literatura.

Método	γ_{min}
(70)	0,48
Alternativa 3	0,29
Teorema 2	0,27

Tabela 3.2: Índice de Desempenho \mathcal{H}_{∞} .

Tabela 3.3 apresenta os máximos valores de τ_M que podem ser obtidos considerando $\tau_m = 0,03s$ e $\gamma = 0,48$. A estratégia de controle proposta no Teorema 2 garante a estabilidade do sistema por uma maior faixa de variação do atraso máximo, τ_M .

Tabela 3.3: Atraso máximo, τ_M , obtido considerando $\tau_m = 0.03s \text{ e } \gamma = 0.48$.

Método	τ_M obtido
(70)	0,090
Alternativa 3	0,171
Teorema 2	0,176

O controlador projetado por (70) apresenta a melhor resposta de seguimento de referência para pequenos valores de atrasos no tempo. Entretanto, com o aumento gradual do valor do atraso máximo, τ_M , este controlador é o primeiro a apresentar um comportamento instável na resposta de seguimento de referência, o que nos leva a sugerir que as desigualdades integrais utilizadas neste trabalho fornecem condições menos conservadoras que as desigualdades usadas em (70), tanto para robustez do sistema ao retardo no tempo, quanto para minimização do índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} , pelo menos para o presente exemplo. Figura 3.4 apresenta a resposta de seguimento de referência considerando $\tau_m = 0.03s$ e $\tau_M = 0.16s$.



Figura 3.4: Resposta de Seguimento de Referência, $\tau_M = 0.16s$.

A Tabela 3.4 apresenta o número de eventos que foram gerados e a economia de dados que seriam enviados pela rede em relação a um acionamento periódico, considerando os controladores projetados por meio do Teorema 2 e (70). Conforme os resultados apresentados, o controlador projetado através do Teorema 2 economiza cerca de 7% dos dados enviados pela rede em relação ao controlador projetado por (70) e requer uma largura de banda menor.

Método	Número de Eventos	Economia
(70)	115	45%
Teorema 2	92	52%

Tabela 3.4: Esquema de Acionamento por Eventos.

As Figuras 3.5 e 3.6 apresentam os eventos que foram gerados considerando os controladores fuzzy, obtidos por meio dos controladores do Teorema 2 e (70), considerando um atraso mínino e máximo iguais à 0,03 e 0,09 s, respectivamente. Note que o eixo das ordenadas apresenta os intervalos de chaveamento, ou seja, o número de amostras que o sistema fica sem realizar um chaveamento.



Figura 3.5: Gerador de eventos, (70).



A Tabela 3.5 apresenta os valores de atraso máximo, τ_M , que são obtidos considerando diferentes valores de atraso mínimo, τ_m . Conforme pode-se observar, a estratégia proposta no Teorema 2 resulta em soluções menos conservadoras para o problema de síntese de controladores para sistemas de controle em rede.

Método	$\tau_m = 0,03$	$\tau_{m} = 0,05$	$\tau_m = 0,07$	$\tau_m = 0,09$
(70)	0,127	0,133	0,148	0,157
Alternativa 3	0,145	0,158	0,165	0,171
Teorema 2	0,176	0,186	0,197	0,206

Tabela 3.5: Atraso máximo, τ_M .

Considerando a discussão na Nota 1, a Tabela 3.6 apresenta os ganhos dos controladores lineares obtidos e algumas comparações são feitas na sequência. Note que em (70) os ganhos de controle são fixos e iguais.

Tabela 3.6: Ganhos do Controlador Linear

	$F_1 = F_2$		
(70)	[-18.13 -7.57 15.22]		
Nota 1	[-25.30 - 8.04 21.00]		

As Figuras 3.7 e 3.8 apresentam a saída e o erro de rastreamento de referência, respectivamente, considerando um atraso variante no tempo mínimo igual a 0,03 s e máximo igual a 0,09 s. Conforme podemos notar, os resultados obtidos são similares àqueles apresentados nas Figuras 3.2 e 3.3, o que indica que o controlador linear pode ser uma alternativa interessante a ser considerada, principalmente para casos em que os atrasos induzidos pela rede são pequenos.



Figura 3.7: Resposta de rastreamento de saída, $\tau_m = 0.03s$ e $\tau_M = 0.09s$.



Figura 3.8: Erro de rastreamento de saída, $\tau_m = 0.03s$ e $\tau_M = 0.09s$.

As Figuras 3.9 e 3.10 apresentam a saída e erro de seguimento de saída, respectivamente, considerando um atraso variante no tempo mínimo igual a 0,03s e máximo igual a 0,12s. Comparando os controladores fuzzy e linear, é possível notar que o controlador linear é menos robusto que o controlador fuzzy em relação ao retardo no tempo e também no que diz respeito à minimização do índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} . Realizando uma comparação apenas entre os controladores lineares, verifica-se que o controlador linear obtido conforme a Nota 1 é mais robusto que o controlador projetado por (70) em respeito ao retardo variante no tempo, o que reforça a hipótese de que as novas condições propostas neste trabalho reduzem o conservadorismo das condições disponíveis na literatura, tanto para a robustez, quanto ao retardo no tempo, quanto para a minimização de índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} .



Figura 3.9: Resposta de Seguimento de Referência, $\tau_M = 0.12s$.



Figura 3.10: Erro de Seguimento de Referência, $\tau_M = 0,12s$.

A Tabela 3.7 apresenta o número de eventos gerados e a economia de dados enviados pela rede em relação a um acionamento periódico, considerando os controladores lineares projetados através da Nota 1 e (70). Nota-se através dos resultados que o controlador linear projetado através da Nota 1 utiliza menos a rede em relação ao controlador linear projetado por (70), uma vez que um número menor de dados são gerados. Comparando os eventos gerados pelos controlador fuzzy, na Tabela 3.4, e pelo controlador linear, na Tabela 3.7, nota-se que o controlador linear economiza mais largura de banda que o controlador fuzzy, uma vez que ele gera um menor número de eventos.

Tabela 3.7: Esquema de Acionamento por Eventos.

Método	Número de Eventos	Economia
(70)	81	54%
Nota 1	74	58%

As Figuras 3.11 e 3.12 apresentam os eventos que foram gerados considerando os controladores lineares que foram obtidos através da Nota 1 e em (70), para os atrasos mínimo e máximo iguais a 0,03 e 0,09 s.



Tabela 3.8 apresenta o índice γ_{min} obtido através do ganho \mathcal{H}_{∞} de seguimento de referência, considerando $\tau_m = 0,03s$ e $\tau_M = 0,09s$. Conforme pode ser visto, no caso do controlador linear, o controlador linear discutido na Nota 1 garante um melhor índice \mathcal{H}_{∞} de seguimento de referência que o controlador linear proposto por (70). Entretanto, nota-se que o controlador linear não é tão eficaz quanto o controlador fuzzy na minimização do índice de desempenho, ao se comparar os resultados na Tabela 3.8 com aqueles na Tabela 3.2.

Método	γ_{min}
(70)	0,72
Nota 1	0,50

Tabela 3.8: Índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} .

Tabela 3.9 apresenta o máximo valor de τ_M que foi obtido considerando $\tau_m = 0,03s$ e $\gamma = 0,72$. Conforme pode ser visto, a estratégia de controle proposta através da Nota 1 mantém o índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} do sistema por uma maior faixa de valores do atraso máximo no tempo, o que reforça a ideia de redução de conservadorismo obtido através das manipulações .

Tabela 3.9: Atraso máximo no tempo, τ_M , obtido considerando $\tau_m = 0.03s$ e $\gamma = 0.72$.

Método	τ_{M} (s) obtido	
(70)	0,082	
Nota 1	0,139	

A Tabela 3.10 apresenta os valores de atraso máximo, τ_M , que resultam em uma solução factível do problema de otimização, considerando diferentes valores de atrasos mínimos, τ_m .

Método	$\tau_m = 0,03$	$\tau_m = 0,05$	$\tau_m = 0,07$	$\tau_m = 0,09$
(70)	0,128	0,131	0,135	0,139
Alternativa 3	0,132	0,136	0,141	0,144
Nota 1	0,139	0,143	0,147	0,151

Tabela 3.10: Atraso máximo, τ_M .

A partir de agora, será considerado o mesmo exemplo anterior, substituindo-se o sinal de entrada por um degrau com diferentes amplitudes e uma perturbação variando de acordo com a amplitude do sinal de entrada. A Figura 3.13 apresenta os sinais de entrada de referência e distúrbio aplicados neste exemplo, com o distúrbio sendo definido como 15% do sinal de entrada. Espera-se avaliar as características da resposta em estado estacionário para este cenário.



Figura 3.13: Sinais de referência e distúrbio.

Considere um atraso variante no tempo mínimo igual a 0,03 s, máximo igual a 0,09 s e os ganhos da Tabela 3.1. Note pela Figura 3.14 que existe um erro em regime permamente em todos os controladores investigados. De modo a anular este erro em regime permanente, foi proposto um controlador por realimentação de estados com ação integral, conforme apresentado na Nota 2, e foram avaliados os impactos que a implementação da ação integral traz em relação a robustez do sistema ao retardo no tempo e ao índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} .



Figura 3.14: Erro de eeguimento de referência, $\tau_m = 0.03s \text{ e } \tau_M = 0.09s$.

A Tabela 3.11 apresenta os ganhos do controladores obtidos para este teste, sendo +AI referente a adição da Ação Integral.

	$ ilde{F}_1$	$ ilde{F}_2$	
Alternativa 3 +AI	[-15,85 -5,31 11,55 -11,55]	[6,63 - 4,57 12,01 - 12,01]	
Teorema 2+AI	[-18,38 -5,72 13,97 -13,97]	[4,19 -5,00 14,54 -14,54]	
Nota 1+AI	[-36,05 -8,65 41,21 -41,21]	[-36,05 -8,65 41,21 -41,21]	

Tabela 3.11: Ganhos do controlador com ação integral

As Figuras 3.15 e 3.16 apresentam a saída e o erro de seguimento de referência, considerando a ação integral e o valor do atraso variante no tempo mínimo de 0,03s e máximo de 0,09s.



Figura 3.15: Resposta de seguimento de referência com ação integral, $\tau_M = 0.09s$.



Figura 3.16: Erro de seguimento de referência com ação integral, $\tau_M = 0.09s$.

Comparando o número de eventos que foram gerados pelos controladores com ação integral, os resultados foram praticamente os mesmos para todos os controladores. Os controladores com ação integral economizam cerca de 70% dos dados enviados pela

rede em relação a um acionamento periódico. Note que estes resultados não podem ser comparados com os resultados obtidos no Exemplo Numérico 01, uma vez que os sinais de referência são diferentes para cada exemplo.

A Tabela 3.12 apresenta o índice γ_{min} relacionado ao ganho \mathcal{H}_{∞} , considerando $\tau_m = 0,03s$ e $\tau_M = 0,09s$. Conforme pode-se notar, a inclusão da ação integral no controlador por realimentação de estados faz o erro em estado estacionário tender à zero, porém há uma deterioração no índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} de seguimento de referência.

Método	γmin
Alternativa 3 + AI	0,37
Teorema 2 + AI	0,34
Nota 1 + AI	0,70

Tabela 3.12: Índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} com Ação Integral.

Similarmente, a Tabela 3.13 apresenta o máximo valor de atraso no tempo, τ_M considerando $\tau_m = 0,03s$ e $\gamma = 0,48$. Conforme pode ser visto, a inclusão da ação integral no controlador por realimentação de estado diminui a faixa de valores de atraso que mantém o índice de desempenho do sistema.

Tabela 3.13: Atraso máximo, τ_M , considerando $\tau_m = 0.03s \text{ e } \gamma = 0.48$.

Método	τ_M obtido	
Alternativa 3 + AI	0,162	
leorema 2 + Al	0,166	
Nota 1 + AI	0,087	

Neste caso, aumentando o valor do atraso máximo, o controlador linear foi o primeiro a apresentar um comportamento instável. As Figuras 3.17 e 3.18 apresentam a saída e o erro de seguimento de referência, respectivamente, considerando um atraso máximo igual a 0,105*s*.



Figura 3.17: Resposta de Seguimento de Referência com Ação Integradora, $\tau_M = 0,105s$



Figura 3.18: Erro de Seguimento de Referência com Ação Integradora, $\tau_M = 0,105s$

A Tabela 3.14 apresenta os valores de atraso máximo, τ_M , que resultam em uma solução factível do problema de otimização, considerando diferentes valores de atrasos mínimos, τ_m .

Método	$\tau_m = 0,03$	$\tau_m=0,\!05$	$\tau_m = 0,07$	$\tau_m = 0,09$
Nota 1 + AI	0,126	0,128	0,133	0,134
Alternativa 3 + AI	0,127	0,131	0,137	0,139
Teorema 2 + AI	0,129	0,136	0,141	0,145

Tabela 3.14: Atraso máximo, τ_M .

3.3 Substituição de Termos do Funcional de Lyapunov

Uma outra tentativa, para obter soluções menos conservadoras para o problema de síntese de controladores para sistemas de controle em rede, foi a substituição das matrizes simétricas dos termos com integrais simples (Q_1 , Q_2 , R_3) e da matriz simétrica (R_4) que não está associada a um termo integral, por termos fuzzy. Um exemplo desta substituição é descrito a seguir para o termo $V_1(t)$:

$$V_1(t) = \int_{t-\tau_m}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds$$
(3.15)

Que passa a ser descrito da seguinte forma:

$$V_1(t) = \int_{t-\tau_m}^t x^T(s) \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) Q_i \right) x(s) ds$$
(3.16)

Isso implica nas seguintes alterações na derivada do funcional de Lyapunov fuzzy.

$$\dot{V}_{1}(t) = x^{T}(t) \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}(x(t))Q_{i} \right) x(t) - x^{T}(t - \tau_{m}) \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}(x(t))Q_{i} \right) x(t - \tau_{m}) + \int_{t-\tau_{m}}^{t} x^{T}(s) \left(\sum_{i=1}^{r} \dot{\mu}_{i}(x(t))Q_{i} \right) x(s) ds$$
(3.17)

As manipulações presentes no Lema 2 foram utilizadas no termo em destaque na

equação (3.3), que ficam da seguinte maneira:

$$\int_{t-\tau_m}^t x^T(s) \left(\sum_{i=1}^r \dot{\mu}_i(x(t)) Q_i \right) x(s) = \int_{t-\tau_m}^t x^T(s) \left(\sum_{i=1}^r \dot{\mu}_i(x(t)) (Q_i + M) \right) x(s) ds$$

$$\leq \int_{t-\tau_m}^t x^T(s) \left(\sum_{i=1}^r \phi_i (Q_i + M) \right) x(s) ds$$
(3.18)

Considerando:

$$Q_{\phi} = \sum_{i=1}^{r} \phi_i (Q_i + M)$$
(3.19)

sendo $|\dot{\mu}_i| < \phi_i$, tem-se:

$$\int_{t-\tau_m}^t x^T(s) Q_{\phi} x(s) ds \tag{3.20}$$

Fazendo uso da desigualdade de Jensen:

$$\int_{t-\tau_m}^t x^T(s) Q_{\phi}(t) x(s) ds \le \frac{1}{\tau_m} \left(\int_{t-\tau_m}^t x(s) ds \right)^T Q_{\phi} \left(\int_{t-\tau_m}^t x(s) ds \right)$$
(3.21)

Isto implica nas seguintes condições:

- $Q_i > 0$,
- $Q_i + M > 0$.

Os resultados obtidos foram exatamente os mesmos. Sendo assim, por simplicidade, optou-se por manter o funcional em seu formato original, assim como foi utilizado neste capítulo.

3.4 Funções de Pertinência com Memória

Outra abordagem que foi adotada, na busca por condições menos conservadoras para análise de estabilidade e síntese de controladores, foi incluir certas alterações nas funções de pertinência. No formato original, as funções de pertinência consideram apenas o instante atual, ou seja, $\mu_i = \mu_i(\theta(t))$. Como o assincronismo entre as premissas do sistema fuzzy e do controlador fuzzy ocorre principalmente devido ao atraso, foi proposto o uso de funções de pertinência com memória. Os seguintes testes foram feitos, considerando as funções de pertinência com memória:

1.
$$V_1(t) = \int_{t-\tau_m}^t x^T(s) \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t-\tau_m))Q_i \right) x(s) ds$$

2. $V_2(t) = \int_{t-\tau_m}^t x^T(s) \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\theta(t))\mu_j(\theta(t-\tau_m))Q_{ij} \right) x(s) ds$

Considerando o primeiro item mencionado acima, as condições são obtidas considerando a derivada do funcional:

$$\dot{V}_{1}(t) = x^{T}(t) \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}(\theta(t-\tau_{m}))Q_{i} \right) x(t) - x^{T}(t-\tau_{m}) \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}(\theta(t-\tau_{m}))Q_{i} \right) x(t-\tau_{m}) + \int_{t-\tau_{m}}^{t} x^{T}(s) \left(\sum_{i=1}^{r} \dot{\mu}_{i}(\theta(t-\tau_{m}))Q_{i} \right) x(s) ds$$
(3.22)

sendo que para o termo em destaque acima, faz-se o uso do Lema 2, da seguinte forma:

$$\int_{t-\tau_m}^t x^T(s) \left(\sum_{i=1}^r \dot{\mu}_i (\theta(t-\tau_m)) Q_i \right) = \int_{t-\tau_m}^t x^T(s) \left(\sum_{i=1}^r \dot{\mu}_i (\theta(t-\tau_m)) (Q_i + M) \right) x(s) ds$$
(3.23)

$$\leq \int_{t-\tau_m}^t x^T(s) \left(\sum_{i=1}^r \phi_i \left(Q_i + M \right) \right) x(s) ds \tag{3.24}$$

Considerando:

$$Q_{\phi} = \sum_{i=1}^{r} \phi_i (Q_i + M)$$
(3.25)

tem-se:

$$\int_{t-\tau_m}^t x^T(s) Q_{\phi_i} x(s) ds \tag{3.26}$$

Fazendo uso da desigualdade de Jensen:

$$\int_{t-\tau_m}^t x^T(s) Q_{\phi_i} x(s) ds \le \frac{1}{\tau_m} \left(\int_{t-\tau_m}^t x^T(s) ds \right) Q_{\phi_i} \left(\int_{t-\tau_m}^t x(s) ds \right)$$
(3.27)

Considerando o segundo item, tem-se o seguinte:

$$\begin{split} \dot{V}_{2}(t) &= x^{T}(t) \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i}(x(t)) \mu_{j}(x(t-\tau_{m})) Q_{ij} \right) x(t) \\ &- x^{T}(t-\tau_{m}) \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i}(x(t)) \mu_{j}(x(t-\tau_{m})) Q_{ij} \right) x(t-\tau_{m}) \\ &+ \int_{t-\tau_{m}}^{t} x^{T}(s) \left(\sum_{i=1}^{r} \dot{\mu}_{i}(x(t)) \sum_{j=1}^{r} \mu_{j}(x(t-\tau_{m})) \left(Q_{kj} + M_{1j} \right) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{r} \dot{\mu}_{j}(x(t-\tau_{m})) \sum_{i=1}^{r} \mu_{i}(x(t)) \left(Q_{ik} + M_{2j} \right) x(s) ds \end{split}$$
(3.28)

sendo que o termo em destaque acima, faz o uso do Lema 2:

$$\int_{t-\tau_m}^t x^T(s) \left(\sum_{i=1}^r \phi_k \sum_{j=1}^r \dot{\mu}_j (x(t-\tau_m))(Q_{kj}+M_{1j}) + \sum_{j=1}^r \phi_k \sum_{i=1}^r \mu_i (x(t))(Q_{ik}+M_{2j}) \right) x(s) ds$$
(3.29)

Considerando:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(x(t)) \mu_j(x(t-\tau_m)) \int_{t-\tau_m}^{t} x^T(s) \left(\sum_{k=1}^{r} \phi_k \left(Q_{ik} + Q_{kj} + M_{1j} + M_{2i} \right) \right) x(s) ds \quad (3.30)$$

Fazendo uso da desigualdade de Jensen:

$$\int_{t-\tau_{m}}^{t} x^{T}(s) \left(\sum_{k=1}^{r} \phi_{k} \left(Q_{ik} + Q_{kj} + M_{1j} + M_{2i} \right) \right) x(s) ds \leq \frac{1}{\tau_{m}} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i}(x(t)) \mu_{j}(x(t-\tau_{m})) \left(\int_{t-\tau_{m}}^{t} x^{T}(s) ds \right) Q_{\phi ij} \left(\int_{t-\tau_{m}}^{t} x(s) ds \right) ds$$
(3.31)

sendo:

$$Q_{\phi_{ij}} = \sum_{k=1}^{r} \phi_k \left(Q_{ik} + Q_{kj} + M_{1j} + M_{2i} \right)$$
(3.32)

Novamente, os resultados obtidos através destes testes foram os mesmos obtidos anteriormente, sendo que por simplicidade, o formato original foi mantido. Interessante citar que as desigualdades de Jensen, Wirtinger e Wirtinger com termo auxiliar foram testadas para os casos.

3.5 Conclusão

Condições menos conservadoras para síntese de controladores para sistemas de controle em rede foram obtidas considerando-se um funcional de Lyapunov–Krasovskii fuzzy. Interessante salientar que ao escolher esta classe de função, houveram melhoras tanto no índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} quanto na robustez do sistema ao retardo no tempo, garantindo a estabilidade para uma maior faixa de valores de atraso máximo.

Quanto ao controlador linear, este se mostrou uma estratégia interessante a ser adotada quando o sistema é submetido à pequenos valores de atraso. A grande vantagem desta estratégia é que um controlador linear é muito mais simples de ser implementado que um controlador fuzzy. Entretanto, ele não é robusto a grandes variações de retardo no tempo.

Em relação ao controlador com ação integral, este se mostrou uma alternativa interessante quando o foco está voltado para a resposta temporal do sistema, pois garante erro nulo em estado estacionário, para entradas em degrau. Em relação ao índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} e a robustez do sistema quanto ao retardo no tempo, esta estratégia não se mostrou tão interessante quando comparada aos outros resultados.

No próximo capítulo, o problema de síntese de controladores para sistemas de controle em rede no tempo discreto será abordado. Desigualdades somatórias recentes disponíveis na literatura, em busca de obter condições menos conservadoras que as disponíveis na literatura, serão consideradas.

Metodologia de Projeto para o Caso a Tempo Discreto

Este capítulo apresenta a metodologia para o projeto do controle dado um modelo T–S fuzzy e um esquema de acionamento por evento para o caso a tempo discreto. Condições para análise de estabilidade e projeto via LMIs são obtidas. Desigualdades somatórias dísponíveis na literatura, que foram utilizadas no trabalho, são apresentadas. Semelhante ao que foi abordado nos capítulos anteriores, espera-se obter condições menos conservadoras para o controle em rede.

4.1 Formulação do Problema de Controle

Considere um sistema não linear descrito por um modelo fuzzy T–S a tempo discreto da seguinte forma:

Regra da Planta: Se $\theta_1(k)$ é M_{i1} , $\theta_2(k)$ é M_{i2} e ... e $\theta_g(k)$ é M_{ig} , então:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + E_i w(k) \\ y(k) = C_i x(k) \end{cases}$$
(4.1)

sendo i = 1, 2, ..., r e r é o número de regras *se-então*, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $w(k) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de variáveis exógenas e $y(k) \in \mathbb{R}^s$ é o vetor de saídas controladas. Seja θ_j , j = 1, 2, ..., g, as variáveis premissas, $\theta(k) = [\theta_1(k), \theta_2(k), ..., \theta_g(k)] \in \mathbb{R}^g$ é o vetor formado pelo empilhamento das variáveis premissas. Seja M_{ij} , i = 1, 2, ..., r, j = 1, 2, ..., g, os conjuntos fuzzy. As matrizes A_i , B_i , E_i , C_i do sistema a tempo discreto possuem dimensões apropriadas.

O modelo fuzzy T-S é descrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\theta(k))[A_i x(k) + B_i u(k) + E_i w(k)] \\ y(k) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\theta(k))[C_i x(k)] \end{cases}$$
(4.2)

Por simplicidade, usa-se μ_i para representar $\mu_i(\theta(k))$. As funções de pertinência obedecem as seguintes propriedades:

$$\mu_i \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^r \mu_i = 1.$$
(4.3)

A exemplo do que foi feito no caso contínuo, adota-se o esquema de acionamento por eventos, de forma a reduzir o trafégo de informações pela rede. O primeiro acionamento ocorre no instante k = 0. Considerando o último estado transmitido $x(k_s)$, e o estado disponibilizado pelo sensor, x(k), o próximo instante de acionamento é definido de acordo com a configuração do gerador de eventos, que pode ser definida das seguintes maneiras:

$$k_{s+1} = k_s + \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ k > k_s | \left\| W^{\frac{1}{2}} \left[x(k) - x(k_s) \right] \right\| - \sigma \left\| W^{\frac{1}{2}} \left[x(k_s) \right] \right\| > 0 \right\}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$
(4.4)

$$k_{s+1} = k_s + \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ k > k_s | \left\| W^{\frac{1}{2}} \left[x(k) - x(k_s) \right] \right\| - \sigma > 0 \right\}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$
(4.5)

$$k_{s+1} = k_s + \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ k > k_s | \left\| W^{\frac{1}{2}} \left[x(k) - x(k_s) \right] \right\| - \sigma \left\| W^{\frac{1}{2}} \left[x(k) \right] \right\| > 0 \right\}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$
(4.6)

 $\cos \sigma > 0$ e W > 0. Note que estas configurações de geradores de eventos são idênticas às configurações apresentadas nas Figuras 2.2(a), 2.2(b) e 2.2(c).

A regra de controle do controlador por realimentação de estados é descrita da seguinte maneira:
Se
$$\theta_1(k_s) \in M_{i1} \in \theta_2(k_s) \in M_{i2} \in ... \in \theta_g(k_s) \in M_{ig}$$
, então:
 $u(k) = F_j x(k_s), \ k \in [k_s + \tau_{k_s}, \ k_{s+1} + \tau_{k_s+1} - 1]$ (4.7)

Note que o controlador fuzzy é definido como:

$$u(k) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \left(\theta(k_s) \right) \left[F_j x(k_s) \right], \quad k \in [k_s + \tau_{k_s}, \ k_{s+1} + \tau_{k_s+1} - 1]$$
(4.8)

sendo F_j , j = 1, 2, ..., r, os ganhos do controlador fuzzy e τ_{k_s} o atraso referente a soma dos atrasos correspondentes ao tempo que a informação leva para alcançar o controlador a partir do sensor e do controlador para o atuador.

Com isto, o sistema de controle em rede em malha fechada é descrito através da seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i}(\theta(k))\mu_{j}(\theta(k_{s})) \left[A_{i}x(k) + B_{i}F_{j}x(k-\tau(k)) + B_{i}F_{j}\varepsilon(k-\tau(k)) + E_{i}\omega(k)\right] \\ y(k) = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i}(\theta(k)) \left[C_{i}x(k)\right] \end{cases}$$
(4.9)

com $\epsilon(k - \tau(k))$ satisfazendo a seguinte condição:

$$\left\| W^{\frac{1}{2}} \epsilon(k - \tau(k)) \right\| \le \sigma \left\| W^{\frac{1}{2}} x_k(k - \tau(k)) - \epsilon(k - \tau(k)) \right\|$$
(4.10)

sendo σ um escalar positivo.

De maneira a obter condições menos conservadoras, este trabalho faz uso do seguinte Lema:

Lema 3. [Ver (16)] Para uma matriz $R \in \mathbb{Z}_{+}^{n \times n}$, inteiros a < b, a seguinte desigualdade é valida:

$$\sum_{k=a}^{b} u^{T}(k)Ru(k) \ge \frac{1}{l}v_{1}^{T}Rv_{1} + \frac{3(l+1)}{l(l-1)}\zeta_{1}^{T}R\zeta_{1} + \frac{3(l+1)(l+2)^{2}}{l(l-1)(l^{2}+11)}\zeta_{2}^{T}R\zeta_{2}$$
(4.11)

sendo l = b - a, e

$$v_{1} = \sum_{k=a}^{b} u(k), v_{2} = \sum_{k=a}^{b} \sum_{s=a}^{k} u(s), e v_{3} = \sum_{k=a}^{b} \sum_{s=a}^{k} \sum_{i=a}^{s} u(i).$$

$$\zeta_{1} = v_{1} - \frac{2}{l+1}v_{2}$$

$$\zeta_{2} = v_{1} - \frac{6}{l+1}v_{2} + \frac{12}{(l+1)(l+2)}v_{3}$$

Interessante notar que esta desigualdade também engloba as classes de desigualdades que são comumente encontradas na literatura, que são as desigualdades de Jensen e Wirtinger, e ainda soma um termo a desigualdade. No caso discreto, estas desigualdades são descritas da seguinte maneira:

• Jensen [ver (22)]:
$$\sum_{k=a}^{b} u^{T}(k)Ru(k) \ge \frac{1}{l}v_{1}^{T}Rv_{1}$$

• Wirtinger [ver (51)]:
$$\sum_{k=a}^{b} u^{T}(k)Ru(k) \ge \frac{1}{l}v_{1}^{T}Rv_{1} + \frac{3(l+1)}{l(l-1)}\zeta_{1}^{T}R\zeta_{1}$$

De maneira a obter condições de análise e síntese, adotou-se o funcional de Lyapunov– Krasovskii discreto da forma:

$$V(k) = \sum_{i=1}^{5} V_i(k)$$
(4.12)

$$V_1(k) = x^T(k) P x(k)$$

$$V_{2}(k) = \sum_{i=k-\tau_{m}}^{k-1} x^{T}(i)Z_{1}x(i)$$
$$V_{3}(k) = \sum_{i=k-\tau_{M}}^{k-1} x^{T}(i)Z_{2}x(i)$$
$$V_{4}(k) = \tau_{M}\sum_{j=-\tau_{M}+1}^{0} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} \Delta x^{T}(i)Z_{3}\Delta x(i)$$

$$V_{5}(k) = (\tau_{M} - \tau_{m}) \sum_{i=-\tau_{M}+1}^{-\tau_{m}} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} \Delta x^{T}(i) Z_{4} \Delta x(i)$$

sendo $\Delta x(k) = x(k + 1) - x(k)$. Este funcional é o mesmo proposto por (35) e (18). De posse disto, apresentamos as seguintes condições abaixo.

Teorema 3. Dados escalares positivos inteiros τ_M , τ_m e um escalar positivo σ , o sistema de controle em rede definido pela Equação (4.9), sob acionamento por evento definido pela Equação (4.10), é assintóticamente estável com índice de desempenho \mathcal{H}_{∞} , γ , se existirem matrizes simétricas X, Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 , Y_5 e matrizes W_i , i = 1, 2, ..., r tal que a seguinte desigualdade seja válida:

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & 0 & \Upsilon_{2ij} & \bar{C}_i \\ * & -\gamma^2 I & \bar{B}_i & 0 \\ * & * & -\Upsilon_3 & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$
(4.13)

sendo

$$\Upsilon_{1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 & \Gamma_{14} & 0 & \Gamma_{16} & \Gamma_{17} & 0 & 0 \\ * & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{28} & \Gamma_{29} \\ * & * & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} & 0 & \Gamma_{36} & \Gamma_{37} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{48} & \Gamma_{49} \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} & \Gamma_{67} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{88} & \Gamma_{89} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & \Gamma_{99} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{11} = -X + Y_1 + Y_2 - (K_1 + K_2 + 1)Y_3 - \alpha Y_5,$$

 $\Gamma_{14} = -(1 + 2K_1 + 6K_2)Y_3,$

$$\begin{split} &\Gamma_{16} = -(2K_1 - 6K_2)Y_3, \\ &\Gamma_{17} = -(12K_1)Y_3, \\ &\Gamma_{22} = -Y_2 - (1 + K_3 + K_4)Y_4 \\ &\Gamma_{23} = (1 - K_3 - K_4)Y_4, \\ &\Gamma_{23} = -(2K_3 - 6K_4)Y_4, \\ &\Gamma_{29} = -12K_4Y_4, \\ &\Gamma_{33} = -Y_1 - (1 + K_1 + K_2)Y_3 - (1 + K_3 + K_4)Y_4, \\ &\Gamma_{34} = -(2K_1 + 6K_2)Y_3, \\ &\Gamma_{36} = -(2K_3 + 6K_4)Y_4, \\ &\Gamma_{37} = -12K_2Y_4, \\ &\Gamma_{44} = -(4K_1 + 36K_2)Y_3, \\ &\Gamma_{48} = -(2K_3 + 6K_4)Y_4, \\ &\Gamma_{49} = -(12K_2)Y_4, \\ &\Gamma_{55} = Y_5, \\ &\Gamma_{66} = -(4K_1 + 36K_2)Y_3, \\ &\Gamma_{67} = -72K_2Y_3, \\ &\Gamma_{77} = 144K_2Y_3, \\ &\Gamma_{88} = (4K_3 + 36K_4)Y_4, \\ \end{split}$$

$$\begin{split} \Gamma_{89} &= -72K_{3}Y_{4}, \\ \Gamma_{99} &= 144K_{3}Y_{4}, \\ K_{1} &= \frac{3(\tau_{M}+1)}{(\tau_{M}-1)}, \\ K_{2} &= \frac{5(\tau_{M}+1)(\tau_{M}+2)^{2}}{(\tau_{M}-1)(\tau_{M}^{2}+11)}, \\ K_{3} &= \frac{3(\Delta\tau+1)}{(\Delta\tau-1)}, \\ K_{4} &= \frac{5(\Delta\tau+1)(\Delta\tau+2)^{2}}{(\Delta\tau-1)(\Delta\tau^{2}+11)}, \\ \Upsilon_{2ij} &= \begin{bmatrix} A_{ij} \quad \tau_{M}(\tilde{A}_{ij}-\bar{X}) \quad (\tau_{M}-\tau_{m})(\tilde{A}_{ij}-\bar{X}) \end{bmatrix} \\ \Upsilon_{3} &= diag \left\{ X, XY_{3}^{-1}X, XY_{4}^{-1}X \right\} \\ \tilde{A}_{ij} &= \begin{bmatrix} A_{iX} \quad B_{i}W_{j} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{bmatrix}^{T} \\ \tilde{B}_{i} &= \begin{bmatrix} XE_{i}^{T} \quad \tau_{M}XE_{i}^{T} \quad (\tau_{M}-\tau_{m})XE_{i}^{T} \end{bmatrix} \\ \tilde{X} &= \begin{bmatrix} X \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{bmatrix}^{T} \end{split}$$

Então, os ganhos do controlador são dados por $F_j = W_j X^{-1} (j = 1, 2, ..., r)$.

A demonstração deste teorema está no Apêndice C.

Conforme pode-se notar, Υ_3 tem um produto de variáveis matriciais que leva a uma formulação não-convexa do problema de síntese de controladores. Os trabalhos de (35; 19; 18) apresentam meios de lidar com este produto cruzado, tais como o método de restrição direta e o algoritmo de cone complementar.

(35) apresenta um método chamado de restrição direta para lidar com a não linearidade, isto é:

$$-XY_{i}^{-1}X < -\frac{1}{\lambda_{i}}X, \ i = 3, 4$$
(4.14)

sendo λ_i , (*i* = 3, 4), escalares positivos. Note que as condições anteriores são equiva-

lentes a $Y_i < \lambda_i X$, i = 3, 4. Então, as restrições não lineares podem ser substituídas da forma:

$$\begin{cases} \Psi_{ij} < 0, \\ Y_i < \lambda_i X, \ i = 3, \ 4. \end{cases}$$
(4.15)

sendo Ψ_{ij} a matriz do Teorema 3 que requer ser negativa, mas substituindo os termos $XY_i^{-1}X$ em Υ_3 por $1/\lambda_i X$.

O algoritmo de linearização cone complementar introduzido por (10), utilizado tanto por (35) quanto por (18), substitui as não linearidades da seguinte maneira para resolver o problema de minimização envolvendo apenas LMIs.

$$\min Tr\left(\hat{X}X + \hat{Y}_{3}Y_{3} + \hat{Y}_{4}Y_{4} + \hat{T}_{3}T_{3} + \hat{T}_{4}T_{4}\right)$$
(4.16)

sujeito à:

$$\begin{cases} \Psi_{ij} < 0, \begin{bmatrix} -\hat{T}_3 & \hat{X} \\ \hat{X} & -\hat{Y}_3 \end{bmatrix} \le 0, \begin{bmatrix} -\hat{T}_4 & \hat{X} \\ \hat{X} & -\hat{Y}_4 \end{bmatrix} \le 0, \begin{bmatrix} X & I \\ I & \hat{X} \end{bmatrix} \ge 0 \\ \begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & \hat{Y}_i \end{bmatrix} \ge 0, \begin{bmatrix} T_i & I \\ I & \hat{T}_i \end{bmatrix} \ge 0, \quad i = 3, 4. \end{cases}$$

$$(4.17)$$

sendo Ψ_{ij} a matriz do Teorema 3 que requer ser negativa, mas substituindo os termos $XY_i^{-1}X$ em Υ_3 por T_i , i = 3, 4.

4.2 Exemplo Numérico

Considere o problema de seguimento de referência, que foi abordado anteriormente, agora para o caso a tempo discreto. O sistema não linear a tempo discreto da Equação

(4.2) é descrito por um modelo fuzzy T–S da seguinte maneira:

$$A_{1} = \begin{bmatrix} 0,7986 & -0,2078 \\ 0,1799 & 0,9784 \end{bmatrix}, A_{2} = \begin{bmatrix} 0,7986 & -0,2078 \\ 0,1799 & 0,9784 \end{bmatrix},$$
$$B_{1} = \begin{bmatrix} 0,3119 & 0,0023 \end{bmatrix}^{T}, B_{2} = \begin{bmatrix} 0,1217 & 0,0023 \end{bmatrix}^{T},$$
$$E_{1} = E_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{T}, C_{1} = C_{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mu_{1}(\theta(k)) = \sin^{2}(x_{1}(k)), \ \mu_{2}(\theta(k)) = 1 - \mu_{1}(\theta(k)), \ \theta(k) = x_{1}(k).$$

O modelo do sistema fuzzy discreto é o mesmo utilizado em (18), com período de amostragem T = 0.2 s.

Considere um modelo de referência linear, Schur estável, definido pelo seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_r(k+1) = A_r x_r(k) + B_r r(k) \\ y_r(k) = C_r x_r(k) \end{cases}$$
(4.18)

 $\operatorname{com} A_r = 0,8187, B_r = 1 \text{ e } C_r = 1.$

De posse do modelo do sistema não linear e do modelo de referência, temos condições de montar um modelo aumentado da seguinte forma.

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j} \left[\bar{A}_{i} \xi(k) + \bar{B}_{i} \bar{F}_{j} \xi(k-\tau(k)) + \bar{B}_{i} \bar{F}_{j} \epsilon(k-\tau(k)) + \bar{E}_{i} \bar{\omega}(k) \right] \\ e(k) = \sum_{i=1}^{r} \mu_{i} \left[\bar{C}_{i} \xi(k) \right] \end{cases}$$
(4.19)

sendo

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0\\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \ \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i\\ 0 \end{bmatrix}, \ \bar{E}_i = \begin{bmatrix} E_i & 0\\ 0 & B_r \end{bmatrix}, \ \bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & -C_r \end{bmatrix}, \ \bar{F}_j = \begin{bmatrix} F_{1j} & F_{2j} \end{bmatrix},$$

$$\begin{split} \xi(k) &= \left[x(k) \ x_r(k) \right]^T \\ \mu_i &= \mu_i(\theta(k)), \ \mu_i^{(k)} = \mu_i(\theta(k)) \ge 0, \ i = 1, 2, \dots, r, \ \sum_{i=1}^r \mu_i^{(k)} = \sum_{i=1}^r \mu_i = 1, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \bar{\omega}(k) &= \left[\omega^T(k) \ r^T(k) \right]. \end{split}$$

A Figura 4.1 apresenta o sinais de entrada e de perturbação que foram utilizados para realizar os experimentos.



Figura 4.1: Sinais de referência e distúrbio.

Os resultados obtidos neste trabalho serão comparados com os resultados obtidos em (35), que gentilmente forneceu os arquivos referentes ao seu trabalho.

A Tabela 4.1 apresenta os valores dos ganhos obtidos através das alternativas mencionadas anteriormente. Estes resultados foram obtidos usando o método do cone complementar. Interessante citar que para este caso, o método da restrição direta não gerou solução factível.

A Tabela 4.2 apresenta os valores de norma \mathcal{H}_{∞} em cada caso, considerando um atraso mínimo e máximo iguais a 1 e 3 instantes de tempo, respectivamente. Conforme pode-se notar, as desigualdades apresentadas no Teorema 3 permitem obter resultados

	F_1	F_2		
Teorema 3	[-0,7171 0,8410 0,7557]	[-1,5213 1,8291 1,6166]		
(35)	[-0,5088 0,6356 0,5483]	[-1,3114 1,6113 1,4063]		

Tabela 4.1: Ganhos dos controladores a tempo discreto.

menos conservadores que a desigualdade de Jensen, que foi utilizada no trabalho de (35).

Tabela 4.2: Norma	\mathcal{H}_{∞}	,.
-------------------	------------------------	----

Método	γ_{min}
Teorema 3	0,5034
(35)	0,5482

As Figuras 4.2 e 4.3 apresentam a saída e o erro de seguimento de referência, respectivamente, considerando um atraso mínimo igual a 1 e máximo igual a 3. Conforme pode-se notar, os resultados obtidos em (35) apresentam comportamento semelhante em relação aos resultados obtidos por meio do Teorema 3.



Figura 4.2: Seguimento de referência.



Figura 4.3: Erro de seguimento de referência.

As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam a saída e o erro de seguimento de referência, respectivamente, considerando um atraso mínimo igual a 5 e máximo igual a 15 instantes de tempo. Conforme pode-se notar, com o aumento do atraso máximo, o sistema controlado utilizando os ganhos obtidos em (35) já não consegue efetuar o rastreio do sinal de referência com a mesma eficácia. Com este resultado, pode-se indicar que o projeto baseado nas desigualdades somatórias no Lema 3 são menos conservadores quando comparado ao uso da desigualdade de Jensen, pelo menos no presente exemplo.



Figura 4.4: Seguimento de referência.



Figura 4.5: Erro de seguimento de referência.

Outra análise que se pode fazer, diz respeito ao esquema de acionamento por eventos. A Tabela 4.3 apresenta o número de eventos gerados e o percentual de economia dos dados dados enviados pela rede em relação à um acionamento periódico, considerando os controladores obtidos por meio do Teorema 3 e em (35). Os resultados levam a conclusão de que o controlador projetado por meio do Teorema 3 envia um número menor de dados pela rede em relação o controlador obtido por (35), o que resulta em um menor uso da rede.

Método	Número de Eventos	Economia
(35)	135	53%
Teorema 3	115	45%

Tabela 4.3: Esquema de Acionamento por Eventos.

As Figuras 4.6 e 4.7 apresentam os eventos que foram gerados considerando os controladores obtidos por meio do Teorema 3 e em (35), respectivamente, considerando os atrasos mínimo e máximo iguais a 5 e 15 instantes de tempo, respectivamente.



Figura 4.6: Gerador de eventos - Teorema 3: algoritmo do cone complementar.



Figura 4.7: Gerador de eventos - (35): algoritmo do cone complementar.

Por fim, é feita uma comparação da emissão de dados na rede, considerando diferentes valores de σ . As Figuras 4.8 e 4.9 apresentam os percentuais de pacotes enviados para cada caso. Conforme pode-se notar, na maioria dos casos o controlador obtido via Teorema 3 envia um percentual menor de pacotes em relação ao controlador obtido por (35). De certa forma, estas figuras tem relação com as Figuras 4.6 e 4.7, que ilustram que ocorrem mais eventos no sistema controlado pelo método proposto por (35) do que pelo método proposto via Teorema 3, e consequentemente transmite um percentual maior de dados pela rede, na maioria dos casos.



Figura 4.8: Percentual de pacotes enviados - Teorema 3: algoritmo do cone complementar.



Figura 4.9: Percentual de pacotes enviados - (35): algoritmo do Cone Complementar.

4.3 Conclusão

Neste capítulo, o problema de rastreamento de referência para sistemas de controle em rede a tempo discreto foi abordado considerando diferentes escolhas de desigualdades somatórias, bem como a escolha de um funcional de Lyapunov–Krasovskii discreto. Os resultados obtidos ilustram que o uso de novas desigualdades somatórias garantem mais robustez para o sistema em relação a várias restrições impostas pela rede que foram analisadas.

No próximo capítulo, o problema de síntese de controladores para sistemas de controle em rede será abordado. A principal diferença em relação a este capítulo, é que as condições de síntese serão obtidas de maneira direta, ou seja, sem o uso de algoritmos que substituem as não linearidades que surgem nas condições de síntese.

Condições Convexas de Síntese de Controladores a Tempo Discreto

Este capítulo apresenta uma alternativa para obter uma solução convexa direta para o problema de otimização. Esta alternativa é baseada na escolha apropriada de um funcional de Lyapunov–Krasovskii e no uso de desigualdades disponíveis na literatura. Para reduzir o conservadorismo das condições de síntese de controladores, novas desigualdades somatórias, que foram utilizadas no capítulo anterior também são utilizadas neste capítulo.

5.1 Propriedades

As seguintes manipulações são consideradas neste capítulo buscando obter um solução convexa direta para o problema de otimização e reduzir o conservadorismo das restrições impostas pela rede.

Lema 4. Seja *A* e *B* matrizes com dimensões apropriadas, com $B = B^T > 0$, então, a seguinte desigualdade é válida:

$$A^T B^{-1} A \ge A + A^T - B \tag{5.1}$$

Lema 5. [Ver (16)] Para uma matrix $R \in \mathbb{S}_n^+$, inteiros $a \in b$ e uma função $u : \mathbb{Z}[a, b] \to \mathbb{R}^n$,

a seguinte desigualdade é válida:

$$\frac{l(l+1)}{2} \sum_{k=a}^{b} \sum_{s=a}^{k} u^{T}(s) R u(s) \ge v_{2}^{T} R v_{2} + \frac{8(l+2)}{l+1} \zeta_{3}^{T} R \zeta_{3}$$
(5.2)

sendo l = b - a, e:

$$\zeta_3 = v_2 - \frac{3}{l+2}v_3, v_2 = \sum_{k=a}^b \sum_{s=a}^k u(s), v_3 = \sum_{k=a}^b \sum_{s=a}^k \sum_{i=a}^s u(i)$$

Com isto, este capítulo apresenta uma solução alternativa para ser analisada e comparada com a alternativa proposta no capítulo anterior. Para isto, considere o seguinte Funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato, descrito pelos seguintes termos:

$$\begin{aligned} V(k) &= \sum_{i=1}^{5} V_{i}(k) \end{aligned} \tag{5.3} \\ V_{1}(k) &= x^{T}(k)P^{-1}x(k), \end{aligned} \\ V_{2}(k) &= \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} e^{T}(i)Z^{-1}e(i), \end{aligned} \\ V_{3}(k) &= \tau(k) \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} x^{T}(i)R_{1}^{-1}x(i), \end{aligned} \\ V_{4}(k) &= \tau_{M} \sum_{i=k-\tau_{M}}^{k-1} x^{T}(i)R_{2}^{-1}x(i), \end{aligned} \\ V_{5}(k) &= \tau_{M} \sum_{j=\tau(k)-1}^{k-1} x^{T}(i)R_{3}^{-1}x(i), \end{aligned} \\ V_{5}(k) &= \tau(k) \sum_{j=\tau(k)-1}^{0} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} x^{T}(i)S_{1}^{-1}x(i), \end{aligned} \\ V_{6}(k) &= \tau(k) \sum_{j=\tau_{M}-1}^{0} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} x^{T}(i)S_{2}^{-1}x(i), \end{aligned} \\ V_{7}(k) &= \tau_{M} \sum_{j=\tau_{M}-1}^{0} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} x^{T}(i)S_{3}^{-1}x(i), \end{aligned} \\ V_{8}(k) &= \tau_{M} \sum_{j=\tau_{M}-1}^{0} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} x^{T}(i)Q_{1}^{-1}x(i). \end{aligned} \\ V_{10}(k) &= \sum_{s=k-\tau(k)}^{k-1} \sum_{j=-\tau_{M}}^{s} \sum_{i=k+j}^{k-1} x^{T}(i)Q_{3}^{-1}x(i). \end{aligned}$$

Note que existem duas diferenças cruciais deste funcional em relação ao funcional adotado no capítulo anterior. A primeira, consiste em que todas as variáveis LMIs do funcional devem ser invertíveis. A segunda diferença é o uso de um termo somatório triplo, em $V_9(k)$, $V_{10}(k)$ e $V_{11}(k)$ que carrega informação a respeito do atraso.

Teorema 4. Considere ϵ , τ_m e τ_M , escalares dados. O sistema de controle em rede em malha fechada dado pela Equação (4.9), com esquema de acionamento baseado em eventos dado pela Equação (4.10), é assintóticamente estável se existirem matrizes simétricas invertíveis *P*, *R_i*, *S_i*, *T_i*, *i* = (1, 2, 3), *W* e *Z*, e matrizes *G_i*, *i* = 1, 2, ..., 11 e matrizes *Y_j*, *j* = 1, 2, ..., *r*, tal que a seguinte LMI seja válida:

$-\Gamma_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$G_1 A_i^T$
*	$-\Gamma_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$Y_j^T B_i^T$
*	*	$-\Gamma_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	$Y_j^T B_i^T$
*	*	*	$-\Gamma_4$	0	0	0	0	0	0	0	0
*	*	*	*	$-\Gamma_5$	0	0	0	0	0	0	0
*	*	*	*	*	$-\Gamma_6$	0	0	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	$-\Gamma_7$	0	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	$-\Gamma_8$	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	-Γ9	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	*	$-\Gamma_{10}$	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	$-\Gamma_{11}$	0
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	-P
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

G_1^T	G_1^T	G_1^T	G_1^T	G_1^T	G_1^T
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
$-\tau_M R_1$	0	0	0	0	0
*	$-\tau(k)R_2$	0	0	0	0
*	*	$-\tau_m R_3$	0	0	0
*	*	*	$-\tau_M^2 S_1$	0	0
*	*	*	*	$-\tau^2(k)S_2$	0
*	*	*	*	*	$-\tau_m^2 S_3$
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

sendo

$$\begin{split} &\Gamma_1 = G_1^T + G_1 - P - \epsilon W, \ \Gamma_2 = \tau(k) \left(G_2^T + G_2 - R_1 \right), \\ &\Gamma_3 = \left(G_3^T + G_3 - Z \right) + W, \ \Gamma_4 = \tau_M \left(G_4^T + G_4 - R_2 \right) - \epsilon W, \\ &\Gamma_5 = \tau_m \left(G_5^T + G_5 - R_3 \right), \ \Gamma_6 = \left(G_6^T + G_6 - X_1 \right), \ \Gamma_7 = \left(G_7^T + G_7 - X_2 \right), \end{split}$$

$$\begin{split} \Gamma_8 &= \left(G_8^T + G_8 - X_3\right), \ \Gamma_9 = \left(G_9^T + G_9 - X_4\right), \\ \Gamma_{10} &= \left(G_{10}^T + G_{10} - X_5\right), \ \Gamma_{11} = \left(G_{11}^T + G_{11} - X_6\right), \\ X_1 &= \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3(\tau_M + 1)}{(\tau_M - 1)}S_1 \\ 0 & 0 & \frac{5(\tau_M + 1)(\tau_M + 2)^2}{(\tau_M - 1)(\tau_M^2 + 11)}S_1 \end{bmatrix}, \ X_4 = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & \frac{8(\tau_M + 2)}{(\tau_M - 1)}Q_1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} S_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{2} = \begin{bmatrix} 0_{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3(\tau(k)+1)}{(\tau(k)-1)}S_{2} \\ 0 & 0 & \frac{5(\tau(k)+1)(\tau(k)+2)^{2}}{(\tau(k)-1)(\tau(k)^{2}+11)}S_{2} \end{bmatrix}, \quad X_{5} = \begin{bmatrix} Q_{2} & 0 \\ 0 & \frac{8(\tau(k)+2)}{(\tau(k)-1)}Q_{2} \end{bmatrix},$$

$$X_{3} = \begin{bmatrix} S_{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3(\tau_{m}+1)}{(\tau_{m}-1)}S_{3} \\ 0 & 0 & \frac{5(\tau_{m}+1)(\tau_{m}+2)^{2}}{(\tau_{m}-1)(\tau_{m}^{2}+11)}S_{3} \end{bmatrix}, \quad X_{6} = \begin{bmatrix} Q_{3} & 0 \\ 0 & \frac{8(\tau_{m}+2)}{(\tau_{m}-1)}Q_{3} \end{bmatrix}.$$

Caso a solução seja factível, os ganhos do controlador fuzzy são dados por $F_j = Y_j G_1^{-1}$.

A demonstração do Teorema 4 encontra-se no Apendice D.

5.2 Exemplo Numérico

Considere o seguinte modelo fuzzy, descrito da seguinte maneira:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,7986 & -0,2078 \\ 0,1799 & 0,9784 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0,7986 & -0,2078 \\ 0,1799 & 0,9784 \end{bmatrix},$$

$$B_{1} = \begin{bmatrix} 0,3119\\ 0,0023 \end{bmatrix}, B_{2} = \begin{bmatrix} 0,1217\\ 0,0023 \end{bmatrix}, \theta(k) = x(k);$$
$$\mu_{1}(\theta(k)) = 1 - \frac{x_{1}^{2}(k)}{25}, \ \mu_{2}(\theta(k)) = 1 - \mu_{1}(\theta(k))$$

Atraso variante no tempo: $\tau_m = 3$; $\tau_M = 5$,

$$\epsilon = 0.4, \ \alpha = 10.$$

As condições iniciais do sistema são $x(0) = [-2 \ 3]$. Para propósitos de simulação, considere o atraso variante no tempo com amplitude aleatória limitada, conforme apresentado na Figura 5.1.



Figura 5.1: Atraso variante no tempo com amplitude limitada.

Para ilustrar a eficácia do controlador proposto usando-se o Teorema 4, os resultados obtidos serão comparados com os apresentados em (35). Os ganhos dos controladores obtidos através do Teorema 4 e (35) são apresentados na Tabela 5.1.

As Figuras 5.2 e 5.3 apresentam a evolução dos estados do sistema, considerando diferentes controladores. Para este caso, foi considerado um atraso mínimo, $\tau_m = 3$ e

	F_1	F_2		
Teorema 4	[-0,0654 - 0,0619]	[-0,3271 - 0,3095]		
(35)	[-0,1903 0.0831]	[-0,5225 0,2217]		

Tabela 5.1: Ganhos dos Controladores Discretos

máximo, τ_M = 5. Note que ambos os controladores estabilizam o sistema, onde pode ser notado que os estados tendem para a origem com a evolução do tempo.



Figura 5.2: Evolução do estado $x_1(k)$, com $\tau_M = 5$.



Figura 5.3: Evolução do estado $x_2(k)$, com $\tau_M = 5$.

As Figuras 5.4 e 5.5 apresentam a evolução dos estados , considerando um atraso mínimo, $\tau_m = 3$ e máximo, $\tau_M = 7$. Note que, assim como no caso anterior, ambos os sistemas controlados são estáveis, com a evolução dos estados tendendo para a origem. Entretanto, é possível notar que os estados do sistema controlado através do Teorema 4 tendem para a origem mais rápido que o sistema controlado através de (35).



Figura 5.4: Evolução do estado $x_1(k)$, com τ_M = 7.



Figura 5.5: Evolução do estado $x_2(k)$, com τ_M = 7.

As Figuras 5.6 e 5.7 apresentam a evolução dos estados do sistema, considerando um atraso mínimo, $\tau_m = 3$ e máximo, $\tau_M = 17$. Note que ao contrário do caso anterior, neste caso apenas o controlador proposto pelo Teorema 4 apresenta um comportamento estável. Este resultado reforça o fato de que tanto a escolha adequada do Funcional de Lyapunov–Krasovskii com termos que explicitam informações a respeito do retardo no tempo, quanto a escolha de desigualdades somatórias, nos auxiliam a obter soluções menos conservadoras em relação ao retardo no tempo.



Figura 5.6: Evolução do estado $x_1(k)$, com $\tau_M = 17$.



Figura 5.7: Evolução do estado $x_2(k)$, com $\tau_M = 17$.

A Tabela 5.2 apresenta o número de eventos gerados e o percentual de economia de dados em relação à um acionamento periódico, considerando o mesmo controlador obtido por meio do Teorema 4 na Tabela 5.1 e diferentes configurações de acionadores

de eventos. Observa-se que a configuração (4.5) envia um número muito menor de dados pela rede, em relação as outras configurações apresentas.

Configuração	Número de Eventos	Economia		
(4.4)	43	52%		
(4.5)	4	95%		
(4.6)	37	58%		

Tabela 5.2: Esquema de Acionamento por Eventos.

As Figuras 5.8, 5.9 e 5.10 apresentam os eventos gerados por diferentes estruturas de geradores de eventos, considerando os ganhos dos controladores obtidos através do Teorema 4, que foram obtidos a partir da configuração 4.4.



Figura 5.8: Gerador de eventos, configuração (4.4).



Figura 5.9: Gerador de eventos, configuração (4.5).



Figura 5.10: Gerador de eventos, configuração (4.6).

As Figuras 5.11, 5.12 e 5.13 apresentam os eventos gerados pelas diferentes estruturas de geradores de eventos, considerando os ganhos dos controladores obtidos em (35). O gerador de eventos da configuração 4.4 gerou 49 eventos, enquanto a configuração 4.5 gerou 5 eventos e a configuração 4.6 gerou 43 eventos, o que acarreta em uma economia de 45%, 94% e 52% dos dados enviados para a rede, respectivamente. Portanto, é possível concluir que o controlador obtido através do Teorema 4 economiza mais largura de banda em relação ao controlador obtido por (35), para este caso específico.



Figura 5.11: Gerador de eventos, configuração (4.4).



Figura 5.12: Gerador de eventos, configuração (4.5).



Figura 5.13: Gerador de eventos, configuração (4.6).

Existe uma diferença significativa entre o número de eventos gerados pela estrutura da Equação (4.5) e o número de eventos gerados pelas estruturas das Equações (4.4)

e (4.6). A Figura 5.14 apresenta a evolução do estado $x_1(k)$ considerando diferentes configurações de geradores de eventos, com um atraso mínimo, $\tau_m = 3$ e máximo, $\tau_M = 5$. Apesar de gerar um número menor de eventos, o gerador de eventos da equação (4.5) é relativamente menos estável em relação às estruturas das equações (4.4) e (4.6).



Figura 5.14: Evolução do estado com diferentes configurações de geradores de eventos.

5.3 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado o problema de síntese de controladores para sistemas de controle em rede em tempo discreto. Ao contrário do capítulo anterior, as condições de síntese obtidas neste capítulo se baseiam na escolha apropriada do funcional de Lyapunov–Krasovskii, em manipulações matemáticas e em desigualdades somatórias, que levam a condições convexas do problema de otimização. Os resultados obtidos mostraram que a alternativa apresentada reduz o conservadorismo das condições de síntese de controlador, tanto no contexto da robustez em relação ao retardo no tempo, quanto à economia da largura de banda.

Conclusões

Neste trabalho foram propostas abordagens para o controle em rede de classes de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi–Sugeno, tanto a tempo contínuo como a tempo discreto, considerando restrições típicas impostas pela rede. Considerando novas desigualdades integrais (ou somatórias), assim como a escolha adequada de um Funcional de Lyapunov–Krasovskii, condições menos conservadoras para o retardo no tempo foram obtidas. As formulações propostas são mais adequadas para tratar problemas com limite superior de atraso mais elevado, o que não é possível com as condições presentes na literatura. Também foi apresentada uma formulação convexa direta do problema de síntese de controladores para sistemas de controle em rede discretos no tempo.

Em termos da metodologia apresentada no trabalho, o desempenho de controle em rede para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy T–S é substancialmente melhorado quando se opta pela escolha de um Funcional de Lyapunov–Krasovskii mais elaborado, do que quando se opta pela escolha aprimorada de desigualdades integrais (ou somatórias).

6.1 Propostas para Trabalhos Futuros

Como propostas para a continuidade destes trabalho, podemos listar o seguinte:

 O uso FLK fuzzy discreto em conjunto com manipulações disponíveis na literatura nas funções de pertinência que aparecem no diferencial do funcional de Lyapunov–Krasovskii.

- 2. Investigar novas desigualdades somatórias que estão disponíveis na linha daquelas apresentadas em (69).
- Investigar a estrutura de controle Não-PDC, para obter condições de síntese relaxadas.
- 4. Explorar novos esquemas de acionamento, como o esquema auto-acionado, visando a redução do uso da largura de banda.

6.2 Produções Relacionadas ao Trabalho

- T. G. Oliveira, R. M. Palhares e V. C. S. Campos. (2016). Output Tracking Control for Networked Control Systems. 13th International Conference on Informatic in Control, Automation and Robotics. 1:255–260. Lisboa, Portugal. 29–31 Julho de 2016.
- T. G. Oliveira, R. M. Palhares, V. C. S. Campos, P. S. Queiroz e E. N. Gonçalves. Improved Takagi-Sugeno Fuzzy Output Tracking Control for Networked Control Systems. Journal of the Franklin Institute, Volume 354: 7280–7305, Issue 16, 2017.

Referências Bibliográficas

- S. Akashi, H. Ishii, and A. Cetinkaya. Self-triggered Control for Communication Reduction in Networked Systems. *IFAC-PapersOnLine*, 49(22):280 – 285, 2016.
- [2] A. Albert. Comparison of Event–triggered and Time–triggered Concepts with Regard to Distributed Control Systems. *Embedded World*, 2004:235–252, 2004.
- [3] A. Anta and P. Tabuada. To sample or not to sample: Self-triggered control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(9):2030–2042, Sept 2010.
- [4] R. A. Borges, R. C. L. F. Oliveira, C. T. Abdallah, and P. L. D. Peres. Robust *H*_∞ Networked Control for Systems with Uncertain Sampling Rates. *IET Control Theory & Applications*, 4(1):50–60, 2010.
- [5] M. F. Braga, C. F. Morais, E. S. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Linear Quadratic Networked Control of Uncertain Polytopic Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 26(11):2299–2313, 2016.
- [6] V. C. S. Campos, A.-T. Nguyen, and R. M. Palhares. A Comparison of Different Upper-bound Inequalities for the Membership Functions Derivative. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):3001–3006, 2017.
- [7] Z. Feng and W. X. Zheng. Improved Stability Condition for Takagi–Sugeno Fuzzy Systems with Time–varying Delay. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016.
- [8] H. Gao, T. Chen, and J. Lam. A New Delay System Approach to Network-Based Control. *Automatica*, 44(1):39–52, 2008.

- [9] J. C. Geromel. Sistemas de Controle em Rede: Análise, Projeto e Aplicação Prática. In XX Congresso Brasileiro de Automática, pages 375 – 384, Belo Horizonte, MG, Setembro 2014.
- [10] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami. A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output–Feedback and Related Problems. *IEEE transactions on Automatic Control*, 42(8):1171–1176, 1997.
- [11] K. Gu, J. Chen, and V. L. Kharitonov. Stability of Time-Delay Systems. Springer Science & Business Media, 2003.
- [12] H.-N.Wu. Delay-dependent Stability Analysis and Stabilization for Discrete-time Fuzzy Systems with State Delay: A Fuzzy Lyapunov-Krasovskii Functional Approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 36(4):954–962, 2006.
- [13] W. P. M. H. Heemels, K. H. Johansson, and P. Tabuada. An Introduction to Eventtriggered and Self-triggered control. In *IEEE 51st Annual Conference on Decision* and Control (CDC), pages 3270–3285. IEEE, 2012.
- [14] Z. Heng, P. Chen, Z. Jin, and Z. Chu. Event-triggered Control in Networked Control Systems: A Survey. In *The 27th Chinese Control and Decision Conference* (2015 CCDC), pages 3092–3097, 2015.
- [15] J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu. A Survey of Recent Results in Networked Control Systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):138–162, 2007.
- [16] L. V. Hien and H. Trinh. New Finite-Sum Inequalities with Applications to Stability of Discrete Time-Delay Dystems. *Automatica*, 71:197 – 201, 2016.
- [17] S. Hu and D. Yue. Event-triggered Control Design of Linear Networked Systems with Quantizations. *ISA Transactions*, 51(1):153 – 162, 2012.
- [18] S. Hu, D. Yue, C. Peng, X. Xie, and X. Yin. Event-Triggered Controller Design of Nonlinear Discrete-Time Networked Control Cystems in T–S Fuzzy Model. *Applied Soft Computing*, 30:400–411, 2015.
- [19] S. Hu, D. Yue, M. Shi, and X. Xie. Discrete-time Event-triggered Control of Nonlinear Wireless Networked Control Systems. 2014, 2014.
- [20] S. Hu, Y. Zhang, and Z. Du. Network–based H_∞ Tracking Control with Event– triggering Sampling Scheme. *IET Control Theory & Applications*, 6(4):533–544, 2012.
- [21] X. Jia, D. Zhang, X. Hao, and N. Zheng. Fuzzy Tracking Control for Nonlinear Networked Control Systems in Takagi–Sugeno Fuzzy Model. *IEEE Transactions* on Cybernetics, 39(4):1073–1079, 2009.
- [22] X. Jiang, Q.L. Han, and X. Yu. Stability Criteria for Linear Discrete-Time Systems with Interval-Like Time-Varying Delay. 4:2817–2822, June 2005.
- [23] S. Kim. T–S Fuzzy Control Design for a Class of Nonlinear Networked Control Systems. Nonlinear Dynamics, 73(1-2):17–27, 2013.
- [24] S. H. Kim. Robust Takagi–Sugeno Fuzzy Control Design for Nonlinear Networked Control Systems with Asynchronous Premise Variables. *IET Control Theory Applications*, 7(6):910–919, April 2013.
- [25] A. Kruszewski, WJ. Jiang, E. Fridman, J. P. Richard, and A. Toguyeni. A Switched System Approach to Exponential Stabilization Through Communication Network. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(4):887–900, 2012.
- [26] H.-K. Lam and F.H.F. Leung. Stability Analysis of Discrete-time Fuzzy-modelbased Control Systems with Time Delay: Time Delay-independent Approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(8):990 – 1000, 2008.
- [27] D. Lee, Y. H. Joo, and I.-H. Ra. Local Stability and Local Stabilization of Discretetime T–S Fuzzy Systems with Time-delay. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 14(1):29–38, 2016.
- [28] Z. Lendek, T. M. Guerra, and J. Lauber. Controller Design for T–S Models Using Delayed Nonquadratic Lyapunov Functions. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 45(3):439–450, 2015.

- [29] Sepideh Marouf, Reza Mahboobi Esfanjani, Ahmad Akbari, and Mohsen Barforooshan. T–S Fuzzy Controller Design for Stabilization of Nonlinear Networked Control Systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 50:135–141, 2016.
- [30] M. Moarref and L. Rodrigues. On Exponential Stability of Linear Networked Control Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(7):1221– 1240, 2014.
- [31] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, and G. S.C. Avellar. A Systematic Approach to Improve Multiple Lyapunov Function Stability and Stabilization Conditions for Fuzzy Systems. *Information Sciences*, 179(8):1149 – 1162, 2009.
- [32] P. T. Nam, P. N. Pathirana, and H. Trinh. Discrete Wirtinger-based Inequality and its Application. *Journal of the Franklin Institute*, 352(5):1893–1905, 2015.
- [33] T. G. Oliveira, R. M. Palhares, V. C. S. Campos, P. S. Queiroz, and E. N. Gonçalves. Improved Takagi–Sugeno Fuzzy Output Tracking Control for Nonlinear Networked Control Systems. *Journal of the Franklin Institute*, 354(16):7280 – 7305, 2017.
- [34] T. G. Oliveira, R. M. Palhares, and VActor C. S. Campos. Output Tracking Control for Networked Control Systems. *Proceedings of the 13th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, pages 255–260, 2016.
- [35] L. Orihuela, P. Millán, C. Vivas, and F.R. Rubio. *H*₂/*H*_∞ Control for Discrete TDS with Application to Networked Control Systems: Periodic and Asynchronous Communication. *Optimal Control Applications and Methods*, 36(1):60–76, 2015.
- [36] O. Ou, H. Zhang, G. Yu, X. Guo, and C. Dang. Stability Analysis and Decentralized \mathcal{H}_{∞} Control for Time-delay Fuzzy Interconnected Systems via Fuzzy Lyapunov-Krasovskii Functional. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 26(4):1731–1744, 2014.
- [37] M. Park, O. Kwon, J. H. Park, S. Lee, and E. Cha. Stability of Time-delay Systems via Wirtinger–based Double Integral Inequality. *Automatica*, 55:204–208, 2015.

- [38] P. Park, W. I. Lee, and S. Y. Lee. Auxiliary function–based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems. *Journal of the Franklin Institute*, 352(4):1378–1396, 2015.
- [39] C. Peng and Q. L. Han. On Designing a Novel Self-Triggered Sampling Scheme for Networked Control Systems with Data Losses and Communication Delays. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(2):1239–1248, 2016.
- [40] C. Peng, Q.L. Han, and D. Yue. To transmit or not to transmit: a discrete eventtriggered communication scheme for networked Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(1):164–170, 2013.
- [41] C. Peng, D. Yue, and M. R. Fei. Relaxed Stability and Stabilization Conditions of Networked Fuzzy Control Systems Subject to Asynchronous Grades of Membership. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(5):1101–1112, 2014.
- [42] R. Postoyan, P. Tabuada, D. Nešić, and A. Anta. Event-triggered and Self-triggered Stabilization of Distributed Networked Control Systems. In 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), pages 2565–2570, 2011.
- [43] Q. Qi and H. Zhang. Output Feedback Control and Stabilization for Networked Control Systems with Packet Losses. *IEEE transactions on cybernetics*, 47(8):2223– 2234, 2017.
- [44] J. Qiu, H. Gao, and M. Chow. Networked Control and Industrial Applications. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 63(2):1203–1206, 2016.
- [45] J. Qiu, H. Gao, and M. Chow. Recent Advances on Fuzzy-Model-Based Nonlinear Networked Control Systems: A Survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(2):1207–1217, 2016.
- [46] L. Qiu, S. Li, B. Xu, and G. Xu. H_∞ Control of Networked Control Systems Based on Markov Jump Unified Model. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(15):2770–2786, 2015.

- [47] L. Qiu, BG. Xu, and SB Li. $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_{\infty}$ Control of Networked Control System with Random Time Delays. *Science China Information Sciences*, 54(12):2615–2630, 2011.
- [48] A. Seuret and F. Gouaisbaut. On the Use of the Wirtinger Inequalities for Time-Delay Systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(14):260–265, 2012.
- [49] A. Seuret and F. Gouaisbaut. Jensen's and Wirtinger's Inequalities for Time-Delay Systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(3):343–348, 2013.
- [50] A. Seuret and F. Gouaisbaut. Wirtinger–Based Integral Inequality: Application to Time–Delay Systems. *Automatica*, 49(9):2860–2866, 2013.
- [51] A. Seuret, F. Gouaisbaut, and E. Fridman. Stability of Discrete-Time Systems with Time-Varying Delays Via a Novel Summation Inequality. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(10):2740–2745, 2015.
- [52] P. Shi, H. Wang, and C. Lim. Network-Based Event-Triggered Control for Singular Systems with Quantizations. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(2):1230– 1238, 2016.
- [53] F. O. Souza, V. C. S. Campos, and R. M. Palhares. On Delay–dependent Stability Conditions for Takagi–Sugeno Fuzzy Systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351(7):3707–3718, 2014.
- [54] F. O. Souza, L. A. Mozelli, M. C. de Oliveira, and R. M. Palhares. LMI Design Method for Networked-based PID Control. *International Journal of Control*, 89(10):1962–1971, 2016.
- [55] F. O. Souza, R. M. Palhares, and L. A. B. Tôrres. Improved Synthesis Method for Network-based Control. *International Journal of Systems Science*, 42(10):1821–1830, 2011.
- [56] J. Sun, G. Liu, and J. Chen. Delay–dependent stability and stabilization of neutral time–delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(12):1364–1375, 2009.

- [57] J. Tan, S. Dian, T. Zhao, and L. Chen. Stability and Stabilization of T–S Fuzzy Systems with Time Delay via Wirtinger-based Double Integral Inequality. *Neurocomputing*, 275:1063 – 1071, 2018.
- [58] C. S. Tseng, B. S. Chen, and H.J. Uang. Fuzzy Tracking Control Design for Nonlinear Dynamic Systems via Takagi–Sugeno Fuzzy Model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(3):381–392, 2001.
- [59] H. Wang, P. Shi, C.-C. Lim, and Q. Xue. Event-triggered Control for Networked Markovian Jump Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(17):3422–3438, 2015.
- [60] L. Wang and H.-K. Lam. Local Stabilization for Continuous-time Takagi–Sugeno Fuzzy Systems with Time Delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018.
- [61] X. Wang and M. D. Lemmon. Event-triggering in Distributed Networked Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3):586–601, 2011.
- [62] Y. Wang, P. Wang, Z. Li, and H. Chen. Observer-based Controller Design for a Class of Nonlinear Networked Control Systems with Random Time-delays Modeled by Markov Chains. *Journal of Control Science and Engineering*, 2017, 2017.
- [63] C. Wu, J. Wang, H. Li, and H. Liang. Fuzzy-model-based Control for Nonlinear Networked Systems with Random Packet Losses. In 5th International Conference on Information Science and Technology, pages 455–460. IEEE, 2015.
- [64] D. Wu, J. Wu, S. Chen, and J. Chu. Stability of Networked Control Systems with Polytopic Uncertainty and Buffer Constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(5):1202–1208, 2010.
- [65] SH. Yang, X. Chen, and JL. Alty. Design Issues and Implementation of Internet-Based Process Control Systems. *Control Engineering Practice*, 11(6):709–720, 2003.
- [66] J. Yu, X. Huang, X. Gong, and X. Tang. H_∞ Fuzzy Predictive Control of Nonlinear NCS with Packet Loss. In 2016 Chinese Control and Decision Conference, pages 5712–5717, 2016.

- [67] D. Yue, E. Tian, and Q.L. Han. A Delay System Method for Designing Eventtriggered Controllers of Networked Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(2):475–481, 2013.
- [68] D. Zhai, A.-Y. Lu, J. Dong, and Q.-L. Zhang. Stability Analysis and State Feedback Control of Continuous-time T–S Fuzzy Systems via a New Switched Fuzzy Lyapunov Function Approach. *Applied Mathematics and Computation*, 293:586 – 599, 2017.
- [69] C.K. Zhang, Y. He, L. Jiang, M. Wu, and H.B. Zeng. Summation Inequalities to Bounded Real Lemmas of Discrete-time Systems with Time-Varying Delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016.
- [70] D. Zhang, Q.L. Han, and X. Jia. Network–based Output Tracking Control for Takagi–Sugeno Fuzzy Systems Using an Event-triggered Communication Scheme. *Fuzzy Sets and Systems*, 273:26–48, 2015.
- [71] D. Zhang, P. Shi, Q.-G. Wang, and L. Yu. Analysis and Synthesis of Networked Control Systems: A Survey of Recent Advances and Challenges. *ISA Transactions*, 66:376 – 392, 2017.
- [72] H. Zhang, M. Li, J. Yang, and D. Yang. Fuzzy Model-Based Robust Networked Control for a Class of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 39(2):437–447, 2009.
- [73] L. Zhang, H. Gao, and O. Kaynak. Network-Induced Constraints in Networked Control Systems – A Survey. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 9(1):403 – 416, Fevereiro 2013.
- [74] X. M. Zhang, Q. L. Han, and X. Yu. Survey on Recent Advances in Networked Control Systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 12(5):1740–1752, 2016.
- [75] X. M. Zhang, Q. L. Han, and B. L. Zhang. An Overview and Deep Investigation on Sampled-Data-Based Event-Triggered Control and Filtering for Networked Systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 13(1):4–16, 2017.

- [76] Z. Zhang, C. Lin, and B. Chen. New Stability and Stabilization Conditions for T–S Fuzzy Systems with Time Delay. *Fuzzy Sets and Systems*, 263:82 – 91, 2015.
- [77] XL. Zhu and GH. Yang. Jensen Integral Inequality Approach to Stability Analysis of Continuous-Time Systems with Time–Varying Delay. *IET Control Theory & Applications*, 2(6):524–534, 2008.
- [78] L. Zou, Z. Wang, H. Dong, Y. Liu, and H. Gao. Time- and Event-driven Communication Process for Networked Control Systems: A Survey. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2014. Hindawi, 2014.
- [79] L. Zou, Z.-D. Wang, and Dong-Hua D.-H. Zhou. Event-based Control and Filtering of Networked Systems: A Survey. *International Journal of Automation and Computing*, 14(3):239–253, 2017.

Apêndice A – Demonstração Teorema 1

A demonstração segue os mesmo passos da demonstração de (70, Anexo A) Tomando a derivada temporal do funcional de Lyapunov (2.20), tem-se:

$$\dot{V}(t) = \eta^{T}(t) \left[e_{1}^{T}(Q_{1} + P_{12} + P_{12}^{T} - R_{4} + \tau_{m}^{2}G_{1})e_{1} + e_{1}^{T}(P_{11})e_{2} + e_{2}^{T}(P_{11})e_{1} + e_{1}^{T}(R_{4})e_{5} \right. \\ \left. + e_{5}^{T}(R_{4})e_{1} - e_{1}^{T}(P_{12})e_{6} - e_{6}^{T}(P_{12})e_{1} + e_{1}^{T}(\tau_{m}P_{22})e_{8} + e_{8}^{T}(\tau_{m}P_{22})e_{1} \right. \\ \left. + e_{2}^{T}(\tau_{m}^{2}R_{1} + \tau^{2}R_{2})e_{2} + e_{2}^{T}(\tau_{m}P_{12})e_{8} + e_{8}^{T}(\tau_{m}P_{12}^{T})e_{2} - e_{5}^{T}(R_{4})e_{5} \right. \\ \left. + e_{6}^{T}(Q_{1} + Q_{2})e_{6} + e_{6}^{T}(\tau_{m}P_{22})e_{8} + e_{8}^{T}(\tau_{m}P_{22})e_{6} + e_{7}^{T}(Q_{2})e_{7} \right. \\ \left. + (\tau_{M} - \tau(t)(e_{1}^{T}(R_{4})e_{2} + e_{2}^{T}(R_{4})e_{1} + e_{2}^{T}(R_{4})e_{1} - e_{2}^{T}(R_{4})e_{5} - e_{5}^{T}(R_{4})e_{2}) \right. \\ \left. + (\tau_{M} - \tau(t))e_{2}^{T}(R_{1})e_{2} - \tau_{m}\int_{t-\tau_{m}}^{t}\dot{x}(s)R_{1}\dot{x}(s)ds - \tau\int_{t-\tau_{M}}^{t-\tau_{m}}\dot{x}(s)R_{2}\dot{x}(s)ds \right. \\ \left. - \int_{t-\bar{\tau}(t)}^{t}\dot{x}(s)R_{3}\dot{x}(s)ds - \int_{-\tau_{m}}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{x}(s)G_{1}\dot{x}(s)ds \right] \eta(t)$$

$$(6.1)$$

sendo

$$\eta^{T}(t) = \begin{bmatrix} x^{T}(t) & \dot{x}^{T}(t) & x^{T}(t-\tau(t)) & \epsilon^{T}(t-\tau(t)) & x^{T}(t-\bar{\tau}(t)) & x^{T}(t-\tau_{m}) & x^{T}(t-\tau_{M}) \\ \frac{1}{\tau_{m}} \int_{t-\tau_{m}}^{t} x^{T}(s) ds & \frac{1}{\tau_{m}^{2}} \int_{t-\tau_{m}}^{t} \int_{\beta}^{t} x^{T}(s) ds d\beta & \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau_{M}}^{t-\tau_{m}} x^{T}(s) ds \\ \frac{1}{\tau^{2}} \int_{t-\tau_{M}}^{t-\tau_{m}} \int_{\beta}^{t-\tau_{m}} x^{T}(s) ds d\beta & \frac{1}{\bar{\tau}(t)} \int_{t-\bar{\tau}(t)}^{t} x^{T}(s) ds \\ \frac{1}{\bar{\tau}(t)^{2}} \int_{t-\bar{\tau}(t)}^{t} \int_{\beta}^{t} x^{T}(s) ds d\beta & \frac{1}{\tau_{m}^{2}} \int_{\tau_{m}}^{0} \int_{t+\beta}^{t} x^{T}(s) ds d\beta \end{bmatrix}$$

$$(6.2)$$

Para qualquer matriz X_i , i = 1,2, com dimensoões apropriadas, as seguintes equa-

ções são válidas para o sistema (2.11) com $\bar{\omega}(t) = 0$.

$$2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_{i}\mu_{j}\eta^{T}(t)\left(e_{1}^{T}X_{1}^{T}+e_{2}^{T}X_{2}^{T}\right)\left[A_{i}e_{1}+B_{i}F_{j}(e_{3}-e_{4})-e_{2}\right]\eta(t)=0$$
(6.3)

Aplicando o Lema 1 aos termos integrais (6.1), tem-se o seguinte:

$$-\tau_{m} \int_{t-\tau_{m}}^{t} \dot{x}^{T}(s) R_{1} \dot{x}(s) ds \leq -\eta^{T}(t) \left[(e_{1} - e_{6})^{T} R_{1}(e_{1} - e_{6}) + 3(e_{1} + e_{6} - 2e_{8})^{T} R_{1}(e_{1} + e_{6} - 2e_{8}) + 5(e_{1} - e_{6} + 6e_{8} - 12e_{9})^{T} R_{1} * (e_{1} - e_{6} + 6e_{8} - 12e_{9}) \right] \eta(t)$$

$$(6.4)$$

$$-(\tau_{M} - \tau_{m}) \int_{t - \tau_{M}}^{t - \tau_{m}} \dot{x}^{T}(s) R_{2} \dot{x}(s) ds \leq -\eta^{T}(t) \left[(e_{6} - e_{7})^{T} R_{2} (e_{6} - e_{7}) + 3(e_{6} + e_{7} - 2e_{10})^{T} R_{1} (e_{6} + e_{7} - 2e_{10}) + 5(e_{6} - e_{7} + 6e_{10} - 12e_{11})^{T} R_{1} * (e_{6} - e_{7} + 6e_{10} - 12e_{11}) \right] \eta(t)$$

$$(6.5)$$

$$-\int_{t-\bar{\tau}(t)}^{t} \dot{x}^{T}(s) R_{3} \dot{x}(s) ds \leq -\eta^{T}(t) \left[\frac{1}{\bar{\tau}} (e_{1} - e_{5})^{T} R_{3} (e_{1} - e_{5}) + \frac{3}{\bar{\tau}} (e_{1} + e_{5} - \frac{2}{\bar{\tau}} e_{12})^{T} R_{3} (e_{1} + e_{5} - \frac{2}{\bar{\tau}} e_{12}) + \frac{5}{\bar{\tau}} (e_{1} - e_{5} + \frac{6}{\bar{\tau}} e_{12} - \frac{12}{\bar{\tau}^{2}} e_{13})^{T} R_{3} * (e_{1} - e_{5} + \frac{6}{\bar{\tau}} e_{12} - \frac{12}{\bar{\tau}^{2}} e_{13}) \right] \eta(t)$$

$$(6.6)$$

$$-\int_{0}^{-\tau_{m}}\int_{t+\beta}^{t}\dot{x}^{T}(s)G_{1}\dot{x}(s)ds \leq -\eta^{T}(t)\left[2(e_{1}-e_{8})^{T}G_{1}(e_{1}-e_{8})\right]$$

$$4(e_{1}+2e_{8}-6e_{14})^{T}G_{1}(e_{1}+2e_{8}-6e_{14})\left[\eta(t)\right]$$
(6.7)

Então, tem-se o seguinte:

$$\dot{V}(t) \le \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \eta^{T}(t) \Omega_{ij}^{(0)}(t) \eta(t)$$
(6.8)

sendo $\Omega_{ij}^{(0)}(t) = (\tau_M - \tau(t))\Omega_{ij}^{(1)}$. Da desigualdade (2.12), concluimos que:

$$\eta^{T}(t) \left[(1-\epsilon)e_{4}^{T}We_{4} - \epsilon e_{3}^{T}We_{3} + \epsilon e_{3}^{T}We_{3} + \epsilon e_{4}^{T}We_{3} \right] \eta(t)$$
(6.9)

Aplicando o S-Procedure, percebemos que para todo $\eta(t)$ diferente de zero satisfazendo (6.9), a desigualdade (6.8) é equivalente a existência de um $\sigma > 0$, tal que:

$$\dot{V}(t) \le \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \eta^{T}(t) \bar{\Omega}_{ij}^{(0)}(t) \eta(t)$$
(6.10)

sendo $\bar{\Omega}_{ij}^{(0)}(t) = \Omega_{ij}^{(0)}(t) - \sigma \left[(1 - \epsilon) e_4^T W e_4 - \epsilon e_3^T W e_3 + \epsilon e_3^T W e_3 + \epsilon e_4^T W e_3 \right].$

Para verificar que (6.10) converge, note que temos o seguinte:

$$\eta^{T}(t) \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j}^{(k)} \bar{\Omega}_{ij}(t) \eta(t) - v^{T}(t) T v(t) < 0$$
(6.11)

com

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1,2r} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2,2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{2r,1} & T_{2r,2} & \dots & T_{2r,2r} \end{bmatrix} < 0,$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \eta^T \mathcal{E}_0 & \dots & \mu_r \eta^T \mathcal{E}_0 & \mu_1^{(k)} \eta^T \mathcal{E}_0 & \dots & \mu_r^{(k)} \eta^T \mathcal{E}_0 \end{bmatrix}^T$$

sendo $\mathcal{E}_0 = \begin{bmatrix} e_1^T & e_2^T & e_3^T & e_4^T \end{bmatrix}$.

Uma vez que $\bar{\Omega}_{ij}^{(0)}(t)$ seja uma combinação convexa de $\Phi_{ij}^{(1)}$ e $\Phi_{ij}^{(2)}$ em $\tau(t) \in [\tau_m, \tau_M]$,

pode ser visto que (6.11) é válido se a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\eta^{T}(t) \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j}^{(k)} \Phi_{ij}^{(l)} \eta(t) - v^{T}(t) T v(t) < 0,$$
(6.12)

sendo l = 1, 2; $\Phi_{ij}^{(1)} = \bar{\Omega}_{ij}^{(0)}(t)|_{\tau(t)=\tau_m} e \Phi_{ij}^{(2)} = \bar{\Omega}_{ij}^{(0)}(t)|_{\tau(t)=\tau_M}$.

A partir de (6.12), tem-se que:

$$\begin{split} \eta^{T}(t) \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \left(\Phi_{ij}^{(l)} - \mathcal{E}_{0} \left(T_{i,(j+r)} + T_{(j+r),j} \right) \mathcal{E}_{0}^{T} \right) \eta(t) \\ &- \eta^{T}(t) \sum_{i=1}^{r} \left(\mu_{i}^{2} \mathcal{E}_{0} T_{i,i} \mathcal{E}_{0}^{T} + \mu_{i}^{(k)^{2}} \mathcal{E}_{0} T_{(i+r),(i+r)} \mathcal{E}_{0}^{T} \right) \eta(t) \\ &- \eta^{T}(t) \sum_{i=1}^{r} \sum_{i < j \leq r} \mu_{i} \mu_{j} \mathcal{E}_{0} \left(T_{i,j} + T_{j,i} \right) \mathcal{E}_{0}^{T} \eta(t) \\ &- \eta^{T}(t) \sum_{i=1}^{r} \sum_{i < j \leq r} \mu_{i}^{(k)} \mu_{j}^{(k)} \mathcal{E}_{0} \left(T_{(i+r),(j+r)} + T_{(j+r),(i+r)} \right) \mathcal{E}_{0}^{T} \eta(t) \\ &= \eta^{T}(t) \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{i} \mathcal{K}_{j} \left(\Phi_{ij}^{(l)} - \mathcal{E}_{0} \left(T_{i,(j+r)} + T_{(j+r),i} \right) \mathcal{E}_{0}^{T} \right) \eta(t) \\ &- \eta^{T}(t) \mathcal{E}_{0} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \frac{T_{i,j} + T_{j,i}}{2} \mathcal{E}_{0}^{T} \eta(t) \\ &= \eta^{T}(t) \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j}^{(k)} \left(\Phi_{ij}^{(l)} - \mathcal{E}_{0} \left(T_{i,(j+r)} + T_{(j+r),(i+r)} \right) \mathcal{E}_{0}^{T} \eta(t) \\ &= \eta^{T}(t) \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j}^{(k)} \left(\Phi_{ij}^{(l)} - \mathcal{E}_{0} \left(T_{i,(j+r)} + T_{(j+r),(i+r)} \right) \mathcal{E}_{0}^{T} \eta(t) \\ &- \eta^{T}(t) \mathcal{E}_{0} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j}^{(k)} \mathcal{E}_{0} \left(\frac{T_{i,j} + T_{j,i} + T_{(i+r),(j+r)} + T_{(j+r),(i+r)} }{2} \right) \mathcal{E}_{0}^{T} \eta(t) \\ &- \eta^{T}(t) \mathcal{E}_{0} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \left(\mu_{j} - \mu_{i}^{(k)} \right) \left(\frac{T_{i,j} + T_{j,i}}{2} \right) \mathcal{E}_{0}^{T} \eta(t) \\ &+ \eta^{T}(t) \mathcal{E}_{0} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \left(\mu_{i} - \mu_{i}^{(k)} \right) \mu_{j}^{(k)} \left(\frac{T_{(i+r),(j+r)} + T_{(j+r),(i+r)}}{2} \right) \mathcal{E}_{0}^{T} \eta(t) \end{split}$$

$$(6.13)$$

Considerando matrizes M_i e N_i , (i = 1, 2, ..., r) com dimensões apropriadas, as

seguintes igualdades são válidas:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_j \left(\mu_i - \mu_j^{(k)} \right) M_i = 0$$
(6.14)

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \left(\mu_i - \mu_i^{(k)} \right) \mu_j^k N_j = 0$$
(6.15)

Posto isto, tem-se que:

$$\eta^{T}(k) \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j}^{(k)} \Phi_{ij}^{(l)} \eta(t) - v^{T}(t) T v(t) \leq \eta^{T}(t) \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j}^{(k)} \left(\Phi_{ij}^{(l)} - \mathcal{E}_{0} \Upsilon_{ij} \mathcal{E}_{0}^{T} \right) \eta(t) \leq 0$$
(6.16)

Agora, adicionando o índice \mathcal{H}_{∞} de seguimento de referência no funcional de Lyapunov, temos o seguinte:

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{i} \mu_{j} \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{ij}^{(0)}(t) & \Gamma_{i} \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$
$$-e^{T}(t) Ue(t) - \gamma^{2} \omega^{T}(t) \omega(t) + \gamma^{2} \omega^{T}(t) \omega(t)$$
(6.17)

sendo $\bar{\Phi}_{ij}^{(0)}(t) = \bar{\Omega}_{ij}^{(0)}(t) + e_1 \bar{C}_i^T U \bar{C}_i e_1.$

Aplicando o complemento de Schur, temos o seguinte:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{ij}^{(0)}(t) - \mathcal{E}_0 \Upsilon_{ij} \mathcal{E}_0^T & \Gamma_i \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \le 0, \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} = 1, 2, \dots, \mathbf{r}$$
(6.18)

Então, podemos concluir que:

$$\dot{V}(t) + e^{T}(t)Ue(t) - \gamma^{2}\omega^{T}(t)\omega(t) < 0$$
(6.19)

e o índice \mathcal{H}_{∞} de seguimento de referência é assegurado para o sistema (2.11).

Finalmente, fazendo uso de transformação de variáveis, $\Delta = \text{diag} \{X, X, X, X\}$, X =

 $X_1^{-1} = \sigma X_2^{-1}, \ \bar{P}_{ij} = X^T P_{ij} X(i,j = 1,2; i \le j), \ \bar{Q}_i = X^T Q_i X(i,j = 1,2), \ \bar{R}_i = X^T R_i X(i,j = 1,2,3,4,5), \ \bar{T}_{ij} = \Delta^T T_{ij} \Delta \ (i,j = 1,2,\ldots,r), \ \bar{M}_i = \Delta^T M_i \Delta \ (i,j = 1,2,\ldots,r) \ e \ \bar{N}_i = \Delta^T N_i \Delta \ (i,j = 1,2,\ldots,r), \ recuperam-se as condições apresentadas no Teorema 1.$

Apêndice B – Demonstração Teorema 2

A demonstração segue os mesmo passos da demonstração de (70, Anexo A) Tomando a derivada temporal do funcional de Lyapunov (2.20), tem-se:

$$\begin{split} \dot{V}(t) = \eta^{T}(t) \left[e_{1}^{T}(Q_{1} + \sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{12} + \sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{12}^{T} - R_{4} + \tau_{m}^{2}G_{1})e_{1} + e_{1}^{T}(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{11})e_{2} \right. \\ \left. + e_{5}^{T}(R_{4})e_{1} + e_{2}^{T}(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{11})e_{1} + e_{1}^{T}(R_{4})e_{5} \right. \\ \left. - e_{1}^{T}(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{12})e_{6} - e_{6}^{T}(\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{12})e_{1} + e_{1}^{T}(\tau_{m}\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{22})e_{8} + e_{8}^{T}(\tau_{m}\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{22})e_{1} \right. \\ \left. + e_{2}^{T}(\tau_{m}^{2}R_{1} + \tau^{2}R_{2})e_{2} + e_{2}^{T}(\tau_{m}\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{12})e_{8} + e_{8}^{T}(\tau_{m}\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{12})e_{2} - e_{5}^{T}(R_{4})e_{5} \right. \\ \left. + e_{6}^{T}(Q_{1} + Q_{2})e_{6} + e_{6}^{T}(\tau_{m}\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{22})e_{8} + e_{8}^{T}(\tau_{m}\sum_{i=1}^{r} \mu_{i}P_{22})e_{6} + e_{7}^{T}(Q_{2})e_{7} \right. \\ \left. + (\tau_{M} - \tau(t))(e_{1}^{T}(R_{4})e_{2} + e_{2}^{T}(R_{4})e_{1} + e_{2}^{T}(R_{4})e_{1} - e_{2}^{T}(R_{4})e_{5} - e_{5}^{T}(R_{4})e_{2} \right) \\ \left. + (\tau_{M} - \tau(t))(e_{1}^{T}(R_{4})e_{2} + e_{1}^{T}\sum_{i=1}^{r} \dot{h}_{i}(x(t))(P_{11} + X_{11})e_{1} + e_{1}^{T}\sum_{i=1}^{r} \dot{h}_{i}(x(t))(P_{12} + X_{12})e_{8} \right. \\ \left. + e_{8}^{T}\sum_{i=1}^{r} \dot{h}_{i}(x(t))(P_{12} + X_{12})^{T}e_{1} + e_{8}^{T}\sum_{i=1}^{r} \dot{h}_{i}(x(t))(P_{22} + X_{22})e_{8} \right] \eta(t) \\ \left. - \tau_{m}\int_{t-\tau_{m}}^{t} \dot{x}(s)R_{1}\dot{x}(s)d_{5} - \tau \int_{t-\tau_{m}}^{t-\tau_{m}} \dot{x}(s)R_{2}\dot{x}(s)d_{5} \right.$$
 (6.20)

sendo

$$\eta^{T}(t) = \begin{bmatrix} x^{T}(t) & \dot{x}^{T}(t) & x^{T}(t-\tau(t)) & \epsilon^{T}(t-\tau(t)) & x^{T}(t-\bar{\tau}(t)) & x^{T}(t-\tau_{m}) & x^{T}(t-\tau_{M}) \\ \frac{1}{\tau_{m}} \int_{t-\tau_{m}}^{t} x^{T}(s) ds & \frac{1}{\tau_{m}^{2}} \int_{t-\tau_{m}}^{t} \int_{\beta}^{t} x^{T}(s) ds d\beta & \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau_{M}}^{t-\tau_{m}} x^{T}(s) ds \\ \frac{1}{\tau^{2}} \int_{t-\tau_{M}}^{t-\tau_{m}} \int_{\beta}^{t-\tau_{m}} x^{T}(s) ds d\beta & \frac{1}{\bar{\tau}(t)} \int_{t-\bar{\tau}(t)}^{t} x^{T}(s) ds \\ \frac{1}{\bar{\tau}(t)^{2}} \int_{t-\bar{\tau}(t)}^{t} \int_{\beta}^{t} x^{T}(s) ds d\beta & \frac{1}{\tau_{m}^{2}} \int_{\tau_{m}}^{0} \int_{t+\beta}^{t} x^{T}(s) ds d\beta \end{bmatrix}$$

$$(6.21)$$

sendo

$$\eta^{T}(t) = \begin{bmatrix} x^{T}(t) & \dot{x}^{T}(t) & x^{T}(t-\tau(t)) & \varepsilon_{k}^{T}(t-\tau(t)) & x^{T}(t-\bar{\tau}(t)) & x^{T}(t-\tau_{m}) & x^{T}(t-\tau_{M}) \\ \frac{1}{\tau_{m}} \int_{t-\tau_{m}}^{t} x^{T}(s) ds & \frac{1}{\tau_{m}^{2}} \int_{t-\tau_{m}}^{t} \int_{\beta}^{t} x^{T}(s) ds d\beta & \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau_{M}}^{t-\tau_{m}} x^{T}(s) ds \\ \frac{1}{\tau^{2}} \int_{t-\tau_{M}}^{t-\tau_{m}} \int_{\beta}^{t-\tau_{m}} x^{T}(s) ds d\beta & \frac{1}{\bar{\tau}(t)} \int_{t-\bar{\tau}(t)}^{t} x^{T}(s) ds \\ \frac{1}{\bar{\tau}(t)^{2}} \int_{t-\bar{\tau}(t)}^{t} \int_{\beta}^{t} x^{T}(s) ds d\beta & \frac{1}{\tau_{m}^{2}} \int_{\tau_{m}}^{0} \int_{t+\beta}^{t} x^{T}(s) ds d\beta \end{bmatrix}$$

$$(6.22)$$

Aplicando o Lema 1 aos termos integrais (6.1), tem-se o seguinte:

$$-\tau_{m} \int_{t-\tau_{m}}^{t} \dot{x}(s) R_{1} \dot{x}(s) ds \leq -\eta^{T}(t) \left[(e_{1} - e_{6})^{T} R_{1}(e_{1} - e_{6}) + 3(e_{1} + e_{6} - 2e_{8})^{T} R_{1}(e_{1} + e_{6} - 2e_{8}) + 5(e_{1} - e_{6} + 6e_{8} - 12e_{9})^{T} R_{1} * (e_{1} - e_{6} + 6e_{8} - 12e_{9}) \right] \eta(t)$$

$$(6.23)$$

$$-(\tau_{M} - \tau_{m}) \int_{t-\tau_{M}}^{t-\tau_{m}} \dot{x}(s) R_{2} \dot{x}(s) ds \leq -\eta^{T}(t) \left[(e_{6} - e_{7})^{T} R_{2} (e_{6} - e_{7}) + 3(e_{6} + e_{7} - 2e_{10})^{T} R_{1} (e_{6} + e_{7} - 2e_{10}) + 5(e_{6} - e_{7} + 6e_{10} - 12e_{11})^{T} R_{1} * (e_{6} - e_{7} + 6e_{10} - 12e_{11}) \right] \eta(t)$$

$$(6.24)$$

$$-\int_{t-\bar{\tau}(t)}^{t} \dot{x}(s) R_{3} \dot{x}(s) ds \leq -\eta^{T}(t) \left[\frac{1}{\bar{\tau}} (e_{1} - e_{5})^{T} R_{3} (e_{1} - e_{5}) + \frac{3}{\bar{\tau}} (e_{1} + e_{5} - \frac{2}{\bar{\tau}} e_{12})^{T} R_{3} (e_{1} + e_{5} - \frac{2}{\bar{\tau}} e_{12}) + \frac{5}{\bar{\tau}} (e_{1} - e_{5} + \frac{6}{\bar{\tau}} e_{12} - \frac{12}{\bar{\tau}^{2}} e_{13})^{T} R_{3} * (e_{1} - e_{5} + \frac{6}{\bar{\tau}} e_{12} - \frac{12}{\bar{\tau}^{2}} e_{13}) \right] \eta(t)$$

$$(6.25)$$

$$-\int_{0}^{-\tau_{m}}\int_{t+\beta}^{t}\dot{x}(s)G_{1}\dot{x}(s)ds \leq -\eta^{T}(t)\left[2(e_{1}-e_{8})^{T}G_{1}(e_{1}-e_{8})\right]$$

$$4(e_{1}+2e_{8}-6e_{14})^{T}G_{1}(e_{1}+2e_{8}-6e_{14})\left[\eta(t)\right]$$
(6.26)

De acordo com o Lema 2, temos o seguinte:

•
$$e_1^T \sum_{i=1}^r \dot{\mu}_i(x(t))(P_{11} + M_{11})e_1 \le e_1^T P_{\phi_{11}}e_1$$

• $e_1^T \sum_{i=1}^r \dot{\mu}_i(x(t))(P_{12} + M_{12})e_1 \le e_1^T P_{\phi_{12}}e_8$
• $e_1^T \sum_{i=1}^r \dot{\mu}_i(x(t))(P_{12} + M_{12})^T e_1 \le e_8^T P_{\phi_{12}}^T e_1$
• $e_1^T \sum_{i=1}^r \dot{\mu}_i(x(t))(P_{22} + M_{22})e_1 \le e_8^T P_{\phi_{22}}e_8$

Daqui em diante, a demonstração segue os passos da Equação 6.8 em diante no Apêndice A, portanto, serão omitidos.

Apêndice C – Demonstração Teorema 3

Tomando o diferencial do funcional discreto de Lyapunov (4.12), tem-se:

$$\begin{split} \Delta V(k) = & x^T(k+1) P x(k+1) - x^T(k) P x(k) \\ & x^T(k) Z_1 x(k) - x^T(k-\tau_M) Z_1 x(k-\tau_M) \\ & x^T(k) Z_2 x(k) - x^T(k-\tau_m) Z_2 x(k-\tau_m) \\ & \tau_M^2 \Delta x^T(k) Z_3 \Delta x(k) - \tau_M \sum_{j=k-\tau_M}^{k-1} \Delta x^T(k) Z_3 \Delta x(k) \\ & \Delta \tau^2 \Delta x^T(k) Z_4 \Delta x(k) - \Delta \tau \sum_{j=k-\tau_M}^{k-\tau_m-1} \Delta x^T(k) Z_4 \Delta x(k) \end{split}$$

sendo $\Delta \tau = \tau_M - \tau_m$. O termo \star em $x^T R \star$ simboliza $x^T R x$. Aplicando a desigualdade do Lema (3) nos termos somatórios, temos:

$$\begin{aligned} &-\tau_{M} \sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-1} \Delta x^{T}(k) Z_{3} \Delta x(k) \leq \left[\sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-1} \Delta x(k) \right]^{T} Z_{3} \right[\star \right] \\ &+ \frac{3(\tau_{M}+1)}{(\tau_{M}-1)} \left[\sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-1} \Delta x(k) - \frac{2}{\tau_{M}+1} \sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-1} \sum_{s=k-\tau_{M}}^{k} \Delta x(s) \right]^{T} Z_{3} \right[\star \right] \\ &+ \frac{5(\tau_{M}+1)(\tau_{M}+2)^{2}}{(\tau_{M}-1)(\tau_{M}^{2}+11)} \left[\sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-1} \Delta x(k) - \frac{6}{\tau_{M}+1} \sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-1} \sum_{s=k-\tau_{M}}^{k} \Delta x(s) + \frac{12}{(\tau_{M}+1)(\tau_{M}+2)} \sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-1} \sum_{s=k-\tau_{M}}^{k} \Delta x(i) \right]^{T} Z_{3} \left[\star \right] \end{aligned}$$

$$\begin{split} &-\Delta\tau\sum_{j=k-\tau_M}^{k-\tau_m-1}\Delta x^T(k)Z_4\Delta x(k) \leq \left[\sum_{j=k-\tau_M}^{k-\tau_m-1}\Delta x(k)\right]^T Z_4\left[\star\right] \\ &+\frac{3(\Delta\tau+1)}{(\Delta\tau-1)}\left[\sum_{j=k-\tau_M}^{k-\tau_m-1}\Delta x(k) - \frac{2}{\Delta\tau+1}\sum_{j=k-\tau_M}^{k-\tau_m-1}\sum_{s=k-\tau_M}^{k-\tau_m}\Delta x(s)\right]^T Z_4\left[\star\right] \\ &+\frac{5(\Delta\tau+1)(\Delta\tau+2)^2}{(\Delta\tau-1)(\Delta\tau^2+11)}\left[\sum_{j=k-\tau_M}^{k-\tau_m-1}\Delta x(k-\tau_m) - \frac{6}{\Delta\tau+1}\sum_{j=k-\tau_M}^{k-\tau_m-1}\sum_{s=k-\tau_M}^{k-\tau_m}\Delta x(s) + \frac{12}{(\Delta\tau+1)(\Delta\tau+2)}\sum_{j=k-\tau_M}^{k-\tau_m-1}\sum_{s=k-\tau_M}^{k-\tau_m}\Delta x(i)\right]^T Z_4\left[\star\right] \end{split}$$

Definindo o vetor de estados aumentado como:

$$\eta^{T}(k) = \left[x^{T}(k) \ x^{T}(k - \tau(k)) \ x^{T}(k - \tau_{m}) \ x^{T}(k - \tau_{M}) \ \epsilon^{T}(k - \tau(k)) \ \sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-1} \sum_{s=k-\tau_{M}}^{k} \Delta x^{T}(s) \right]$$
$$\sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-1} \sum_{s=k-\tau_{M}}^{s} \Delta x^{T}(i) \ \sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-\tau_{m}-1} \sum_{s=k-\tau_{M}}^{k-\tau_{m}} \Delta x^{T}(s) \ \sum_{j=k-\tau_{M}}^{k-\tau_{m}-1} \sum_{s=k-\tau_{M}}^{k-\tau_{m}} \Delta x^{T}(i) \right]$$

Sendo assim, o diferencial do funcional discreto de Lyapunov pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\Delta V(k) = \eta^{T}(k) \left[M + \tilde{A}_{ij}^{T} P \tilde{A}_{ij} + (\tilde{A}_{ij} - \tilde{I})^{T} (\tau_{m}^{2} Z_{3} + \Delta \tau^{2} Z_{4}) (\tilde{A}_{ij} - \tilde{I}) \right] \eta(k)$$
(6.27)

sendo

$$M = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 & \Gamma_{14} & 0 & \Gamma_{16} & \Gamma_{17} & 0 & 0 \\ * & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{28} & \Gamma_{29} \\ * & * & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} & 0 & \Gamma_{36} & \Gamma_{37} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{48} & \Gamma_{49} \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} & \Gamma_{67} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Gamma_{88} & \Gamma_{89} \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 & \Gamma_{99} \end{bmatrix},$$

$$\begin{split} &\Gamma_{11} = -P + Z_1 + Z_2 - (K_1 + K_2 + 1)Z_3 - \alpha Z_5, \\ &\Gamma_{14} = -(1 + 2K_1 + 6K_2)Z_3, \\ &\Gamma_{16} = -(2K_1 - 6K_2)Z_3, \\ &\Gamma_{17} = -(12K_1)Z_3, \\ &\Gamma_{22} = -Z_2 - (1 + K_3 + K_4)Z_4 \\ &\Gamma_{23} = (1 - K_3 - K_4)Z_4, \\ &\Gamma_{23} = -(2K_3 + 6K_4)Z_4, \\ &\Gamma_{29} = -12K_4Z_4, \\ &\Gamma_{33} = -Z_1 - (1 + K_1 + K_2)Z_3 - (1 + K_3 + K_4)Z_4, \\ &\Gamma_{34} = -(2K_1 + 6K_2)Z_3, \\ &\Gamma_{36} = -(2K_3 + 6K_4)Z_4, \\ &\Gamma_{37} = -12K_2Z_4, \\ &\Gamma_{44} = -(4K_1 + 36K_2)Z_3, \\ &\Gamma_{48} = -(2K_3 + 6K_4)Z_4, \\ &\Gamma_{49} = -(12K_2)Z_4, \\ &\Gamma_{55} = Z_5, \\ &\Gamma_{66} = -(4K_1 + 36K_2)Z_3, \\ &\Gamma_{67} = -72K_2Z_3, \\ \end{split}$$

$$\begin{split} &\Gamma_{77} = 144K_2Z_3, \\ &\Gamma_{88} = (4K_3 + 36K_4)Z_4, \\ &\Gamma_{89} = -72K_3Z_4, \\ &\Gamma_{99} = 144K_3Z_4, \\ &K_1 = \frac{3(\tau_M + 1)}{(\tau_M - 1)}, \\ &K_2 = \frac{5(\tau_M + 1)(\tau_M + 2)^2}{(\tau_M - 1)(\tau_M^2 + 11)}, \\ &K_3 = \frac{3(\Delta \tau + 1)}{(\Delta \tau - 1)}, \\ &K_4 = \frac{5(\Delta \tau + 1)(\Delta \tau + 2)^2}{(\Delta \tau - 1)(\Delta \tau^2 + 11)}, \\ &\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i & B_iF_j & 0 & 0 & B_iF_j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &\tilde{I} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{split}$$

Portanto

$$\left[M + \tilde{A_{ij}}^{T} P \tilde{A_{ij}} + (\tilde{A_{ij}} - \tilde{I})^{T} (\tau_{m}^{2} Z_{3} + \Delta \tau^{2} Z_{4}) (\tilde{A_{ij}} - \tilde{I})\right] < 0$$
(6.28)

A condição acima considera as entradas exógenas nulas, ou seja, $\bar{\omega}(k) = 0$. Para o caso com entradas exógenas diferentes de zero, a diferença do funcional de Lyapunov pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\Delta V(k) = \begin{bmatrix} \eta(k) \\ \bar{\omega}(k) \end{bmatrix}^{T} \left(\begin{bmatrix} M & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i}^{T} \\ \bar{E}_{i}^{T} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i} & \bar{E}_{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\tilde{A}_{i} - \tilde{I})^{T} \\ \bar{E}_{i}^{T} \end{bmatrix} (\tau_{m}^{2} Z_{3} + \Delta \tau^{2} Z_{4}) \begin{bmatrix} (\tilde{A} - \tilde{I}) & \bar{E}_{i} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \eta(k) \\ \bar{\omega}(k) \end{bmatrix}$$
(6.29)

Por fim, inserimos o termo relacionado ao índice \mathcal{H}_{∞} , da seguinte maneira:

$$\Delta V(k) = \Delta V(k) + z_{\infty}^{T}(k)z_{\infty}(k) - \gamma^{2}\omega^{T}(k)\omega(k) + \gamma^{2}\omega^{T}(k)\omega(k) - z_{\infty}^{T}(k)z_{\infty}(k)$$
(6.30)

Considerando $z_{\infty}^{T}(k)z_{\infty}(k) = x^{T}(k)\tilde{C}_{\infty}^{T}\tilde{C}_{\infty}x(k)$, sendo $\tilde{C}_{\infty} = [\bar{C}_{i} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Entao, tem-se p seguinte :

$$\Delta V(k) = \begin{bmatrix} \eta(k) \\ \bar{\omega}(k) \end{bmatrix}^{T} \left(\begin{bmatrix} M + \tilde{C}_{z}(k) & 0 \\ * & -\gamma^{2}I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}^{T} \\ \bar{E}_{i}^{T} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij} & \bar{E}_{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\tilde{A}_{ij} - \tilde{I})^{T} \\ \bar{E}_{i}^{T} \end{bmatrix} (\tau_{m}^{2}Z_{3} + \Delta\tau^{2}Z_{4}) \begin{bmatrix} (\tilde{A}_{ij} - \tilde{I}) & \bar{E}_{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(k) \\ \bar{\omega}(k) \end{bmatrix}$$

$$(6.31)$$

sendo $\tilde{C}_z(k) = \tilde{C}_{\infty}^T \tilde{C}_{\infty}$.

Fazendo uso de mudança de variáveis, nós conseguimos obter o resultado realizando a pré e pós-multiplicação do termo acima por *diag* { P^{-1} , P^{-1} , P^{-1} , P^{-1} , P^{-1} , I, I, I, I, I}, e as matrizes ficam definidas da seguinte maneira: $X = P^{-1}$, $Y_i = XZ_iX$, (i = 1, ..., 4) e $Y_5 = XWX$.

Apêndice D – Demonstração Teorema 4

Tomando a diferença do funcional de Lyapunov-Krasovskii, temos:

$$\Delta V(k) = \sum_{i=1}^{11} \Delta V_i(k)$$
(6.32)

$$\Delta V_1(k) = x^T(k+1)P^{-1}x(k+1) - x^T(k)P^{-1}x^T(k)$$

$$\Delta V_2(k) = e^T(k)Z^{-1}e(k) - e^T(k-\tau(k))Z^{-1}e^T(k-\tau(k))$$

$$\Delta V_3(k) = \tau(k)x^T(k)R_1^{-1}x(k) - \tau(k)x^T(k-\tau(k))R_1^{-1}x(k-\tau(k))$$

$$\Delta V_4(k) = \tau_M x^T(k)R_2^{-1}x(k) - \tau_M x^T(k-\tau_M)R_2^{-1}x(k-\tau_M)$$

$$\Delta V_5(k) = \tau_m x^T(k)R_3^{-1}x(k) - \tau_m x^T(k-\tau_m)R_3^{-1}x(k-\tau_m)$$

$$\Delta V_5(k) = \tau^2(k)x^T(k)S_1^{-1}x(k) - \tau(k)\sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} x^T(i)S_1^{-1}x^T(i)$$

$$\Delta V_7(k) = \tau_M^2 x^T(k)S_2^{-1}x(k) - \tau_M \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} x^T(i)S_2^{-1}x^T(i)$$

$$\Delta V_8(k) = \tau_m^2 x^T(k)S_3^{-1}x(k) - \tau_m \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} x^T(i)S_3^{-1}x^T(i)$$

$$\Delta V_{9}(k) = (\tau(K) - 1) x^{T}(k) Q_{1}^{-1} x(k) - \sum_{j=\tau(k)}^{-1} \sum_{i=k-\tau(k)}^{k+j} x^{T}(i) Q_{1}^{-1} x(i)$$

$$\Delta V_{10}(k) = (\tau_{M} - 1) x^{T}(k) Q_{2}^{-1} x(k) - \sum_{j=\tau_{M}}^{-1} \sum_{i=k-\tau_{M}}^{k+j} x^{T}(i) Q_{2}^{-1} x(i)$$

$$\Delta V_{11}(k) = (\tau_{m} - 1) x^{T}(k) Q_{3}^{-1} x(k) - \sum_{j=\tau_{m}}^{-1} \sum_{i=k-\tau_{m}}^{k+j} x^{T}(i) Q_{3}^{-1} x(i)$$

Fazendo uso dos Lemas 3 e 5 nos termos somatórios de (6.32), temos:

$$-\tau_{M} \sum_{i=k-\tau_{M}}^{k-1} x^{T}(i) S_{1}^{-1} x(i) \leq -\eta_{1}^{T}(k) \underbrace{\begin{bmatrix} S_{1}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & B_{22} S_{1}^{-1} & 0\\ 0 & 0 & B_{33} S_{1}^{-1} \end{bmatrix}}_{X_{1}} \eta_{1}(k)$$

sendo $B_{22} = \frac{-3(\tau_M + 1)}{(\tau_M - 1)}, B_{33} = \frac{5(\tau_M + 1)(\tau_M + 2)^2}{(\tau_M - 1)(\tau_M^2 + 11)} e \eta_1^T = \begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T & v_3^T \end{bmatrix}^T$, com:

$$v_{1} = \sum_{i=k-\tau_{M}}^{k-1} x(k), \quad v_{2} = \sum_{i=k-\tau_{M}}^{k-1} x(t) - \frac{2}{\tau_{M}} \sum_{i=k-\tau_{M}}^{k-1} \sum_{j=k-\tau_{M}}^{k} x(j),$$
$$v_{3} = \sum_{i=k-\tau_{M}}^{k-1} x(t) - \frac{6}{\tau_{M}} \sum_{i=k-\tau_{M}}^{k-1} \sum_{j=k-\tau_{M}}^{k} x(j) + \frac{12}{\tau_{M}(\tau_{M}+1)} \sum_{i=k-\tau_{M}}^{k-1} \sum_{j=k-\tau_{M}}^{k} x(s)$$

$$-\tau(k)\sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} x^{T}(i)S_{2}^{-1}x(i) \leq -\eta_{2}^{T}(k)\underbrace{\begin{bmatrix}S_{2}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & C_{22}S_{2}^{-1} & 0\\ 0 & 0 & C_{33}S_{2}^{-1}\end{bmatrix}}_{X_{2}}\eta_{2}(k)$$

sendo $C_{22} = \frac{-3(\tau(k)+1)}{(\tau(k)-1)}, C_{33} = \frac{5(\tau(k)+1)(\tau(k)+2)^2}{(\tau(k)-1)(\tau(k)^2+11)} e \eta_2^T = \begin{bmatrix} v_4^T & v_5^T & v_6^T \end{bmatrix}^T,$ com:

$$v_{4} = \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} x(k), \quad v_{5} = \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} x(t) - \frac{2}{\tau(k)} \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \sum_{j=k-\tau(k)}^{k} x(j),$$
$$v_{6} = \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} x(t) - \frac{6}{\tau(k)} \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \sum_{j=k-\tau(k)}^{k} x(j) + \frac{12}{\tau(k)(\tau(k)+1)} \sum_{i=k-\tau(k)}^{k-1} \sum_{j=k-\tau(k)}^{k} \sum_{s=k-\tau(k)}^{k} x(s)$$

$$-\tau_{m} \sum_{i=k-\tau_{m}}^{k-1} x^{T}(i) S_{3}^{-1} x(i) \leq -\eta_{3}^{T}(k) \underbrace{\begin{bmatrix} S_{3}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & D_{22} S_{3}^{-1} & 0\\ 0 & 0 & D_{33} S_{3}^{-1} \end{bmatrix}}_{X_{3}} \eta_{3}(k)$$

sendo $D_{22} = \frac{-3(\tau_m + 1)}{(\tau_m - 1)}, D_{33} = \frac{5(\tau_m + 1)(\tau_m + 2)^2}{(\tau_m - 1)(\tau_m^2 + 11)} e \eta_3^T = \begin{bmatrix} v_7^T & v_8^T & v_9^T \end{bmatrix}^T$, com:

$$v_{7} = \sum_{i=k-\tau_{m}}^{k-1} x(k), \quad v_{8} = \sum_{i=k-\tau_{m}}^{k-1} x(t) - \frac{2}{\tau_{m}} \sum_{i=k-\tau_{m}}^{k-1} \sum_{j=k-\tau_{m}}^{k} x(j),$$
$$v_{9} = \sum_{i=k-\tau_{m}}^{k-1} x(t) - \frac{6}{\tau_{m}} \sum_{i=k-\tau_{m}}^{k-1} \sum_{j=k-\tau_{m}}^{k} x(j) + \frac{12}{\tau_{m}(\tau_{m}+1)} \sum_{i=k-\tau_{m}}^{k-1} \sum_{j=k-\tau_{m}}^{k} x(s)$$

$$-\sum_{j=-\tau_{M}}^{-1}\sum_{i=k-\tau_{M}}^{k+j}x^{T}(i)Q^{-1}x(i) \leq -\eta_{4}^{T}(k)\underbrace{\begin{bmatrix}Q^{-1} & 0\\ 0 & E_{22}Q^{-1}\end{bmatrix}}_{X_{4}}\eta_{4}(k)$$

sendo $E_{22} = \frac{8(\tau_M + 2)}{(\tau_M - 1)} e \eta_4^T = \begin{bmatrix} v_{10}^T & v_{11}^T \end{bmatrix}^T$, com:

$$v_{10} = \sum_{i=-\tau_M}^{-1} \sum_{j=-\tau_M}^{k} x(j), \quad v_{11} = \sum_{i=-\tau_M}^{-1} \sum_{j=-\tau_M}^{k} x(j) - \frac{3}{\tau_M + 1} \sum_{i=-\tau_M}^{-1} \sum_{j=-\tau_M}^{-1} \sum_{s=-\tau_M}^{s} x(s)$$

$$-\sum_{j=-\tau(k)}^{-1}\sum_{i=k-\tau(k)}^{k+j}x^{T}(i)Q^{-1}x(i) \leq -\eta_{5}^{T}(k)\underbrace{\begin{bmatrix}Q^{-1} & 0\\ 0 & F_{22}Q^{-1}\end{bmatrix}}_{X_{5}}\eta_{5}(k)$$

sendo $F_{22} = \frac{8(\tau(k) + 2)}{(\tau(k) - 1)} e \eta_5^T = \begin{bmatrix} v_{12}^T & v_{13}^T \end{bmatrix}^T$, com:

$$v_{12} = \sum_{i=-\tau(k)}^{-1} \sum_{j=-\tau(k)}^{k} x(j), \quad v_{13} = \sum_{i=-\tau(k)}^{-1} \sum_{j=-\tau(k)}^{k} x(j) - \frac{3}{\tau(k)+1} \sum_{i=-\tau(k)}^{-1} \sum_{j=-\tau(k)}^{s} \sum_{s=-\tau(k)}^{s} x(s)$$

$$-\sum_{j=-\tau_m}^{-1}\sum_{i=k-\tau_m}^{k+j} x^T(i)Q^{-1}x(i) \le -\eta_6^T(k) \underbrace{\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0\\ 0 & G_{22}Q^{-1} \end{bmatrix}}_{X_6} \eta_6(k)$$

sendo $G_{22} = \frac{8(\tau_m + 2)}{(\tau_m - 1)} e \eta_6^T = \begin{bmatrix} v_{14}^T & v_{15}^T \end{bmatrix}^T$, com:

$$v_{14} = \sum_{i=-\tau_m}^{-1} \sum_{j=-\tau_m}^{k} x(j), \quad v_{15} = \sum_{i=-\tau_m}^{-1} \sum_{j=-\tau_m}^{k} x(j) - \frac{3}{\tau_m + 1} \sum_{i=-\tau_m}^{-1} \sum_{j=-\tau_m}^{-1} \sum_{s=-\tau_m}^{s} x(s)$$

Considerando:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) & x(k - \tau(k)) & e(k - \tau(k)) & x(k - \tau_m) & x(k - \tau_M) & \eta_1(k) & \eta_2(k) \\ \eta_3(k) & \eta_4(k) & \eta_5(k) & \eta_6(k) \end{bmatrix}$$

(A_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$-\tau(k)R_1^-$	¹ 0	0	0	0	0	0	0
	0	0	$-Z^{-}$	-1 0	0	0	0	0	0
	0	0	0	$-\tau_M R_2^{-1}$	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	$- au_m R_3^{-1}$	0	0	0	0
$\Delta V(k) = \xi^T(k)$	0	0	0	0	0	$-X_1$	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	$-X_{2}$	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	$-X_{3}$	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	$-X_4$
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0]	$\begin{bmatrix} A_i \end{bmatrix}^T$	ſ)	
	0	0	B_iF_i						
	0	0	B_iF_i						
	0	0	0						
	0	0	0						
	0	0 +	0	$P^{-1} \begin{bmatrix} A_i & B_i \end{bmatrix}$	$F_i B_i F_i 0$	0 0 0	000	o 0]	ξ(k)
	0	0	0	L	, ,			L	
	0	0	0						
	0	0	0						
	$-X_{5}$	0	0						
	0	$-X_6$	0						
		Ľ	LJ)	(6.33)
									• • •

sendo $A_{11} = -P^{-1} + \tau(k)R^{-1} + \tau^2(k)S^{-1} + (\tau(k) - 1)Q^{-1}$. Aplicando complemento de Schur

	$-P^{-1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	A_i^T
	*	$-\tau(k)R^{-1}$	0	0	0	0	0	0	0	$F_j^T B_i^T$
	*	*	$-Z^{-1}$	0	0	0	0	0	0	$F_j^T B_i^T$
	*	*	*	$-X_1$	0	0	0	0	0	0
	*	*	*	*	$-X_{2}$	0	0	0	0	0
	*	*	*	*	*	$-X_{3}$	0	0	0	0
	*	*	*	*	*	*	$-X_4$	0	0	0
	*	*	*	*	*	*	*	$-X_{5}$	0	0
	*	*	*	*	*	*	*	*	$-X_{6}$	0
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	-P
$\Delta V(k) =$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
$\Delta V(k) =$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Aplicando complemento de Schur nos termos R, $S \in Q$, temos:

Ι	Ι	Ι	Ι	Ι	Ι	Ι	Ι	Ι
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\tau_M R_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
*	$-\tau(k)R_2$	0	0	0	0	0	0	0
*	*	$-\tau_m R_3$	0	0	0	0	0	0
*	*	*	$-\tau_M R_1$	0	0	0	0	0
*	*	*	*	$-\tau(k)R_2$	0	0	0	0
*	*	*	*	*	$-\tau_m R_3$	0	0	0
*	*	*	*	*	*	$-\tau_M^2 S_1$	0	0
*	*	*	*	*	*	*	$-\tau^2(k)S_2$	0
*	*	*	*	*	*	*	*	$-\tau_m^2 S_3$
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*

Ι	Ι	Ι
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
$\tau_M^2 T_1$	0	0
*	$-\tau^2(k)T_2$	0
*	*	$-\tau_m^2 T_3$

(6.35)

Pré e pós multiplicando (6.35) por Γ^T e Γ , respectivamente, fazendo uso do Lema 4 e introduzindo o índice chaveamento por evento (4.4), temos a demonstração concluída, sendo:

sendo $G_3 = \alpha G_2$, com $\alpha > 0$.