

Fernanda Rodrigues Macedo

**Controle Fuzzy Adaptativo de Sistemas Não  
Lineares Incertos Representados por modelos  
Takagi-Sugeno aplicado a um Sistema de Rotor  
Duplo**

Belo Horizonte, Brasil

26 de julho de 2021



Fernanda Rodrigues Macedo

**Controle Fuzzy Adaptativo de Sistemas Não Lineares  
Incertos Representados por modelos Takagi-Sugeno  
aplicado a um Sistema de Rotor Duplo**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestra em Engenharia Elétrica

Universidade Federal de Minas Gerais Escola de Engenharia Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE

Orientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos  
Coorientador: Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres

Belo Horizonte, Brasil

26 de julho de 2021

M141c

Macedo, Fernanda Rodrigues.

Controle Fuzzy adaptativo de sistemas não lineares incertos representados por modelos Takagi-Sugeno aplicado a um sistema de rotor duplo [recurso eletrônico] / Fernanda Rodrigues Macedo. - 2021. 1 recurso online (78 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Víctor Costa da Silva Campos.

Coorientador: Leonardo Antônio Borges Tôres.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Inclui bibliografia.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Sistemas não lineares - Teses.

I. Campos, Víctor Costa da Silva. II. Tôres, Leonardo Antônio Borges. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 621.3(043)

**"Controle Fuzzy Adaptativo de Sistemas Não-lineares Incertos Representados Por Modelos Takagi-sugeno Aplicado A Um Sistema de Rotor Duplo"**

**Fernanda Rodrigues Macedo**

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 26 de julho de 2021.

Por:



---

**Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos  
(UFMG) - Orientador**



---

**Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres  
DELT (UFMG)**



---

**Prof. Dr. Leonardo Amaral Mozelli  
(UFMG)**



---

**Prof. Dr. Luciano Antonio Frezzatto Santos  
DELT (UFMG)**

*“A persistência é o menor caminho do êxito”. Charles Chaplin*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me dares muito mais do que eu preciso, e por me abençoares muito mais do que eu mereço. Por tudo o que eu conquistei até agora, mas peço sabedoria para conquistar muito mais. Ao Víctor pelas discussões, reuniões, paciência e por ter me ensinado tanto, por ter me apresentado controle fuzzy adaptativo. Ao Léo por ter me acolhido e me apresentado ao controle do TRMS e motivado a aprender cada vez mais. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de mestrado do presente projeto. Agradeço à minha família pelo apoio e carinho. Aos amigos por estarem sempre lá. Aos amigos de laboratório e do mestrado pela companhia e apoio durante esse período da minha vida.



*Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*



# Resumo

Nesta dissertação, é proposta uma nova abordagem de aproximação adaptativa baseada na técnica de *backstepping* para o controle do ângulo de arfagem (modo de operação SISO) de um sistema eletromecânico conhecido como *Twin-Rotor MIMO System* – TRMS. Aproximadores universais na lei de controle são usados para estimar a parte desconhecida da dinâmica, usando modelos nebulosos Takagi-Sugeno (TS). De modo a se reduzir a complexidade no projeto do controlador por *backstepping*, filtros de comando são utilizados para evitar o cálculo explícito das derivadas temporais das ações de controle virtuais. Uma modificação de zona morta, desligando a lei de adaptação na região em que não se pode garantir a convergência da função de Lyapunov, é utilizada de modo a evitar o problema de deriva dos parâmetros. É apresentado o projeto e análise do controle por *backstepping* utilizando a abordagem de aproximação adaptativa aplicado ao sistema de rotor duplo, considerando que nem todos os estados são medidos. Para tanto, sistemas nebulosos são utilizados para aproximar as funções não lineares desconhecidas e um observador de estados nebuloso é construído para estimar os estados não-medidos. A eficácia do projeto do controlador é investigada por meio de simulações numéricas, enfatizando-se a redução no número de parâmetros a serem estimados.

**Palavras-chave:** Controle Adaptativo; *backstepping*; redução de complexidade; aproximador universal; sistema não linear incerto; observador de estados.



# Abstract

In this dissertation, a new adaptive approximation approach based on the backstepping technique is proposed for the control of the pitch angle (SISO operating mode) of an electromechanical system known as Twin-Rotor MIMO System – TRMS. Universal approximators in the control law are used to estimate the unknown part of the dynamics using Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models. In order to reduce the complexity in the controller design by backstepping, command filters are used to avoid the explicit calculation of the time derivatives of the virtual control actions. A dead zone modification, turning off the adaptation law in the region where the convergence of the Lyapunov function cannot be guaranteed, is used in order to avoid the problem of parameters drift. The design and analysis of backstepping control using the adaptive approximation approach applied to the double rotor system is presented, considering that not all states are measured. Therefore fuzzy systems are used to approximate the unknown nonlinear functions and a fuzzy state observer is constructed to estimate unmeasured states. The effectiveness of the controller design is investigated through numerical simulations, emphasizing the reduction in the number of parameters to be estimated.

**Keywords:** Backstepping; complexity reduction; universal approximator; uncertain nonlinear system; state observer.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistema eletromecânico de rotor duplo ( <i>Twin-Rotor MIMO System – TRMS</i> ).	2
Figura 2 – Representação de sistema tendo entrada e saída.	5
Figura 3 – Diagrama de blocos do sistema de controle.	36
Figura 4 – Saída: Desempenho do rastreamento de saída.	37
Figura 5 – Sinal de erro.	37
Figura 6 – Saída: Ênfase no transitório inicial do controlador.	38
Figura 7 – Ação de controle $u$ .	38
Figura 8 – Leis de controle virtual $\alpha_1$ e $\alpha_2$ .	39
Figura 9 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{f1}$	39
Figura 10 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{f2}$	40
Figura 11 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{f3}$	40
Figura 12 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{g1}$	41
Figura 13 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{g2}$	41
Figura 14 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{g3}$	42
Figura 15 – Rastreamento de saída.	43
Figura 16 – Sinal de Erro.	44
Figura 17 – Rastreamento de saída.	45
Figura 18 – Sinal de Erro.	46
Figura 19 – Diagrama de blocos do sistema de controle.	53
Figura 20 – Saída: Desempenho do rastreamento de saída.	54
Figura 21 – Sinal de erro.	54
Figura 22 – Saída: Ênfase no transitório inicial do controlador.	55
Figura 23 – Ação de controle $u$ .	56
Figura 24 – Leis de controle virtual $\alpha_1$ e $\alpha_2$ .	56
Figura 25 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{g2}$	57
Figura 26 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{f3}$	57
Figura 27 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{g3}$ .	58
Figura 28 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\gamma}$ .	58
Figura 29 – Diagrama de blocos do sistema de controle.	65
Figura 30 – Saída: Desempenho do rastreamento de saída.	67
Figura 31 – Sinal de erro.	67
Figura 32 – Saída: Ênfase no transitório inicial do controlador.	68
Figura 33 – Ação de controle $u$ .	68
Figura 34 – Leis de controle virtual $\alpha_1$ e $\alpha_2$ .	69
Figura 35 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{f2}$	69
Figura 36 – Parâmetros estimados pelo controlador: $\hat{\theta}_{f3}$	70



# Lista de quadros

Quadro 1 – Parâmetros TRMS .....	29
----------------------------------	----



# Lista de abreviaturas e siglas

FLSs            Sistemas de Lógica Nebulosa

TS              Takagi-Sugeno

TRMS          Sistema de Rotor Duplo



# Lista de símbolos

$y_d$	Saída de Referência
$\alpha$	Ação de Controle Virtual
$\in$	Pertence
$\theta$	Parâmetros Desconhecidos
$\xi$	Erros Filtrados
$\delta$	Erro de Aproximação
$u$	Lei de Controle
$x_{id}^0$	Estado Desejado Não-Filtrado
$x_{id}$	Estado Desejado
$s_i$	Erro Compensado



# Sumário

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	1
1.1	<b>Apresentação do Sistema TRMS</b>	1
1.2	<b>Controle do Sistema TRMS: Breve Revisão da Literatura</b>	2
1.3	<b>Objetivos</b>	3
1.4	<b>Estrutura do Texto</b>	3
2	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	5
2.1	<b>Sistemas Dinâmicos não lineares</b>	5
2.2	<b>Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno (TS)</b>	6
2.3	<b>Estabilidade de Lyapunov</b>	9
2.3.1	Exemplo de Aplicação: Sistema Incerto e Afim na Entrada	10
2.4	<b>Modificações Robustas das Leis de Adaptação</b>	13
2.4.1	Modificação de Projeção	13
2.4.2	Modificação $\sigma$	14
2.4.3	Modificação de Zona Morta	14
2.4.3.1	Aplicação da Modificação de Zona Morta	15
2.5	<b>Backstepping</b>	16
2.6	<b>Controlador Adaptativo <i>Backstepping</i> com Filtragem de Comando</b>	20
2.7	<b>Observadores de Estados</b>	25
2.7.1	Observadores de Estados Para Sistemas Não Lineares	25
3	<b>SISTEMA DE ROTOR DUPLO</b>	27
3.1	<b>Modelagem Matemática do Sistema TRMS</b>	27
4	<b><i>BACKSTEPPING</i> COM APROXIMAÇÃO ADAPTATIVA</b>	31
4.1	<b>Projeto de Controlador <i>Backstepping</i> com Aproximação Adaptativa</b>	31
4.2	<b>Aplicação ao TRMS</b>	36
4.3	<b>Conclusão</b>	42
5	<b><i>BACKSTEPPING</i> COM APROXIMAÇÃO ADAPTATIVA E REDUÇÃO DE COMPLEXIDADE</b>	47
5.1	<b>Projeto de Controlador Adaptativo <i>backstepping</i></b>	47
5.1.1	Estudo de Caso	53
5.2	<b>Conclusão</b>	55
6	<b><i>BACKSTEPPING</i> COM APROXIMAÇÃO ADAPTATIVA USANDO OBSERVADOR DE ESTADOS NEBULOSO</b>	59

<b>6.1</b>	<b>Descrições e Suposições do Sistema . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>6.2</b>	<b>Projeto do Observador de Estados <i>Fuzzy</i> . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>6.3</b>	<b>Análise de Estabilidade e Projeto Adaptativo . . . . .</b>	<b>62</b>
6.3.1	Análise Completa . . . . .	66
<b>6.4</b>	<b>Estudo de Caso . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>6.5</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>7.1</b>	<b>Artigo Publicado . . . . .</b>	<b>73</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>75</b>

# 1 Introdução

Controle robusto de sistemas dinâmicos é um tópico de grande relevância para a sociedade, haja vista o fato de os modelos matemáticos empregados no projeto de sistema de controle serem aproximações da realidade. Tais aproximações muitas vezes se traduzem como desconhecimento dos valores exatos de parâmetros empregados nestes modelos. Entretanto, a despeito do fato de existirem ferramentas de análise e síntese de controladores bem conhecidas para o caso de modelos incertos lineares e invariantes no tempo, ainda há espaço para se propor metodologias de análise e síntese quando são empregados modelos incertos não lineares. Tais modelos são naturalmente utilizados quando se procura descrever o comportamento dinâmico de sistemas reais por meio de leis físicas.

Um exemplo deste caso é a planta didática para ensino de controle conhecida como *Twin-Rotor MIMO System* – TRMS apresentada em [Feedback Instruments \(2006\)](#). O controle do TRMS tem sido considerado como um tópico de pesquisa desafiador e é um problema interessante de identificação, modelagem e controle, o que tem atraído a atenção de muitos pesquisadores ([WEN; LU, 2008](#); [TAO; TAUR; CHEN, 2010](#); [SAROJ; KAR; PANDEY, 2013](#); [AHMAD; CHIPPERFIELD; TOKHI, 2000](#)).

## 1.1 Apresentação do Sistema TRMS

O sistema eletromecânico de rotor duplo (*Twin-Rotor MIMO System* – TRMS) consiste em uma viga articulada em sua base, de modo que possa girar livremente nos planos horizontal e vertical, conforme mostrado na Fig. 1.

Além disso, um braço de contrapeso com um peso na extremidade é fixado na viga no pivô para que cada par rotor-sensor seja associado a um dos possíveis movimentos de arfagem e guinada. Nas duas extremidades da viga, existem duas hélices acionadas por dois motores de corrente contínua (motores CC) independentes, cujas velocidades angulares são resultado da variação das tensões de entrada aplicadas. Os movimentos angulares do sistema são realizados principalmente por torques resultantes da força propulsora ([Feedback Instruments, 2006](#)).

Com acoplamento cruzado significativo, seu comportamento se assemelha a de um helicóptero. O ângulo de ataque dos rotores é fixo e as forças aerodinâmicas são controladas pela variação das velocidades dos motores ([CHALUPA; PŘIKRYL; NOVÁK, 2015](#)). Neste trabalho, consideramos que o ângulo de guinada do sistema está fixo, e consideramos apenas o movimento de arfagem  $\theta$ , mostrado na Fig. 1.

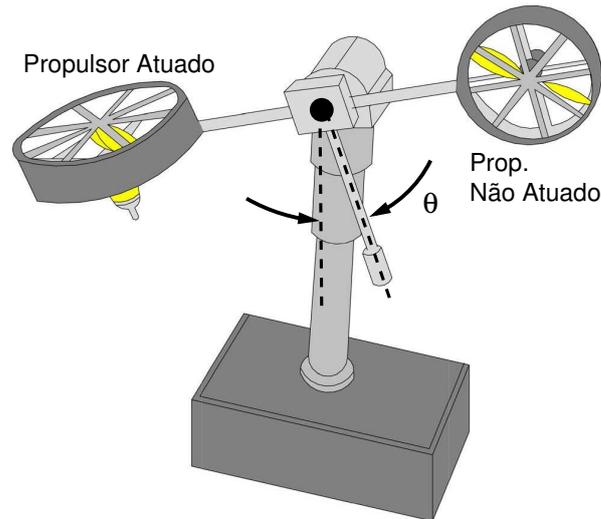


Figura 1 – Sistema eletromecânico de rotor duplo (*Twin-Rotor MIMO System – TRMS*).

## 1.2 Controle do Sistema TRMS: Breve Revisão da Literatura

Em [Li e Yang \(2011\)](#) é realizada uma análise comparativa entre controle inteligente e controle clássico para o TRMS. Nesse sentido, controladores baseados em regras nebulosas e redes neurais também foram projetados para o rastreamento de ângulos de guinada e arfagem no TRMS ([RAHIDEH; SHAHEED; BAJODAH, 2007](#)).

Abordagens com modelagem adaptativa também têm se mostrado eficazes. Em [Shaik, Purwar e Pratap \(2011\)](#) as não linearidades desconhecidas são estimadas usando uma rede neural de Chebyshev (CNN), cujos pesos são ajustados de forma adaptativa. [Toha e Tokhi \(2010\)](#) usam um modelo de inferência neuro-fuzzy adaptativo, cujo antecedente é ajustado pelo algoritmo de otimização de enxame de partículas, em busca de um modelo não paramétrico para o TRMS.

Nos últimos anos, a técnica de *backstepping* tem sido também utilizada ([RAHIDEH; SHAHEED; BAJODAH, 2007; YANG; HSU, 2009](#)). Em ([KRSTIC; KOKOTOVIC; KANELLA-KOPOULOS, 1995](#)) descreve-se em detalhes a técnica de *backstepping*, que pode ser aplicada a vários sistemas, mesmo aqueles que não podem ser linearizados por realimentação de estados ([KOKOTOVIC; SUSSMANN, 1989](#)). Tal metodologia, descrita em [Krstic, Kokotovic e Kanellakopoulos \(1995\)](#), faz um elo entre o desenvolvimento de leis de controle e a construção de funções de Lyapunov, garantindo a estabilidade assintótica, global ou local, do sistema.

Quando não possuímos todos os estados do sistema disponíveis para o cálculo da lei de controle, observadores de estados são uma ferramenta indispensável para as estratégias de controle mais avançadas. Existem na literatura vários tipos de observadores de estados, tais como observadores de modos deslizantes, observadores de Luenberger adaptativos e observadores de estados nebulosos ([ZHANG; LIU; FANG, 2008](#)). Sua função é estimar os estados não medidos ou distúrbios onde o controle baseia-se no observador ([HUMAIDI, 2018](#)).

## 1.3 Objetivos

O propósito dessa dissertação é propor uma metodologia, por meio de uma abordagem de aproximação adaptativa combinada à técnica *backstepping*, para controlar o ângulo de arfagem do sistema de rotor duplo, para que este siga uma referência desejada. A metodologia proposta faz uso de aproximadores universais Takagi-Sugeno, para as não-linearidades desconhecidas, assim como um observador de estados, para estimar os estados não-medidos do sistema.

O objetivo principal é projetar um controlador adaptativo de modo que a saída  $y(t)$  do sistema siga um sinal de referência desejado  $y_d(t)$ , enquanto todos os sinais no sistema de malha fechada permanecem limitados.

## 1.4 Estrutura do Texto

Esse trabalho foi estruturado numa sequência que apresentasse de forma lógica e compreensível suas devidas contribuições no campo da ciência na qual se insere: controle não linear de sistemas dinâmicos usando a técnica *backstepping* adaptativo.

O capítulo 1 fez uma pequena introdução, além de apresentar a motivação do trabalho, os objetivos que devem ser atendidos e a metodologia utilizada.

O capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica detalhando os trabalhos feitos nessa área, a fim de estabelecer um elo entre o trabalho e um levantamento da literatura anteriormente publicada, bem como os conceitos relacionados ao trabalho.

O capítulo 3 consiste na apresentação do sistema utilizado como aplicação no trabalho, o modelo matemático e as características do sistema.

O capítulo 4 apresenta o projeto e análise de controle por *backstepping* adaptativo utilizando abordagem de aproximação adaptativa aplicado ao sistema de rotor duplo.

O capítulo 5 apresenta o projeto e análise de controle por *backstepping* adaptativo utilizando abordagem de aproximação adaptativa, estimando a norma dos vetores de parâmetros, aplicado ao sistema de rotor duplo.

Enquanto que, o capítulo 6 apresenta o projeto e análise do controle por *backstepping* utilizando a abordagem de aproximação adaptativa e observador de estados aplicado ao sistema de rotor duplo.

Por fim, o capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho e os comentários pertinentes, assim como apresenta possíveis direções de pesquisa para trabalhos futuros.



## 2 Referencial Teórico

Este capítulo trata de conceitos fundamentais de controle e estabilidade em sistemas dinâmicos não lineares. A abordagem *backstepping* adaptativo em conjunto com a técnica de filtro de comando e observador de estados nebuloso são os pilares sobre os quais se sustentam o processo de síntese do controlador proposto para o sistema não linear TRMS. Após uma exposição dos conceitos principais associados à teoria de sistemas dinâmicos não lineares, temos as definições básicas utilizadas na elaboração dessas ferramentas.

### 2.1 Sistemas Dinâmicos não lineares

Todos os sistemas dinâmicos encontrados na prática são não lineares. Para estes sistemas, o procedimento de projeto do sistema de controle em geral se baseia em um modelo. Além disso, dependendo do tipo de não linearidade e da maneira como ela afeta o sistema, vários métodos de projeto de controle não linear podem ser usados (FARRELL; POLYCARPOU, 2006).

Nos últimos anos, um grande número de pesquisadores tem abordado e se dedicado ao controle e análise de sistemas dinâmicos não lineares (CHEN; HOW, 2010; CHEN, 1985; BILLINGS, 1980; WANG; TONG; LI, 2009; FARRELL; POLYCARPOU, 2006; AGUIRRE; BILLINGS, 1994; CHEN et al., 2012).

Quando discutimos sistemas físicos, falamos de um agregado de objetos ou entidades materiais que interage com o resto do mundo através de entradas  $u(t)$  e saídas  $y(t)$  (Figura 2). Por meio desses sistemas, estudamos as interações e o comportamento de tal conjunto de elementos. Então, escolhemos as variáveis internas ao sistema que são mais importantes para descrever o comportamento do sistema em questão. Muitas vezes tais variáveis serão consideradas variáveis de estado do sistema.

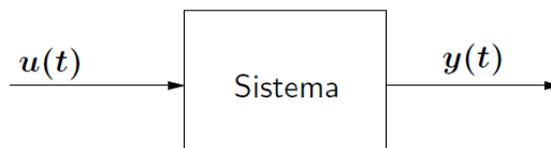


Figura 2 – Representação de sistema tendo entrada e saída.

Um sistema é classificado como dinâmico, ou com memória, quando o valor atual de sua saída  $y(t)$  depende do valor atual da entrada  $u(t)$  aplicada e também da evolução temporal da entrada e da saída. Um sistema é classificado como estático quando o valor atual de sua saída  $y(t)$  depende apenas do valor atual da entrada  $u(t)$  aplicada (RODRIGUES, 1996).

Considere a seguir uma classe de sistema dinâmico, onde o objetivo é controlá-lo, apresentado por [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = [f_0(x) + f(x)] + [g_0(x) + g(x)]u, \\ y = x_n. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

em que  $f_0(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_0(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções conhecidas,  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções desconhecidas,  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $u \in \mathbb{R}$  é o sinal de entrada usado para controlar o sistema, e  $y \in \mathbb{R}$  é a saída. Portanto, a dinâmica real do sistema não é totalmente conhecida ou não está disponível para o projetista.

Existem algumas abordagens alternativas na literatura para o projeto de controladores para sistemas do tipo (2.1), conforme será visto à frente.

## 2.2 Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno (TS)

Um sistema TS é descrito através de conhecimento condicionado por regras fuzzy do tipo “Se-Então”, que apresentam localmente relações entre a entrada e a saída do sistema ([TAKAGI; SUGENO, 1985](#)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Regra } k: \\ \text{Se } x_1 \text{ é } A_1^k, \ x_2 \text{ é } A_2^k, \ \dots, \ x_n \text{ é } A_n^k, \\ \text{Então } y = f_k(x, \theta). \end{array} \right.$$

em que  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ , e  $x(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são as variáveis premissas do modelo,  $\theta$  são parâmetros do modelo,  $y$  são as saídas do modelo TS,  $A_i^k$  são os conjuntos nebulosos que associam a premissa  $x_i$  à regra  $k$  e  $f_k$  é a função que descreve o consequente da regra  $k$  do modelo TS.

Em termos de modelagem, sabe-se que tais regras fuzzy têm a capacidade de aproximar uniformemente funções quaisquer em um domínio compacto (([YING, 1998](#)); ([ZENG; ZHANG; XU, 2000](#)); ([TANSCHKEIT et al., 2007](#)); ([TANAKA; WANG, 2004](#))). Neste sentido, modelos Takagi-Sugeno são aproximadores universais.

Ao utilizar sistemas nebulosos Takagi-Sugeno, as ferramentas usualmente utilizadas na inferência do modelo são o fuzzificador *singleton*, a inferência do produto e o defuzzificador de média central. De acordo com [Feng \(2006\)](#), nesse caso pode-se escrever a função de pertinência da parte “Se” para cada regra como:

$$\mu_{A_k} = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^k}(x_i), \quad (2.2)$$

onde  $\mu_{A_i}^k(x_i)$  são as funções de pertinência associadas à cada conjunto  $A_i^k$ . A pertinência, ou grau de ativação, de cada regra é calculada usando a expressão (2.2).

Após o cálculo da pertinência de cada regra, encontra-se uma função de pertinência normalizada dada por

$$h_k(x) = \frac{\mu_{A_k}(x)}{\sum_{i=1}^r \mu_{A_i}(x)},$$

onde  $h_k(x)$  são chamadas funções de pertinência normalizadas de cada regra. Tais funções de pertinência possuem as propriedades

$$h_k(x) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^r h_k(x) = 1,$$

com  $r$  sendo o número de regras do modelo. Pode-se então escrever as funções de pertinência como

$$y(x) = \sum_{k=1}^r h_k(x) f_k(x, \theta). \quad (2.3)$$

Conforme registrado anteriormente, modelos TS compostos com funções de pertinência são aproximadores universais, e normalmente o erro de aproximação cometido está associado com o número de regras no modelo (WANG, 1996), tendo em vista o seguinte teorema.

**Teorema 1 (Teorema de Stone-Weierstrass)** *Seja  $Z$  um conjunto de funções contínuas em um conjunto compacto  $U$ . Se*

1.  *$Z$  for uma álgebra (conjunto fechado sob adição, multiplicação e multiplicação por escalar),*
2.  *$Z$  separa pontos em  $U$  (para todo  $x$  e  $y$  pertencente a  $U$  tal que  $x \neq y$ , existe uma função  $f \in Z$  com  $f(x) \neq f(y)$ ),*
3.  *$Z$  desaparece em nenhum ponto de  $U$  (para todo  $x$  pertencente a  $U$ , existe uma função  $f \in Z$  tal que  $f(x) \neq 0$ ),*

*então para toda função real contínua  $\alpha(x)$  em  $U$  e um valor arbitrário  $\varepsilon$ , existe uma função  $f$  em  $Z$  tal que  $\sup_{x \in U} \|f(x) - \alpha(x)\| < \varepsilon$ .*

De acordo Wang (1996) os modelos TS apresentados na equação (2.3) podem ser escritos como modelos lineares nos parâmetros, se considerarmos que as funções  $f_k(x, \theta)$  podem ser escritas como

$$f_k(x, \theta) = \beta_k^T(x) \theta_k, \quad (2.4)$$

resultando no seguinte modelo

$$y(x) = \sum_{k=1}^r h_k(x) \beta_k^T(x) \theta_k = \underbrace{h_1(x) \beta_1^T(x)}_{h_{y,1}(x)} \theta_1 + \underbrace{h_2(x) \beta_2^T(x)}_{h_{y,2}(x)} \theta_2 + \cdots + \underbrace{h_r(x) \beta_r^T(x)}_{h_{y,r}(x)} \theta_r,$$

$$y(x) = \begin{bmatrix} h_{y,1}(x) & h_{y,2}(x) & \cdots & h_{y,n}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_r \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

De forma a ilustrar o uso de sistemas nebulosos, podemos utilizar aproximadores TS para representar as funções incertas na equação (2.1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= h_f^T(x) \theta_f^* + \varepsilon_f(x), \\ g(x) &= h_g^T(x) \theta_g^* + \varepsilon_g(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Junto, ao utilizarmos aproximadores TS, escolhendo um conseqüente linear nos parâmetros, temos uma representação linear nos parâmetros, conforme a Equação (2.5). Os erros de aproximação  $\varepsilon_f(x)$  e  $\varepsilon_g(x)$  são dados por

$$\begin{aligned} \varepsilon_f(x) &= f(x) - h_f^T(x) \theta_f^*, \\ \varepsilon_g(x) &= g(x) - h_g^T(x) \theta_g^*, \end{aligned}$$

com  $\theta_f^*$  e  $\theta_g^*$  sendo os parâmetros que resultam no menor erro máximo de representação das funções, i.e.

$$\begin{aligned} \theta_f^* &= \arg \min_{\theta_f} \left( \max_x |f(x) - h_f^T(x) \theta_f| \right), \\ \theta_g^* &= \arg \min_{\theta_g} \left( \max_x |g(x) - h_g^T(x) \theta_g| \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Consideramos ainda que

$$\begin{aligned} |\varepsilon_f(x)| &\leq e_f, \\ |\varepsilon_g(x)| &\leq e_g, \end{aligned}$$

com  $e_f$  e  $e_g$  valores reais positivos limitados. Conseqüentemente,

$$|\varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)| \leq e_f + e_g = \delta.$$

Logo, a dinâmica do sistema (2.1), usando aproximadores TS para representar as funções incertas, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n &= [f_0(x) + h_f^T(x) \theta_f^* + \varepsilon_f(x)] + [g_0(x) + h_g^T(x) \theta_g^* + \varepsilon_g(x)] u. \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.3 Estabilidade de Lyapunov

A ideia principal da estabilidade de Lyapunov é determinar se o estado de equilíbrio de um sistema dinâmico é ou não estável sem resolver a equação diferencial (FARRELL; POLYCARPOU, 2006). Um estado de equilíbrio, ou ponto de equilíbrio, é estável se todas as soluções que começam em pontos próximos permanecem próximas, e é assintoticamente estável se essas soluções também tendem ao ponto de equilíbrio à medida que o tempo aumenta (KHALIL; GRIZZLE, 2002).

**Teorema 2 (Teorema de Estabilidade de Lyapunov)** *Seja a origem ( $x = 0$ ) um ponto de equilíbrio do sistema, e  $D \subset \mathbb{R}^n$  uma região incluindo a origem. Se existir uma função continuamente diferenciável  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \\ V(x) &> 0, \quad \forall x \in D, x \neq 0; \end{aligned}$$

*i.e. a função  $V(x)$  é definida positiva; e, ao mesmo tempo,*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \dot{V} \leq 0;$$

*i.e. a derivada temporal  $\dot{V}(x)$  é semidefinida negativa; então o ponto de equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov. Além disso, se*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \dot{V} < 0, \quad \forall x \in D, x \neq 0;$$

*i.e. a derivada temporal é definida negativa; então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.*

Segundo Khalil e Grizzle (2002) a existência da função de Lyapunov é condição suficiente para assegurar a estabilização da origem em malha fechada através da realimentação de controle. Não existe uma regra fixa para se obter uma função de Lyapunov. Entretanto, para problemas de controle adaptativo existem funções candidatas pré-definidas, muitas vezes funções que expressam a energia total no sistema (FARRELL; POLYCARPOU, 2006).

A partir da função de Lyapunov as leis de adaptação são definidas com o objetivo de levar a zero o vetor de erro. Entretanto, são muitas vezes necessárias extensões do Teorema 2 no contexto de provas de estabilidade para sistemas de controle em malha fechada. Uma das extensões mais utilizadas em Controle Adaptativo é o conhecido Lema de Barbalat (SLOTINE; LI et al., 1991).

**Lema: 3 (Lema de Barbalat – Primeira Versão)** *Seja uma função  $V(t)$ ,*

$$V : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = L,$$

existe e é finito ( $|L| < \infty$ ). Se a derivada temporal  $\dot{V}(t)$  é uniformemente contínua, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0.$$

**Lema: 4 (Lema de Barbalat – Segunda Versão)** Seja uma função  $\phi(t)$ ,

$$\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

uniformemente contínua em  $[0, \infty)$ , e tal que o limite abaixo existe e é finito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau = L, \quad |L| < \infty.$$

Neste caso:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0.$$

É importante notar que ambas as versões acima, Lemas 3 e 4, dependem da suposição de que as funções envolvidas sejam *uniformemente contínuas*. Embora seja difícil estabelecer essa propriedade, existe uma condição suficiente – e mais fácil de ser testada – que garante a continuidade uniforme (KHALIL; GRIZZLE, 2002; SLOTINE; LI et al., 1991).

**Lema: 5 (Condição suficiente para Continuidade Uniforme)** Seja uma função diferenciável  $\gamma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| < L_\gamma < \infty \implies \gamma(t) \text{ é uniformemente contínua.}$$

No Lema 3,  $\gamma(t) = \dot{V}(t)$ ; e no Lema 4,  $\gamma(t) = \phi(t)$ .

### 2.3.1 Exemplo de Aplicação: Sistema Incerto e Afim na Entrada

Considere a classe de sistemas não lineares incertos com um sinal de entrada escalar  $u(t)$ , cuja dinâmica depende de forma afim dessa entrada, como descrito pela Equação (2.1), em que a dinâmica do sistema é representada matematicamente usando aproximadores TS como descrito na Equação (2.8). Utilizando uma lei de controle da forma:

$$u = \frac{1}{g_0(x) + h_g^T(x) \hat{\theta}_g} [-f_0(x) - h_f^T(x) \hat{\theta}_f - ae + \dot{y}_d]; \quad (2.9)$$

em que  $a > 0$  é uma constante, e  $y_d(t) \in \mathbb{R}$  representa a saída desejada para o sistema; obtemos a dinâmica do sistema em malha fechada:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n &= [f_0(x) + h_f^T(x)\theta_f^* + \varepsilon_f(x)] + \\ &+ [g_0(x) + h_g^T(x)\theta_g^* + \varepsilon_g(x)] \underbrace{\left[ \frac{-f_0(x) - h_f^T(x)\hat{\theta}_f - ae + \dot{y}_d}{g_0(x) + h_g^T(x)\hat{\theta}_g} \right]}_u. \end{aligned} \quad (2.10)$$

É importante notar que, implicitamente, está se considerando que  $g_0(x) + h_g^T(x)\hat{\theta}_g \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Somando e subtraindo os termos  $h_f^T(x)\hat{\theta}_f$  e  $h_g^T(x)\hat{\theta}_g$ , temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= [f_0(x) + h_f^T(x)\theta_f^* + h_f^T(x)\hat{\theta}_f - h_f^T(x)\hat{\theta}_f + \varepsilon_f(x)] \\ &+ [g_0(x) + h_g^T(x)\theta_g^* + h_g^T(x)\hat{\theta}_g - h_g^T(x)\hat{\theta}_g + \varepsilon_g(x)] u, \\ \dot{x}_n &= [f_0(x) + h_f^T(x)\hat{\theta}_f + \varepsilon_f(x)] + [h_f^T(x)(\theta_f^* - \hat{\theta}_f)] + \\ &+ [g_0(x) + h_g^T(x)\hat{\theta}_g] u + [h_g^T(x)(\theta_g^* - \hat{\theta}_g) + \varepsilon_g(x)] u. \end{aligned}$$

Definindo o erro como

$$e(t) = y(t) - y_d(t) = x_n(t) - y_d(t) \quad \implies \quad \dot{e} = \dot{x}_n - \dot{y}_d,$$

$$\begin{aligned} \dot{e} &= [f_0(x) + h_f^T(x)\hat{\theta}_f + \varepsilon_f(x)] + [g_0(x) + h_g^T(x)\hat{\theta}_g] u + \\ &+ [h_f^T(x)(\theta_f^* - \hat{\theta}_f)] + [h_g^T(x)(\theta_g^* - \hat{\theta}_g) + \varepsilon_g(x)] u - \dot{y}_d, \end{aligned}$$

em que a ação de controle  $u$  é dada por (2.9). Isto conduz a uma dinâmica do erro em malha fechada representada por

$$\dot{e} = -ae + [h_f^T(x)(\theta_f^* - \hat{\theta}_f) + \varepsilon_f(x)] + [h_g^T(x)(\theta_g^* - \hat{\theta}_g) + \varepsilon_g(x)] u. \quad (2.11)$$

Usando o método de Lyapunov, seja a função quadrática

$$V(e, \tilde{\theta}_f, \tilde{\theta}_g) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_f^T \Gamma_f^{-1} \tilde{\theta}_f + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_g^T \Gamma_g^{-1} \tilde{\theta}_g, \quad (2.12)$$

onde  $\tilde{\theta}_f = \theta_f^* - \hat{\theta}_f$  e  $\tilde{\theta}_g = \theta_g^* - \hat{\theta}_g$ , e as matrizes  $\Gamma_f$  e  $\Gamma_g$  são definidas positivas. Sua derivada temporal será dada pela equação

$$\dot{V} = e\dot{e} - \tilde{\theta}_f^T \Gamma_f^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_f - \tilde{\theta}_g^T \Gamma_g^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_g, \quad (2.13)$$

e substituindo-se a dinâmica do erro (2.11) na derivada temporal da função de Lyapunov (2.13), e lembrando que  $u \in \mathbb{R}$  e que  $\theta_f^*$  e  $\theta_g^*$  são constantes, tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -ae^2 + \tilde{\theta}_f^T h_f(x)e + \varepsilon_f(x)e + \tilde{\theta}_g^T h_g(x)eu + \varepsilon_g(x)eu + \\ &- \tilde{\theta}_f^T \Gamma_f^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_f - \tilde{\theta}_g^T \Gamma_g^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_g, \\ &= -ae^2 + \tilde{\theta}_f^T [h_f(x)e - \Gamma_f^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_f] + \varepsilon_f(x)e + \tilde{\theta}_g^T [h_g(x)eu - \Gamma_g^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_g] + \varepsilon_g(x)eu. \end{aligned}$$

As leis de adaptação são escolhidas para os parâmetros  $\hat{\theta}_f$  e  $\hat{\theta}_g$  adequadas para fazer  $e(t) \rightarrow 0$ . Para tanto, usando-se em  $\dot{V}$  as seguintes leis de adaptação:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}_f &= \Gamma_f h_f(x)e, \\ \dot{\hat{\theta}}_g &= \Gamma_g h_g(x)eu,\end{aligned}\tag{2.14}$$

tem-se que

$$\dot{V} = -ae^2 + \varepsilon_f(x)e + \varepsilon_g(x)eu.\tag{2.15}$$

Considere agora a seguinte hipótese:

1.  $\varepsilon_f(x) = 0$  e  $\varepsilon_f(g) = 0$ .

Nesse caso, a partir de (2.15),

$$\dot{V} = \phi(t) = -ae(t)^2 \leq 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \int_0^t \phi(\tau) d\tau = L_V < \infty,$$

em que  $V(t) \equiv V(x(t))$ . Entretanto, não necessariamente  $L_V = 0$ . Por outro lado, usando o Lema 4, caso  $\phi(t) = \dot{V}(t)$  seja uma função uniformemente contínua, então  $L_V = 0$ , e conseqüentemente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -ae(t)^2 = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

A partir do Lema 5, a continuidade uniforme de  $\dot{V}(t)$  pode ser assegurada caso  $\dot{V}(t)$  seja uma função limitada. Considerando a função  $\phi(t) = \dot{V}(x)$ , e as expressões (2.15) e (2.11) com  $\varepsilon_f(x) = 0$  e  $\varepsilon_f(g) = 0$ , temos

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= (-2ae)(-ae + h_f^T \tilde{\theta}_f + h_g^T \tilde{\theta}_g u), \\ \dot{\phi}(t) &= 2a^2 e^2 - 2ae [h_f^T \tilde{\theta}_f + h_g^T \tilde{\theta}_g u].\end{aligned}\tag{2.16}$$

Como  $\dot{V} \leq 0$ , a partir de (2.12) vemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^2(t) &\leq V(t) \leq V(0), \\ \frac{1}{2}\tilde{\theta}_f^T \Gamma_f^{-1} \tilde{\theta}_f &\leq V(t) \leq V(0), \\ \frac{1}{2}\tilde{\theta}_g^T \Gamma_g^{-1} \tilde{\theta}_g &\leq V(t) \leq V(0).\end{aligned}$$

O que confirma que  $e(t)$ ,  $\tilde{\theta}_f(t)$  e  $\tilde{\theta}_g(t)$  são limitados. Porém, para se poder afirmar que  $\dot{\phi}(t)$  é limitado, considerando a expressão (2.16), ainda é preciso analisar se  $u(t)$ , dado pela expressão (2.9), é um sinal limitado. Para tanto, podemos fazer as seguintes hipóteses adicionais:

2. A saída desejada é tal que  $\dot{y}_d(t)$  é um sinal limitado.
3. As funções  $f_0(x)$ ,  $h_f(x)$  e  $h_g(x)$  são limitadas.

4. A expressão  $[g_0(x) + h_g^T(x)\hat{\theta}_g]$  nunca se anula.

Assumindo todas as hipóteses acima,  $\dot{\phi}(t) = \dot{V}(t)$  é limitado, e pelos Lemas 4 e 5,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) \rightarrow 0, \quad (2.17)$$

o que implica que  $e(t) \rightarrow 0$ .

## 2.4 Modificações Robustas das Leis de Adaptação

Segundo [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#), na prática uma função de aproximação adaptativa da forma  $\hat{f}(x, \hat{\theta})$ , com  $\hat{\theta}$  um vetor de parâmetros, pode não ser capaz de corresponder exatamente à incertezas da modelagem da função  $f(x, \theta^*)$ , mesmo que seja possível selecionar os vetores de parâmetros ótimos  $\hat{\theta} = \theta^*$ . Essa discrepância é definida como erro mínimo de aproximação funcional entre  $f$  e  $\hat{f}$ .

Existem ainda outros tipos de erros de modelagem, tais como: dinâmica não modelada, ruído de medição, perturbações externas e variações dos parâmetros ao longo do tempo ([FARRELL; POLYCARPOU, 2006](#)). Portanto a ideia é aumentar a robustez através de modificações nos algoritmos para fornecer estabilidade e melhorar o desempenho na presença de erros de modelagem ([FARRELL; POLYCARPOU, 2006](#)). Existem duas categorias de modificações robustas das leis de adaptação ([FARRELL; POLYCARPOU, 2006](#)):

1. Modificações para garantir que os parâmetros fiquem contidos em uma região desejada preestabelecida: modificação  $\sigma$ , modificação  $\varepsilon$  e algoritmos de projeção.
2. Modificações para garantir que os parâmetros fiquem limitados por meio da desativação das leis de adaptação dos parâmetros quando o erro é suficientemente pequeno: por exemplo, o uso de função zona morta na lei de adaptação.

### 2.4.1 Modificação de Projeção

[Farrell e Polycarpou \(2006\)](#) descrevem uma das maneiras mais diretas e eficazes de evitar a deriva dos parâmetros, que é a modificação de projeção. Considera-se que as estimativas dos parâmetros devam pertencer a uma região  $S$  delimitada e convexa predefinida, que é projetada para garantir que  $\theta^* \in S$ . A modificação de projeção mantém o vetor de estimativas dos parâmetros dentro da região convexa  $S$  o tempo todo.

Considere que os parâmetros estão contidos em um conjunto convexo  $S$  fechado descrito por

$$S = \left\{ \hat{\theta} \in \mathbb{R}^{qd} \mid \kappa(\hat{\theta}) \leq 0 \right\}, \quad (2.18)$$

onde  $\kappa : \mathbb{R}^{q_d} \mapsto \mathbb{R}$  é uma função suave. Para uma lei de adaptação da forma:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \xi \varepsilon, \quad (2.19)$$

a modificação de projeção para a lei de adaptação (2.19) é dada por

$$\hat{\theta} = P_S(\Gamma \xi \varepsilon) = \begin{cases} \Gamma \xi \varepsilon, & \text{se } (\hat{\theta} \in S) \text{ ou } (\hat{\theta} \in \partial S \text{ e } (\nabla^T \kappa)(\Gamma \xi \varepsilon) \leq 0), \\ \Gamma \xi \varepsilon - \Gamma \frac{(\nabla \kappa)(\nabla^T \kappa)}{(\nabla^T \kappa)\Gamma(\nabla \kappa)} \Gamma \xi \varepsilon, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.20)$$

em que  $\nabla^T \kappa = \left[ \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\theta}_1} \quad \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\theta}_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\theta}_{q_d}} \right]$  é o vetor linha que corresponde ao gradiente da função  $\kappa(\hat{\theta})$ ,  $\nabla \kappa = (\nabla^T \kappa)^T$ , e  $\partial S$  é a fronteira do conjunto  $S$ .

Neste caso a lei de adaptação permanece a mesma se o parâmetro está dentro da região desejada, ou se ele está na fronteira da região, mas em direção ao conjunto. Caso contrário, utiliza-se projeção que retira do vetor de variação temporal dos parâmetros a componente que está fazendo os parâmetros tenderem a ir para fora do conjunto  $S$ .

De acordo com [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#), se o conjunto  $S$  sobre o qual está sendo projetada a evolução temporal dos parâmetros for convexo, e os parâmetros se encontram dentro dele, podemos ignorar a modificação de projeção na análise de estabilidade, pois é garantido que o efeito dela é sempre melhor para a estabilidade do sistema adaptativo em malha fechada.

## 2.4.2 Modificação $\sigma$

Seguindo a abordagem proposta por [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#), a lei adaptativa descrita na equação (2.19) pode também ser modificada para

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \xi \varepsilon - \Gamma \sigma (\hat{\theta} - \theta_0) \quad (2.21)$$

onde  $\sigma$  é uma constante positiva e  $\theta_0$  é um vetor constante (muitas vezes selecionado igual a zero, a menos que haja melhores informações anteriores sobre o valor ótimo  $\theta^*$ ). Quando  $\sigma > 0$ , o termo  $-\Gamma \sigma (\hat{\theta} - \theta_0)$  impede  $\hat{\theta}(t)$  de ir para  $\infty$ , puxando-o em direção a  $\theta_0$ . De fato, com esta modificação e valor constante para o termo  $\Gamma \xi \varepsilon$ , ter-se-ia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta_0 + \frac{1}{\sigma} (\xi \varepsilon),$$

de modo que quanto maior o valor de  $\sigma$ , maior a tendência do vetor de parâmetros estimados de se aproximar do valor  $\theta_0$ .

## 2.4.3 Modificação de Zona Morta

A ideia por trás da modificação da zona morta é aumentar a robustez desligando a adaptação quando o erro de estimativa torna-se relativamente pequeno em comparação com um

valor constante preestabelecido  $\varepsilon_0$  (FARRELL; POLYCARPOU, 2006). A modificação da zona morta, de acordo com Farrell e Polycarpou (2006), é dada por

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \Gamma \xi \varepsilon, & \text{se } |\varepsilon| \geq \varepsilon_0, \\ 0, & \text{se } |\varepsilon| < \varepsilon_0, \end{cases} \quad (2.22)$$

onde  $\varepsilon_0$  é uma constante positiva que é uma estimativa de limite superior para  $\varepsilon(t)$ .

#### 2.4.3.1 Aplicação da Modificação de Zona Morta

De modo a ilustrar o efeito da modificação de zona morta, considere o exemplo desenvolvido na Seção 2.3.1. Nesse exemplo pode ocorrer a deriva dos parâmetros, além do fato de que não há nenhuma forma de se garantir que  $[g_0(x) + h_g^T(x)\hat{\theta}_g] \neq 0$ .

Mas com as modificações propostas por Farrell e Polycarpou (2006), é possível fazer algumas melhorias. Neste caso, primeiro é necessário fazer uma modificação de projeção nas leis de adaptação de forma que se possa garantir que os parâmetros adaptados (e com isso o erro de adaptação dos parâmetros) sempre estarão limitados. As leis de adaptação 2.14 passam a ser dadas de acordo com a Equação (2.20), conforme apresentado abaixo

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_f &= P_{S_f}(\Gamma_f h_f(x)e), \\ \dot{\hat{\theta}}_g &= P_{S_g}(\Gamma_g h_g(x)eu), \end{aligned} \quad (2.23)$$

com  $S_f$  e  $S_g$  conjuntos convexos que contêm os parâmetros estimados  $\hat{\theta}_f$  e  $\hat{\theta}_g$ , respectivamente. Além disso, considere a seguinte hipótese, em substituição à hipótese 1, juntamente àquelas já enumeradas na Seção 2.3.1:

$$1. \quad 0 \leq |\varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)u| \leq \delta.$$

Isto permite escrever que

$$\dot{V} \leq -ae^2 + |e|\delta \implies \dot{V} \leq 0, \text{ se } |e| > \frac{\delta}{a}. \quad (2.24)$$

A modificação de zona morta é utilizada na região  $\frac{\delta}{a} + \alpha$ . Definindo a função

$$d(e, \tilde{\alpha}) = \begin{cases} e, & \text{se } |e| \geq \tilde{\alpha}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.25)$$

em que  $\tilde{\alpha} = \frac{\delta}{a} + \alpha$ . As leis de adaptação com projeção e zona morta se tornam

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_f &= P_{S_f}(\Gamma_f h_f(x)d(e, \tilde{\alpha})), \\ \dot{\hat{\theta}}_g &= P_{S_g}(\Gamma_g h_g(x)d(e, \tilde{\alpha})u). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Da análise anterior, e considerando que as modificações introduzidas não têm impacto sobre as conclusões obtidas na Seção 2.3.1, sabemos que  $e$ ,  $\hat{\theta}_f$ ,  $\hat{\theta}_g$  são limitados. Além disso, a expressão (2.24) indica que  $e(t)$  é uniformemente finalmente limitado, além do fato de que o intervalo de tempo durante o qual  $|e| > \tilde{\alpha}$  é finito, conforme mostrado em (FARRELL; POLYCARPOU, 2006).

## 2.5 Backstepping

Nesta seção é apresentada a técnica de controle *backstepping*. Esta é uma técnica de controle desenvolvida no início dos anos 90 por Petar V. Kokotovic, e baseada na Teoria de Lyapunov para estabilizar sistemas dinâmicos não lineares (KANELLAKOPOULOS; KOKOTOVIC; MORSE, 1991). O método de *backstepping* tornou-se uma das abordagens de controle mais populares para uma classe de sistemas não lineares, e muitos desenvolvimentos significativos foram alcançados através desse método (KRSTIC; KOKOTOVIC; KANELLAKOPOULOS, 1995).

Por outro lado, de acordo com Farrell e Polycarpou (2006), quando o procedimento de *backstepping* é estendido ao caso de n-ésima ordem, torna-se consideravelmente mais complexo.

A técnica está baseada na repartição do sistema original em subsistemas, com uma estrutura aninhada predefinida, chamada de “forma de realimentação estrita”. Controladores são projetados para esses subsistemas de maneira recursiva, de modo a estabilizar cada subsistema a cada iteração. O processo termina quando o controle final (entrada) é especificado (KHALIL; GRIZZLE, 2002).

Considere como exemplo o seguinte sistema adaptado de (KOKOTOVIC; SUSSMANN, 1989) que pode ser escrito numa **Forma de Realimentação Estrita**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) + g_k(x_1, x_2, \dots, x_k)x_{k+1}, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})x_n, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u, \\ y = x_1. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

O sistema é conhecido, ou seja, as funções  $f_i(x)$  e  $g_i(x)$  são conhecidas e o objetivo é fazer com que a saída  $y(t)$  siga uma determinada referência  $y_d(t)$ .

A ideia é que a variável  $x_2$  seja considerada uma “entrada virtual” para o subsistema:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2,$$

de modo que seja possível forçar  $x_2$  a se comportar de forma a estabilizar este subsistema, enquanto se considera que a variável  $x_3$  seja uma “entrada virtual” para o subsistema seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3, \end{aligned}$$

e assim por diante, até que  $u$  seja considerada a entrada para o sistema completo (2.27) (KHALIL; GRIZZLE, 2002).. Baseado em Farrell e Polycarpou (2006), pode-se seguir o procedimento delineado abaixo:

- **Passo 1:** Na equação  $i$ , o erro de rastreamento deve ser definido como

$$z_i = x_i - x_{i,d},$$

onde

$$\begin{aligned} x_{1,d}(t) = y_d(t) &\Rightarrow z_1(t) = x_1(t) - y_d(t) \\ x_{2,d}(t) = \alpha_1(t) &\Rightarrow z_2(t) = x_2(t) - \alpha_1(t), \\ x_{3,d}(t) = \alpha_2(t) &\Rightarrow z_3(t) = x_3(t) - \alpha_2(t), \\ &\vdots \\ x_{n,d}(t) = \alpha_{n-1}(t) &\Rightarrow z_n(t) = x_n(t) - \alpha_{n-1}(t), \end{aligned}$$

em que  $\alpha_i(t)$  é a ação de controle virtual usada para controlar o valor da variável de estado  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

- **Passo 2:** Reescrever a equação para  $i = 1$  utilizando o erro de rastreamento  $z_1$ , considerando que  $x_2 = \alpha_1$ . Isto é, um novo sistema de 1<sup>a</sup> ordem, correlato mas diferente daquele que se quer realmente controlar, é considerado:

$$\dot{z}_1 = f_1 + g_1 \alpha_1 - \dot{y}_d,$$

em que as dependências com os estados e a saída desejada foram omitidos para simplificar a expressão. Deve-se então projetar  $\alpha_1$  (uma ação de controle virtual) para garantir que  $z_1 \rightarrow 0$ , usando uma função de Lyapunov apropriada, isto é, uma função definida positiva e continuamente diferenciável  $V_1(z_1) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 < 0, \forall z_1 \neq 0.$$

Por exemplo, se for escolhida

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2}(z_1)^2, \tag{2.28}$$

tem-se que

$$\frac{dV_1}{dt} = z_1 \dot{z}_1 = z_1 [f_1 + g_1 \alpha_1 - \dot{y}_d],$$

e, por exemplo, se for possível fazer (assumindo que não haverá singularidade),

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1} [-f_1 + \dot{y}_d - k_1 z_1], \tag{2.29}$$

tem-se que, para  $k_1 > 0$ ,

$$\frac{dV_1}{dt} = -k_1 (z_1)^2 < 0, \forall z_1 \neq 0.$$

- **Passo 3:** Projetar ações de controle virtuais  $\alpha_i$  de modo a fazer com que  $x_i$  se aproxime da ação de controle  $\alpha_{i-1}$  projetada no passo anterior, para  $i = 2, 3, \dots, n$ . O projeto é feito usando-se Funções de Lyapunov  $V_i(z_1, z_2, \dots, z_i)$  que garantem a convergência assintótica para a origem do espaço de erro de rastreamento. No projeto de cada ação de controle  $\alpha_i$  é considerado o seguinte sistema correlato de ordem  $i$ , que equivale a se considerar que a variável de estado  $x_{i+1} = \alpha_i$ :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1 + g_1 [z_2 + \alpha_1] - \dot{y}_d, \\ \dot{z}_2 = f_2 + g_2 [z_3 + \alpha_2] - \dot{\alpha}_1, \\ \vdots \\ \dot{z}_{i-1} = f_{i-1} + g_{i-1} [z_i + \alpha_{i-1}] - \dot{\alpha}_{i-2}, \\ \dot{z}_i = f_i + g_i [\alpha_i] - \dot{\alpha}_{i-1}, \end{cases}$$

com  $u = \alpha_n$  quando  $i = n$ , de modo a representar o sistema original (2.27).

Para se obter a função de Lyapunov  $V_i(z_1, z_2, \dots, z_i)$  se considera as Funções de Lyapunov usadas anteriormente na construção de  $V_{i-1}, V_{i-2}, \dots, V_1$ . Por exemplo, se as funções de Lyapunov forem escolhidas tal que

$$V_i(z_1, z_2, \dots, z_i) = V_{i-1}(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}) + \frac{1}{2}(z_i)^2, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (2.30)$$

então

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{dV_{i-1}}{dt} + z_i \dot{z}_i, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

de forma que, para  $i = 2, 3, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} &= \frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \dots + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_{i-1}} \dot{z}_{i-1} + z_i \dot{z}_i, \\ \frac{dV_i}{dt} &= \frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \dots + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_{i-1}} \{f_{i-1} + g_{i-1} [z_i + \alpha_{i-1}] - \dot{\alpha}_{i-2}\} + \\ &\quad + z_i \{f_i + g_i [\alpha_i] - \dot{\alpha}_{i-1}\}, \\ \frac{dV_i}{dt} &= \underbrace{\frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \dots + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_{i-1}} \{f_{i-1} + g_{i-1} [\alpha_{i-1}] - \dot{\alpha}_{i-2}\}}_{-k_1(z_1)^2 - k_2(z_2)^2 + \dots - k_{i-1}(z_{i-1})^2 < 0} + \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_{i-1}} g_{i-1} \right\} z_i + z_i \{f_i + g_i [\alpha_i] - \dot{\alpha}_{i-1}\}, \end{aligned}$$

onde o termo destacado na última expressão é definido negativo devido ao projeto das ações de controle virtuais  $\alpha_{i-1}, \alpha_{i-2}, \dots, \alpha_1$ . Para garantir que a derivada da função de Lyapunov  $V_i$  seja definida negativa neste caso, pode ser possível fazer (caso se possa evitar singularidade), com  $k_i > 0$ ,

$$\alpha_i = \frac{1}{g_i} \left[ -f_i + \dot{\alpha}_{i-1} - \frac{\partial V_{i-1}}{\partial z_{i-1}} g_{i-1} - k_i z_i \right], \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (2.31)$$

É interessante notar que as expressões (2.28), (2.29), (2.30) e (2.31), obtidas considerando-se o caso particular de funções de Lyapunov quadráticas e assumindo-se ausência de singularidades, formam um possível procedimento iterativo de projeto de controle para sistemas dinâmicos na forma estrita de realimentação (2.27). De fato, tais expressões (repetidas e resumidas aqui por conveniência):

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{g_1} [-f_1 + \dot{y}_d - k_1 z_1], \\ \alpha_i &= \frac{1}{g_i} [-f_i + \dot{\alpha}_{i-1} - g_{i-1} z_i - k_i z_i], \quad i = 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad (2.32)$$

$$u = \alpha_n.$$

mostram que o conhecimento das funções  $f_i$  e  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , bem como o cálculo das derivadas temporais  $\dot{\alpha}_{i-1}$ , são imprescindíveis para o projeto de controle. De acordo com (FARRELL; POLYCARPOU, 2006), a presença dos termos  $\dot{\alpha}_{i-1}$ , que nesta versão original da abordagem *backstepping* devem ser expandidos para serem usados como funções das variáveis de estado e da saída desejada, aumenta sobremaneira a complexidade da expressão matemática final. Uma alternativa é o uso do algoritmo chamado de “*backstepping* de comando filtrado” (FARRELL; POLYCARPOU, 2006, Seção 5.3.3), em que se lança mão de derivadas obtidas por meio de filtragem adequada dos sinais envolvidos.

De forma a ilustrar o procedimento anterior, considere um sistema de segunda ordem da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_2) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) + g_2(x)u \end{cases} \quad (2.33)$$

com uma entrada de controle  $u$ , uma saída controlada  $y = x_1$  e o vetor de estados  $x = [x_1 \ x_2]^T$ . Suponha que as funções  $g_1(x_1)$  e  $g_2(x)$  são tais que  $g_1(x_1) \neq 0$  e  $g_2(x) \neq 0$  dentro da região de operação do controlador.

Definindo uma mudança de variáveis para variáveis de erro em relação ao desejado, temos

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_d, \\ z_2 &= x_2 - \alpha, \end{aligned}$$

e reescrevendo a dinâmica do erro, temos

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_d = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 - \dot{y}_d, \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha} = f_2(x) + g_2(x)u - \dot{\alpha}. \end{aligned}$$

A dinâmica do erro pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)\alpha - g_1(x_1)\alpha + g_1(x_1)x_2 - \dot{y}_d \\ \dot{z}_2 &= f_2(x) + g_2(x)u - \dot{\alpha} \end{aligned}$$

O que leva a

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)\alpha + g_1(x_1)z_2 - \dot{y}_d \\ \dot{z}_2 &= f_2(x) + g_2(x)u - \dot{\alpha} \end{aligned}$$

Definindo

$$\alpha(x_1, y_d, \dot{y}_d) = \frac{-f_1(x_1) - k_1(x_1 - y_d) + \dot{y}_d}{g_1(x_1)}$$

temos que

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_d} \dot{y}_d + \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{y}_d} \ddot{y}_d$$

e a dinâmica do erro dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + g_1(x_1) z_2 \\ \dot{z}_2 &= f_2(x) + g_2(x) u - \dot{\alpha} \end{aligned}$$

Escolhendo uma função de Lyapunov quadrática da forma

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2$$

temos que sua derivada temporal será dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_1(-k_1 z_1 + g_1(x_1) z_2) + z_2(f_2(x) + g_2(x) u - \dot{\alpha}) \\ &= -k_1 z_1^2 + z_2(g_1(x_1) z_1 + f_2(x) + g_2(x) u - \dot{\alpha}) \end{aligned}$$

Logo, se escolhermos a ação de controle como

$$u = \frac{-f_2(x) - g_1(x_1) z_1 - k_2 z_2 + \dot{\alpha}}{g_2(x)}$$

teremos que a derivada temporal da função de Lyapunov será dada por

$$\dot{V} = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2$$

que é definida negativa e portanto garante a estabilidade assintótica da dinâmica do erro.

## 2.6 Controlador Adaptativo *Backstepping* com Filtragem de Comando

Nesta seção, o projeto de controle é baseado no conceito de substituição das não linearidades desconhecidas na lei de controle de feedback por aproximadores adaptativos, onde os pesos são atualizados de acordo com leis adaptativas adequadas.

Considere um sistema não linear incerto, na Forma de Realimentação Estrita:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_{1,0}(x_1) + f_1(x_1) + [g_{1,0}(x_1) + g_1(x_1)] x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_{2,0}(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) + [g_{2,0}(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)] x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_{n,0}(x) + f_n(x) + [g_{n,0}(x) + g_n(x)] u, \\ y &= x_1. \end{cases} \quad (2.34)$$

em que as funções  $f_i$  e  $g_i$  são desconhecidas, sendo substituídas por aproximadores universais semelhantes aos apresentados nas expressões (2.6), enquanto as funções  $f_{i,0}$  e  $g_{i,0}$  são conhecidas, para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Baseado em [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#), temos os seguintes passos:

- **Passo 1:** Na equação  $i$ , o erro de rastreamento deve ser definido como  $z_i = x_i - x_{i,d}$ , onde  $x_{1,d} = y_d$ .
- **Passo 2:** Considerar que as funções desconhecidas,  $f_i$  e  $g_i$ , são substituídas por aproximadores universais.
- **Passo 3:** Considerar uma função de Lyapunov, que leva em consideração o erro de adaptação, da equação 1 até a equação  $n$ .
- **Passo 4:** Escolher as leis de adaptação de forma a cancelar os termos envolvendo o erro de adaptação da derivada temporal da função de Lyapunov.
- **Passo 5:** . Reescrever a equação  $i$  utilizando o erro de rastreamento  $z_i$ , onde agora  $x_i$  será  $z_i + x_{i,d}$ .
- **Passo 6:** Projetar uma ação de controle virtual,  $\alpha_1$ , de modo a controlar  $x_1$  para seguir a saída de referência  $y_d$ .
- **Passo 7:** Projetar uma ação de controle virtual,  $\alpha_2$ , de modo a controlar  $x_2$  para seguir ação de controle virtual  $\alpha_1$ .
- **Passo 8:** Definimos uma série de filtros de comando e de erro no controlador para evitar o cálculo das derivadas temporais das ações de controle virtuais.
- **Passo 9:** Repetir o processo até projetar  $u$  de forma que  $x_n$  siga a ação de controle virtual  $\alpha_{n-1}$ .
- **Passo 10:** Considerando o caso em que o erro de aproximação não é nulo, uma forma de lidar com este problema é empregar a estratégia de zona morta para evitar a deriva dos parâmetros e uma projeção para garantir que os parâmetros se mantenham em uma região preestabelecida.

Assim como foi feito na Seção 2.5, utiliza-se a técnica *backstepping* que permite o desenvolvimento de uma cascata de controladores para sistemas na Forma de Realimentação Estrita. O desenvolvimento aqui apresentado é baseado em [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#). Definimos os

erros de rastreamento como

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - x_{1,d}, \quad x_{1,d} = y_d, \\ z_2 &= x_2 - x_{2,d}, \\ &\vdots \\ z_n &= x_n - x_{n,d}. \end{aligned}$$

Podemos definir as ações de controle virtuais como

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{-f_{1,0} - h_{f_1}^T \hat{\theta}_{f_1} - k_1 z_1 + \dot{y}_d}{g_{1,0} + h_{g_1}^T \hat{\theta}_{g_1}}, & \text{para } i = 1, \\ \frac{-f_{i,0} - h_{f_i}^T \hat{\theta}_{f_i} - k_i z_i + \dot{x}_{i,d} - s_{i-1}(g_{i-1,0} + h_{g_{i-1}}^T \hat{\theta}_{g_{i-1}})}{g_{i,0} + h_{g_i}^T \hat{\theta}_{g_i}}, & \text{para } i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.35)$$

com o chamado “erro de trajetória compensado” dado por

$$s_i = z_i - \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.36)$$

em que o “erro filtrado”  $\xi_i$  é computado por meio de

$$\dot{\xi}_i = -k_i \xi_i + (g_{i,0} + h_{g_i}^T \hat{\theta}_{g_i}) (x_{i+1,d} - x_{i+1,d}^0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.37)$$

Na expressão anterior, os valores desejados para os estados são dados por

$$\begin{aligned} x_{i,d}^0 &= \alpha_{i-1} - \xi_i, \quad i = 2, \dots, n, \\ x_{n+1,d}^0 &= \alpha_n, \end{aligned} \quad (2.38)$$

e os sinais  $x_{i,d}$  e  $\dot{x}_{i,d}$  são obtidos a partir da filtragem passa-baixas do sinal  $x_{i,d}^0$ , usando o chamado “filtro de comando” para  $i = 2, 3, \dots, n+1$ . Tal filtro deve ser projetado para que  $x_{i,d}$  se aproxime de  $x_{i,d}^0$ . Nesse contexto,  $\xi_i$  representa o erro filtrado, entre o estado desejado e o estado desejado filtrado, que é usado para compensar o uso dos sinais filtrados. Utilizamos um filtro passa baixa de primeira ordem, descrito por:  $\dot{x}_{id} = -ax_{id} + ax_{id}^0$ . Onde  $a$  é um parâmetro utilizado para determinar a largura de banda do filtro.

A dinâmica do erro de rastreamento  $z_1$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f_1^0 + h_{f_1}^T \theta_{f_1}^* + \varepsilon_{f_1} + (g_1^0 + h_{g_1}^T \hat{\theta}_{g_1})x_2 + h_{g_1}^T (\theta_{g_1}^* - \hat{\theta}_{g_1})x_2 + \varepsilon_{g_1}x_2 - \dot{y}_d \\ &= f_1^0 + h_{f_1}^T \theta_{f_1}^* + \varepsilon_{f_1} + h_{g_1}^T \tilde{\theta}_{g_1}x_2 + \varepsilon_{g_1}x_2 - \dot{y}_d \\ &+ (g_1^0 + h_{g_1}^T \hat{\theta}_{g_1})x_{2d}^0 + (g_1^0 + h_{g_1}^T \hat{\theta}_{g_1})(x_{2d} - x_{2d}^0) + (g_1^0 + h_{g_1}^T \hat{\theta}_{g_1})(x_{2d} - x_{2d}) \\ &= -k_1 z_1 - (g_1^0 + h_{g_1}^T \hat{\theta}_{g_1})\xi_2 + h_{f_1}^T \tilde{\theta}_{f_1} + \varepsilon_{f_1} + h_{g_1}^T \tilde{\theta}_{g_1}x_2 + \varepsilon_{g_1}x_2 \\ &+ (g_1^0 + h_{g_1}^T \hat{\theta}_{g_1})(x_{2d} - x_{2d}^0) + (g_1^0 + h_{g_1}^T \hat{\theta}_{g_1})z_2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

A dinâmica do erro de rastreamento  $z_i$  para  $i = 2, \dots, (n-1)$  pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= f_i^0 + h_{f_i}^T \theta_{f_i}^* + \varepsilon_{f_i} + (g_i^0 + h_{g_i}^T \hat{\theta}_{g_i}) x_{i+1} + h_{g_i}^T (\theta_{g_i}^* - \hat{\theta}_{g_i}) x_{i+1} + \varepsilon_{g_i} x_{i+1} - \dot{x}_{id} \\ &= f_i^0 + h_{f_i}^T \theta_{f_i}^* + \varepsilon_{f_i} + h_{g_i}^T \tilde{\theta}_{g_i} x_{i+1} + \varepsilon_{g_i} x_{i+1} - \dot{x}_{id} \\ &+ (g_i^0 + h_{g_i}^T \hat{\theta}_{g_i}) x_{(i+1)d} + (g_i^0 + h_{g_i}^T \hat{\theta}_{g_i}) (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)d}^0) + (g_i^0 + h_{g_i}^T \hat{\theta}_{g_i}) (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)d}^0) \quad (2.40) \\ &= -k_i z_i - s_{i-1} (g_{i-1}^0 + h_{g_{i-1}}^T \hat{\theta}_{g_{i-1}}) + (g_i^0 + h_{g_i}^T \hat{\theta}_{g_i}) s_{i+1} + h_{f_i}^T \tilde{\theta}_{f_i} + \varepsilon_{f_i} \\ &+ h_{f_i}^T \tilde{\theta}_{f_i} + \varepsilon_{f_i} + h_{g_i}^T \tilde{\theta}_{g_i} x_{i+1} + \varepsilon_{g_i} x_{i+1} + (g_i^0 + h_{g_i}^T \hat{\theta}_{g_i}) (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)d}^0) \end{aligned}$$

Por fim, a dinâmica do erro de rastreamento de  $z_n$  pode ser escrita como

$$\dot{z}_n = -k_n z_n - s_{n-1} (g_{n-1}^0 + h_{g_{n-1}}^T \hat{\theta}_{g_{n-1}}) + h_{f_n}^T \tilde{\theta}_{f_n} + \varepsilon_{f_n} + h_{g_n}^T \tilde{\theta}_{g_n} u + \varepsilon_{g_n} u \quad (2.41)$$

A dinâmica dos erros de trajetória compensados são dados por

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + (g_1^0 + h_{g_1}^T \hat{\theta}_{g_1}) s_2 + h_{f_1}^T \tilde{\theta}_{f_1} + \varepsilon_{f_1} + h_{g_1}^T \tilde{\theta}_{g_1} x_2 + \varepsilon_{g_1} x_2 \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= -k_i s_i - s_{i-1} (g_{i-1}^0 + h_{g_{i-1}}^T \hat{\theta}_{g_{i-1}}) + (g_i^0 + h_{g_i}^T \hat{\theta}_{g_i}) s_{i+1} \\ &+ h_{f_i}^T \tilde{\theta}_{f_i} + \varepsilon_{f_i} + h_{g_i}^T \tilde{\theta}_{g_i} x_{i+1} + \varepsilon_{g_i} x_{i+1} \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\dot{s}_n = -k_n s_n - s_{n-1} (g_{n-1}^0 + h_{g_{n-1}}^T \hat{\theta}_{g_{n-1}}) + h_{f_n}^T \tilde{\theta}_{f_n} + \varepsilon_{f_n} + h_{g_n}^T \tilde{\theta}_{g_n} u + \varepsilon_{g_n} u \quad (2.44)$$

Considerando inicialmente uma função de Lyapunov (apenas para o erro de trajetória compensado) da forma

$$V_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 \quad (2.45)$$

sua derivada temporal é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= \sum_{i=1}^n s_i \dot{s}_i \\ &= s_1 (-k_1 s_1 + (g_1^0 + h_{g_1}^T \hat{\theta}_{g_1}) s_2) + s_1 (h_{f_1}^T \tilde{\theta}_{f_1} + \varepsilon_{f_1} + h_{g_1}^T \tilde{\theta}_{g_1} x_2) + s_1 (\varepsilon_{f_1} + \varepsilon_{g_1} x_2) \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} s_i (-k_i s_i - s_{i-1} (g_{i-1}^0 + h_{g_{i-1}}^T \hat{\theta}_{g_{i-1}}) + (g_i^0 + h_{g_i}^T \hat{\theta}_{g_i}) s_{i+1}) \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} s_i (h_{f_i}^T \tilde{\theta}_{f_i} + \varepsilon_{f_i} + h_{g_i}^T \tilde{\theta}_{g_i} x_{i+1}) + \sum_{i=2}^{n-1} s_i (\varepsilon_{f_i} + \varepsilon_{g_i} x_{i+1}) \\ &+ s_n (-k_n s_n - s_{n-1} (g_{n-1}^0 + h_{g_{n-1}}^T \hat{\theta}_{g_{n-1}}) + h_{f_n}^T \tilde{\theta}_{f_n} + \varepsilon_{f_n} + h_{g_n}^T \tilde{\theta}_{g_n} u) + s_n (\varepsilon_{f_n} + \varepsilon_{g_n} u) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Consideramos então a função de Lyapunov, que leva em consideração o erro de adaptação,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (s_i^2 + \tilde{\theta}_{f_i}^T \Gamma_{f_i}^{-1} \tilde{\theta}_{f_i} + \tilde{\theta}_{g_i}^T \Gamma_{g_i}^{-1} \tilde{\theta}_{g_i}) \quad (2.47)$$

o ideal seria escolher as leis de adaptação de forma a cancelar os termos envolvendo o erro de adaptação da derivada temporal da função de Lyapunov. O que nos leva a escolher

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{fi} &= \Gamma_{fi} h_{fi} s_{fi}, \forall i \\ \hat{\theta}_{gi} &= \Gamma_{gi} h_{gi} s_i x_{i+1}, i = 1, \dots, (n-1) \\ \hat{\theta}_{gn} &= \Gamma_{gn} h_{gn} s_n u\end{aligned}\quad (2.48)$$

como

$$\begin{aligned}\varepsilon_{fi} + \varepsilon_{gi} x_{i+1} &= \delta_i, \text{ para } i = 1, \dots, (n-1) \\ \varepsilon_{fn} + \varepsilon_{gn} u &= \delta_n, \text{ para } i = n\end{aligned}\quad (2.49)$$

temos que

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^n k_i s_i^2 + \sum_{i=1}^n s_i \delta_i \quad (2.50)$$

se o erro de aproximação for nulo, temos que a derivada da função de Lyapunov é semi-definida negativa e o sistema é estável em malha fechada. Para o caso em que o erro de aproximação não é nulo, temos

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -s^T \text{diag}(k_1, \dots, k_n) s + s^T \delta \\ \dot{V} &\leq -\min(k_1, \dots, k_n) \|s\|_2^2 + \|s\|_2 \|\delta\|_2 \\ \dot{V} &\leq -\kappa \|s\|_2^2 + \|s\|_2 \|\delta\|_2\end{aligned}\quad (2.51)$$

com  $\kappa = \min(k_1, \dots, k_n)$ . O que nos leva a uma derivada temporal negativa da função de Lyapunov para

$$\begin{aligned}-\kappa \|s\|_2^2 + \|s\|_2 \|\delta\|_2 &< 0 \\ \kappa \|s\|_2^2 &> \|s\|_2 \|\delta\|_2 \\ \|s\|_2 &> \frac{\|\delta\|_2}{\kappa}\end{aligned}\quad (2.52)$$

logo, a trajetória do sistema converge para  $\|s\|_2 > \frac{\|\delta\|_2}{\kappa}$ . Portanto, é empregada uma zona morta e uma modificação de projeção.

A lei de adaptação com as modificações robustas passa a ser dada por

$$\hat{\theta}_{fi} = \begin{cases} P_{s_{fi}}(\Gamma_{fi} h_{fi} s_i), & \text{se } \|s\|_2 \geq \mu, \forall i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.53)$$

$$\hat{\theta}_{gi} = \begin{cases} P_{s_{gi}}(\Gamma_{gi} h_{gi} s_i x_{i+1}), & \text{se } \|s\|_2 \geq \mu, i = 1, \dots, (n-1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\hat{\theta}_{gn} = \begin{cases} P_{s_{gn}}(\Gamma_{gn} h_{gn} s_n u), & \text{se } \|s\|_2 \geq \mu \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.55)$$

com  $\mu > \frac{\|\delta\|_2}{\kappa}$ .

## 2.7 Observadores de Estados

A maior parte dos projetos de sistemas de controle necessita de acesso a todos os estados do sistema, mas nem sempre as variáveis de estado estão disponíveis. Para contornar essa situação, propõe-se estimar as variáveis que não são disponíveis por medição direta.

A estimativa de variáveis de estado não mensuráveis é comumente denominada observação de estados (OGATA, 2003). No caso de Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo - SLITs, observadores de estados podem ser projetados se, e somente se, a condição de observabilidade for satisfeita, conforme demonstrado por Luenberger (1966), ao propor um método para se estimar os estados de um SLIT a partir do conhecimento das suas entradas e das suas saídas, desde que este sistema seja observável, ou pelo menos detectável (CHEN, 1998).

Para Levine (2018) a implementação de algoritmos de controle de malha fechada projetados por métodos de espaço de estados talvez seja a aplicação mais importante para observadores. O projeto de controle consiste em duas partes: uma parte em que se projeta um controlador com base na suposição de que todas as variáveis de estados podem ser medidas; e uma outra parte em que se projeta um observador para estimar o estado do processo com base na saída observada. Essa abordagem consiste na aplicação do conhecido *Princípio da Separação* (LEVINE, 2018, capítulo 15), válido para SLITs.

### 2.7.1 Observadores de Estados Para Sistemas Não Lineares

Considere o sistema dinâmico não linear, apresentado em (LEVINE, 2018), cujos estados precisam ser observados:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ y &= g(x, u),\end{aligned}$$

em que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas, e  $y \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas. Considere que  $\hat{x}$  é o estado estimado, de modo que podemos definir o erro de observação como

$$e = x - \hat{x}.$$

Gostaríamos que o erro convergisse para zero no estado estacionário.

Uma forma de se obter um observador para sistemas não lineares é seguindo o procedimento comumente usado para sistemas lineares, que consiste em usar a diferença ou erro entre a saída do sistema e a saída do observador, com um observador que se assemelha ao sistema original:

$$r = y - \hat{y} = y - g(\hat{y}, u), \tag{2.56}$$

em que

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + \kappa(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= g(\hat{x}, u).\end{aligned}$$

onde  $\kappa$  é uma função não linear escolhida. A equação diferencial para o erro de observação é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}}, \\ &= f(x, u) - f(\hat{x}, u) - \kappa(y - g(\hat{x}, u)), \\ &= f(x, u) - f(x - e, u) + \kappa(g(x - e, u) - g(x, u)).\end{aligned}\tag{2.57}$$

Como em muitos casos não é possível escrever a dinâmica do erro dependendo apenas da própria variável erro, é difícil garantir a validade do *Princípio da Separação*, e muitas vezes o observador e o controlador devem ser projetados em conjunto (ou devem atender certas condições em conjunto de modo que o sistema em malha fechada funcione da maneira desejada).

Neste trabalho o projeto do observador de estados para uso em conjunto com a abordagem proposta (controlador adaptativo nebuloso) será apresentado com mais detalhes no Capítulo 6.

## 3 Sistema de Rotor Duplo

Neste capítulo, é apresentado o sistema que servirá como foco de aplicação neste trabalho. O modelo matemático, assim como as características do sistema de rotor duplo são apresentados.

### 3.1 Modelagem Matemática do Sistema TRMS

O modelo dinâmico do TRMS pode ser formulado usando a abordagem newtoniana. Esta abordagem segue a derivação apresentada em (Feedback Instruments, 2006). Para obter o torque resultante, considere o torque  $T_w$  exercido pelas forças peso, o torque devido ao atrito viscoso  $T_f$  na articulação do movimento de arfagem e o torque associado à propulsão do rotor principal  $T_p$ , conforme a seguinte equação de momento derivada para o movimento no plano vertical (grau de liberdade apenas para movimentação de arfagem):

$$I_h \ddot{\theta} = T_p - T_w - T_f, \quad (3.1)$$

onde  $\ddot{\theta}$  é a aceleração angular e  $I_h$  é o momento de inércia do TRMS em torno do eixo horizontal. Na representação em espaço de estado do modelo TRMS através das variáveis de estados  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ , que se referem ao movimento do plano vertical

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ I_h \dot{x}_2 &= T_p(\omega) - T_w(x_1) - T_f(x_2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $T_p$  está associado à entrada  $u_v$  do sistema que afeta a velocidade de rotação  $\omega$  da hélice do rotor principal.

O torque exercido pela força peso, tendo em vista que a articulação do conjunto não está alinhada com o centro de gravidade, é dado por

$$T_w(x_1) = m_g \sin(x_1), \quad (3.3)$$

com  $m_g > 0$ .

O modelo de atrito utilizado na modelagem do TRMS, considerado em (Feedback Instruments, 2006), consiste em uma combinação de atritos viscoso e de Coulomb, de tal forma que

$$T_f(x_2) = b_f x_2 + b_{f2} \text{sign}(x_2)$$

onde  $b_f > 0$  é o coeficiente de atrito viscoso, e  $b_{f2} > 0$  é o coeficiente do atrito de Coulomb. Seguindo a metodologia apresentada em (GALINDO; TORRES; RAFFO, 2016), este trabalho usa o modelo de atrito simplificado, dado por

$$T_f(x_2) = b_f x_2. \quad (3.4)$$

O modelo de torque de propulsão segue a estrutura apresentada em (Feedback Instruments, 2006), dado por

$$T_p = \alpha_1 \omega^2 \text{sign}(\omega) + \alpha_2 \omega, \quad (3.5)$$

onde  $\alpha_1 > 0$  e  $\alpha_2 > 0$  são parâmetros do modelo.

Este trabalho usa o modelo de um motor CC simplificado, dado por

$$\tau_m \frac{d\omega}{dt} = -\omega + k_m u_v, \quad (3.6)$$

sendo que  $\omega$  é a velocidade de rotação do propulsor principal,  $u_v$  é a tensão de entrada aplicada ao motor de corrente contínua,  $\tau_m$  é uma constante de tempo, e  $k_m$  é o ganho estático do motor CC.

Portanto, fazemos uso do modelo não linear de terceira ordem obtido por meio de dados experimentais, reportado em (GALINDO; TORRES; RAFFO, 2016; GALINDO, 2017):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ I_h \dot{x}_2 = \alpha_1 x_3^2 + \alpha_2 x_3 - m_g \text{sign}(x_1) - b_f x_2, \\ \tau_m \dot{x}_3 = -x_3 + k_m u_v, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$y = x_1,$$

onde  $x_1 = \theta$  é o ângulo de arfagem, em [rad];  $x_2 = \dot{\theta}$  é a velocidade angular de arfagem, em [rad/s];  $x_3 = \omega$  é a velocidade de rotação da hélice do rotor principal, em [rad/s];  $u_v$  é a tensão contínua aplicada ao motor elétrico que aciona a hélice do rotor, em [V]; e  $y$  é a medição da saída (o ângulo de arfagem).

Nosso objetivo é projetar um controlador adaptativo de modo que a saída  $y$  do sistema siga um sinal de referência desejado  $y_d$ , enquanto todos os sinais no sistema de malha fechada permaneçam limitados. Na época em que esta dissertação foi escrita, uma unidade do TRMS estava disponível para experimentação no Laboratório de Controle do Departamento de Engenharia Elétrica da UFMG. O Quadro 1, contém os dados encontrados por Galindo (2017), utilizado neste trabalho.

Consideramos, para o projeto do controlador, que as funções desconhecidas do sistema podem ser aproximadas usando  $f_i(x) \approx h_i^T(x)\theta_i^* + \varepsilon_i$ . Com  $\theta_i^*$  o parâmetro que resulta no menor erro máximo de representação da função.

Quadro 1 – Parâmetros TRMS

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
$m_g$	0,3199 Nm
$I_h$	$7,02 \times 10^{-2} \text{kg m}^2$
$\alpha_1$	$0,0152 \text{Nm}/(\text{rad/s})^2$
$\alpha_2$	$0,0738 \text{Nm}/(\text{rad/s})$
$b_f$	$11,5 \times 10^{-3} \text{Nms/rad}$
$\tau_m$	0,7185s
$k_m$	$1,0965(\text{rad/s})/\text{V}$

Fonte: (GALINDO, 2017)



## 4 *Backstepping* com Aproximação Adaptativa

Esse capítulo apresenta o projeto e análise do controle por *backstepping* utilizando a abordagem de aproximação adaptativa aplicado ao sistema de rotor duplo, seguindo toda a abordagem proposta por [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#).

### 4.1 Projeto de Controlador *Backstepping* com Aproximação Adaptativa

De forma a utilizarmos uma abordagem de *backstepping* por filtro de comando apresentada por [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#), **consideramos**, para o projeto do controlador, que o nosso sistema é descrito por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\
 &= [h_{f1}^T \theta_{f1}^* + \varepsilon_{f1}] + [h_{g1}^T \theta_{g1}^* + \varepsilon_{g1}] x_2, \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3, \\
 &= [h_{f2}^T \theta_{f2}^* + \varepsilon_{f2}] + [h_{g2}^T \theta_{g2}^* + \varepsilon_{g2}] x_3, \\
 \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)u, \\
 &= [h_{f3}^T \theta_{f3}^* + \varepsilon_{f3}] + [h_{g3}^T \theta_{g3}^* + \varepsilon_{g3}] u,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que as funções  $f_i$  e  $g_i$ , assim como os parâmetros ótimos  $\theta_{fi}^*$ ,  $\theta_{gi}^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são desconhecidos. Existe uma trajetória desejada  $y_d(t)$ , com derivada  $\dot{y}_d(t)$ , ambos os quais estão em uma região  $D$  para  $t \geq 0$  e ambos os sinais são conhecidos. Neste capítulo, a abordagem via filtro de comando é utilizada de modo a simplificar o projeto de controladores por *backstepping*. É interessante notar que o modelo assumido para o sistema não corresponde exatamente à forma da descrição do sistema na Equação (3.7), especificamente por considerarmos que  $g_2$  é função de  $x_1$  e  $x_2$ , enquanto que no sistema real teríamos uma função apenas de  $x_3$  (e um sistema que não está na forma de realimentação estrita). Entretanto, consideramos neste capítulo uma abordagem em que a dinâmica é totalmente desconhecida e este fato é ignorado. Espera-se que o controlador projetado seja capaz de lidar com este erro de projeto, e compense com as leis de adaptação. Os projetos apresentados nos capítulos seguintes assumem um maior conhecimento prévio da estrutura do sistema e não apresentam este problema.

As etapas recursivas do procedimento de *backstepping* são descritas a seguir.

**Etapa 1:** Definimos os erros de rastreamento como

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_d \\ z_2 &= x_2 - x_{2d} \\ z_3 &= x_3 - x_{3d} \end{aligned} \quad (4.2)$$

A dinâmica do erro de rastreamento  $z_1$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= h_{f1}^T \theta_{f1}^* + \varepsilon_{f1} + (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1})x_2 + h_{g1}^T (\theta_{g1}^* - \hat{\theta}_{g1})x_2 + \varepsilon_{g1}x_2 - \dot{y}_d \\ &= h_{f1}^T \theta_{f1}^* + \varepsilon_{f1} + h_{g1}^T \tilde{\theta}_{g1}x_2 + \varepsilon_{g1}x_2 - \dot{y}_d \\ &\quad + (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1})x_{2d}^0 + (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1})(x_{2d} - x_{2d}^0) + (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1})(x_{2d} - x_{2d}) \\ &= -k_1 z_1 - (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1})\xi_2 + h_{f1}^T \tilde{\theta}_{f1} + \varepsilon_{f1} + h_{g1}^T \tilde{\theta}_{g1}x_2 + \varepsilon_{g1}x_2 \\ &\quad + (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1})(x_{2d} - x_{2d}^0) + (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1})z_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

A dinâmica do erro de trajetória compensado, encontrada através da equação (2.42), é dada por

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1})s_2 + h_{f1}^T \tilde{\theta}_{f1} + \varepsilon_{f1} + h_{g1}^T \tilde{\theta}_{g1}x_2 + \varepsilon_{g1}x_2 \quad (4.4)$$

Considerando inicialmente uma função de Lyapunov, que leva em consideração o erro de adaptação, da seguinte forma

$$V_1 = \frac{1}{2}(s_1^2 + \tilde{\theta}_{f1}^T \Gamma_{f1}^{-1} \tilde{\theta}_{f1} + \tilde{\theta}_{g1}^T \Gamma_{g1}^{-1} \tilde{\theta}_{g1}) \quad (4.5)$$

onde  $V > 0$ ,  $\forall x \neq 0$  e  $V(0) = 0$ .

Deve-se escolher as leis de adaptação de forma a cancelar os termos envolvendo o erro de adaptação da derivada temporal da função de Lyapunov. Temos que a derivada temporal será dada por

$$\dot{V}_1 = s_1(-k_1 s_1 + (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1})s_2) + s_1(h_{f1}^T \tilde{\theta}_{f1} + h_{g1}^T \tilde{\theta}_{g1}x_2) + s_1(\varepsilon_{f1} + \varepsilon_{g1}x_2) \quad (4.6)$$

considerando que  $\varepsilon_{f1} + \varepsilon_{g1}x_2 = \delta_1$ . As leis de adaptação para o primeiro estado são

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_{f1} &= \Gamma_{f1} h_{f1} s_1, \\ \dot{\hat{\theta}}_{g1} &= \Gamma_{g1} h_{g1} s_1 x_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Portanto, introduzimos a variável de controle virtual  $\alpha_1$  que agora é definida em termos dos aproximadores adaptativos  $\hat{f}_1(x, \hat{\theta}_{f1})$ ,  $\hat{g}_1(x, \hat{\theta}_{g1})$ , conforme em (FARRELL; POLYCARPOU, 2006), da seguinte forma

$$\alpha_1 = \frac{-h_{f1}^T \hat{\theta}_{f1} - k_1 z_1 + \dot{y}_d}{h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1}} \quad (4.8)$$

**Etapa 2:** Introduzimos a variável de controle virtual  $\alpha_2$  que agora é definida em termos dos aproximadores adaptativos  $\hat{f}_2(x, \hat{\theta}_{f2})$ ,  $\hat{g}_2(x, \hat{\theta}_{g2})$ , conforme em Farrell e Polycarpou (2006), da seguinte forma

$$\alpha_2 = \frac{-h_{f2}^T \hat{\theta}_{f2} - k_2 z_2 + \dot{x}_{2d} - s_1(h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1})}{h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2}} \quad (4.9)$$

O erro de rastreamento para o segundo estado pode ser definido de acordo com a equação (4.2). A dinâmica do erro de rastreamento  $z_2$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= h_{f2}^T \theta_{f2}^* + \varepsilon_{f2} + (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})x_3 + h_{g2}^T (\theta_{g2}^* - \hat{\theta}_{g2})x_3 + \varepsilon_{g2}x_3 - \dot{x}_{2d} \\ &= h_{f2}^T \theta_{f2}^* + \varepsilon_{f2} + h_{g2}^T \tilde{\theta}_{g2}x_3 + \varepsilon_{g2}x_3 - \dot{x}_{2d} \\ &\quad + (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})x_{3d}^0 + (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})(x_{3d} - x_{3d}^0) + (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})(x_{3d} - x_{3d}) \\ &= -k_2 z_2 - s_1 (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1}) + (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})s_3 + h_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2} + \varepsilon_{f2} + h_{g2}^T \tilde{\theta}_{g2}x_3 + \varepsilon_{g2}x_3 \\ &\quad + (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})(x_{3d} - x_{3d}^0) \end{aligned} \quad (4.10)$$

A dinâmica do erro de trajetória compensado, encontrada através da equação (2.43), é dado por

$$\dot{s}_2 = -k_2 s_2 - s_1 (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1}) + (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})s_3 + h_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2} + \varepsilon_{f2} + h_{g2}^T \tilde{\theta}_{g2}x_3 + \varepsilon_{g2}x_3 \quad (4.11)$$

Considerando inicialmente uma função de Lyapunov, que leva em consideração o erro de adaptação, da seguinte forma

$$V_2 = \frac{1}{2}(s_2^2 + \tilde{\theta}_{f2}^T \Gamma_{f2}^{-1} \tilde{\theta}_{f2} + \tilde{\theta}_{g2}^T \Gamma_{g2}^{-1} \tilde{\theta}_{g2}) \quad (4.12)$$

onde  $V > 0, \forall x \neq 0$  e  $V(0) = 0$ .

As leis de adaptação para o primeiro estado são

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_{f2} &= \Gamma_{f2} h_{f2} s_2, \\ \dot{\hat{\theta}}_{g2} &= \Gamma_{g2} h_{g2} s_2 x_3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Temos a derivada temporal como

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= s_2 (-k_2 s_2 - s_1 (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1}) + (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})s_3) \\ &\quad + s_2 (h_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2} + h_{g2}^T \tilde{\theta}_{g2}x_3) + s_2 (\varepsilon_{f2} + \varepsilon_{g2}x_3) \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde  $V > 0, \forall x \neq 0$  e  $V(0) = 0$ .

Deve-se escolher as leis de adaptação de forma a cancelar os termos envolvendo o erro de adaptação da derivada temporal da função de Lyapunov. Temos que a derivada temporal será dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= s_2 (-k_2 s_2 + (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})s_3) + s_2 (h_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2} + h_{g2}^T \tilde{\theta}_{g2}x_3) + s_2 (\varepsilon_{f2} + \varepsilon_{g2}x_3) \\ &\quad + s_2 s_1 (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

considerando que  $\varepsilon_{f2} + \varepsilon_{g2}x_3 = \delta_2$ . Temos que a derivada temporal será dada por

$$\dot{V}_2 = -k_2 s_2^2 + s_2 \delta_2 + s_2 s_1 (h_{g1}^T \hat{\theta}_{g1}) + s_2 (-k_2 s_2 + (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})s_3) \quad (4.16)$$

**Etapa 3:** Definimos o erro de rastreamento para o terceiro estado de acordo com a equação (4.2). Na etapa final do projeto, a entrada de controle real  $u$  aparece. Temos que,  $u = \alpha_3$ , portanto

$$\alpha_3 = \frac{-h_{f3}^T \hat{\theta}_{f3} - k_3 z_3 + \dot{x}_{3d} - s_2 (h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})}{h_{g3}^T \hat{\theta}_{g3}} \quad (4.17)$$

A dinâmica do erro de rastreamento  $z_3$  pode ser escrita como

$$\dot{z}_3 = -k_3 z_3 - s_2(h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2}) + h_{f3}^T \tilde{\theta}_{f3} + \varepsilon_{f3} + h_{g3}^T \tilde{\theta}_{g3} u + \varepsilon_{g3} u \quad (4.18)$$

A dinâmica do erro de trajetória compensado, encontrada através da equação (2.44), é dada por

$$\dot{s}_3 = -k_3 s_3 - s_2(h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2}) + h_{f3}^T \tilde{\theta}_{f3} + \varepsilon_{f3} + h_{g3}^T \tilde{\theta}_{g3} u + \varepsilon_{g3} u \quad (4.19)$$

Considerando inicialmente uma função de Lyapunov, que leva em consideração o erro de adaptação, da seguinte forma

$$V_3 = \frac{1}{2}(s_3^2 + \tilde{\theta}_{f3}^T \Gamma_{f3}^{-1} \tilde{\theta}_{f3} + \tilde{\theta}_{g3}^T \Gamma_{g3}^{-1} \tilde{\theta}_{g3}) \quad (4.20)$$

onde  $V > 0$ ,  $\forall x \neq 0$  e  $V(0) = 0$ .

Temos a derivada temporal

$$\dot{V}_3 = s_3(-k_3 s_3 - s_2(h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})) + s_3(h_{f3}^T \tilde{\theta}_{f3} + h_{g3}^T \tilde{\theta}_{g3} u) + s_3(\varepsilon_{f3} + \varepsilon_{g3} u) \quad (4.21)$$

onde  $V > 0$ ,  $\forall x \neq 0$  e  $V(0) = 0$ .

Deve-se escolher as leis de adaptação de forma a cancelar os termos envolvendo o erro de adaptação da derivada temporal da função de Lyapunov. As leis de adaptação para o terceiro estado são

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_{f3} &= \Gamma_{f3} h_{f3} s_3, \\ \dot{\hat{\theta}}_{g3} &= \Gamma_{g3} h_{g3} s_3 u \end{aligned} \quad (4.22)$$

Temos que a derivada temporal será dada por

$$\dot{V}_3 = s_3(-k_3 s_3 - s_2(h_{g2}^T \hat{\theta}_{g2})) + s_3(\varepsilon_{f3} + \varepsilon_{g3} u) \quad (4.23)$$

considerando que  $\varepsilon_{f3} + \varepsilon_{g3} u = \delta_3$ .

**Etapa 4:** Nesta etapa, empregamos a zona morta para evitar a deriva dos parâmetros e uma projeção para garantir que os parâmetros se mantenham na região desejada. Consideramos que as leis de adaptação passam a ser dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_f &= P_{S_f}(\Gamma_f h_f(x) e) \\ \dot{\hat{\theta}}_g &= P_{S_g}(\Gamma_g h_g(x) e u) \end{aligned}$$

considera-se que  $S_f$  e  $S_g$  são conjuntos convexos que contêm parâmetros estimados. Dessa forma, as leis de adaptação com as modificações robustas passam a ser dadas por

$$\dot{\hat{\theta}}_{f1} = \begin{cases} P(\Gamma_{f1} h_1 s_1), & \text{se } \|s\|_2 \geq \mu \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{f2} = \begin{cases} P(\Gamma_{f2} h_2 s_2), & \text{se } \|s\|_2 \geq \mu \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{f3} = \begin{cases} P(\Gamma_{f3}h_3s_3), & \text{se } \|s\|_2 \geq \mu \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{g1} = \begin{cases} P(\Gamma_{g1}h_1s_1x_2), & \text{se } \|s\|_2 \geq \mu \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{g2} = \begin{cases} P(\Gamma_{g2}h_2s_2x_3), & \text{se } \|s\|_2 \geq \mu \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{g3} = \begin{cases} P(\Gamma_{g3}h_3s_3u), & \text{se } \|s\|_2 \geq \mu \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.29)$$

em que  $P(\cdot)$  é um operador de projeção da lei de adaptação para garantir que os parâmetros de  $\hat{\theta}_{g2}$  e  $\hat{\theta}_{g3}$  se mantenham sempre positivos (FARRELL; POLYCARPOU, 2006).

**Etapa 5:** De forma a implementarmos nosso controlador por aproximação adaptativa, sistemas nebulosos serão utilizados para aproximar as funções desconhecidas. O sistema de lógica difusa  $h_i^T \theta_i^* + \varepsilon_i$  é utilizado com o intuito de aproximar a função desconhecida  $\bar{f}_i$  tal que para qualquer dado  $\varepsilon_i > 0$ , têm-se:

$$\bar{f}_i = h_i^T \theta_i^* + \varepsilon_i \quad (4.30)$$

onde

$$\begin{aligned} h_1(x_1) &= w_1(x_1) \\ h_2(x_1, x_2) &= w_1(x_1) \otimes w_2(x_2) \\ h_3(x_1, x_2, x_3) &= w_1(x_1) \otimes w_2(x_2) \otimes w_3(x_3) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Portanto, três conjuntos fuzzy são definidos sobre o intervalo  $[-1, 1]$  para todas as variáveis de estado, escolhendo os pontos de particionamento como  $[-1, 0, 1]$ . As funções de pertinência fuzzy são escolhidas como funções gaussianas

$$\omega_{i,j}(x) = \exp \left[ \frac{-(x - \mu_{i,j})^T (x - \mu_{i,j})}{\eta_i^2} \right] \quad (4.32)$$

onde  $\mu_{i,j}$  são os valores centrais e  $\eta_i$  é a largura da função gaussiana, com  $\eta_i = \sqrt{2}$ , temos que

$$\begin{bmatrix} \omega_{i,1}(x) = \exp[-0.5(x_i + 1)^2] \\ \omega_{i,2}(x) = \exp[-0.5(x_i)^2] \\ \omega_{i,3}(x) = \exp[-0.5(x_i - 1)^2] \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

onde  $\otimes$  é o produto de kronecker, com  $i = 1, 2, 3$  e  $w_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{\sum_{k=1}^3 \omega_{ik}}$ .

O procedimento do projeto do controlador pode ser visto no diagrama de blocos mostrado na Figura 4.1.

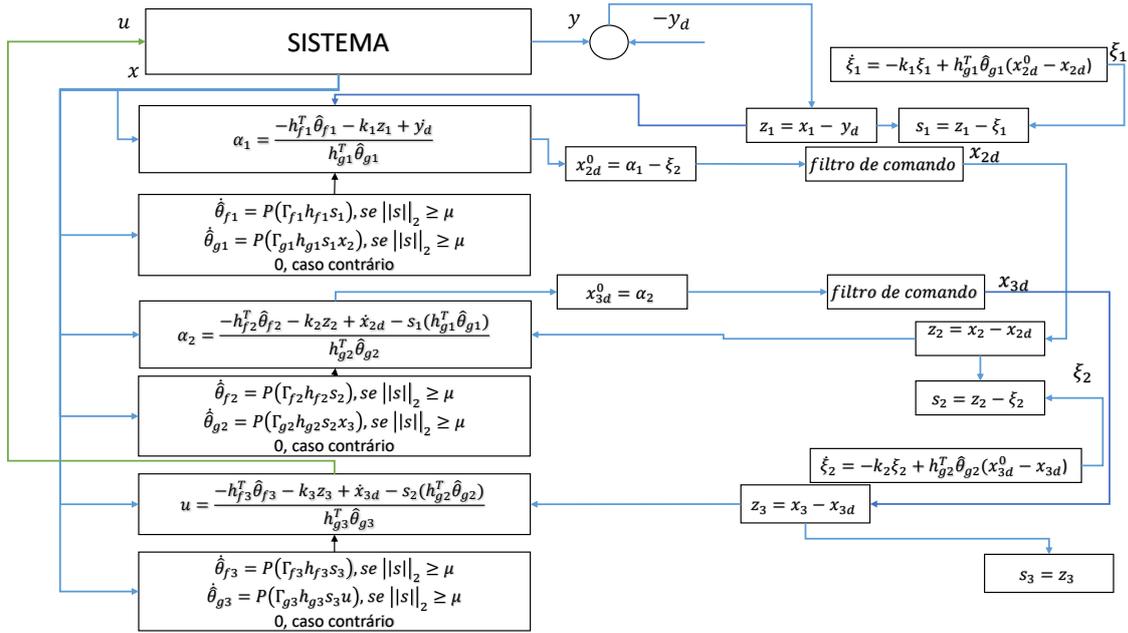


Figura 3 – Diagrama de blocos do sistema de controle.

## 4.2 Aplicação ao TRMS

Nesta seção, o sistema de rotor duplo é usado para testar o controlador apresentado. Definiu-se a referência desejada como  $y_d = \text{sen}(0.05t)$ . Os parâmetros de controle são escolhidos como  $\bar{\delta} = 0.005$ ,  $\Gamma_{g1} = \Gamma_{f1} = \Gamma_{g2} = \Gamma_{f2} = \Gamma_{g3} = \Gamma_{f3} = 1$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 1.55$ ,  $a = 1$  e a simulação é executada sob as condições iniciais  $x(0) = [0.1; 0.1; 0]^T$ , mediante a integração das equações diferenciais usando método Runge-Kutta de 4ª ordem com passo fixo de 10 ms. A Figura 4 mostra a saída do sistema e o sinal de referência e a Figura 29 mostra o sinal de erro entre a saída do sistema e o sinal de referência. As Figuras 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 mostram que todos os sinais de malha fechada estão limitados.

É realizada uma simulação, considerando a mesma estrutura apresentada acima, porém, com um ruído de medição. Foram testados dois casos. Para o primeiro caso, os desvios padrões são escolhidos como  $D_{p1} = 0.01$ ,  $D_{p2} = 0.001$ ,  $D_{p3} = 0.01$ . As figuras 15 e 16 mostram o desempenho do controlador com a adição do ruído de medição. Note que todos os sinais de malha fechada estão limitados.

Para o segundo caso, os desvios padrões são escolhidos como  $D_{p1} = 0.03$ ,  $D_{p2} = 0.002$ ,  $D_{p3} = 0.03$ . As figuras 17 e 18 mostram o desempenho do controlador com a adição do ruído de medição. Note que todos os sinais de malha fechada estão limitados.

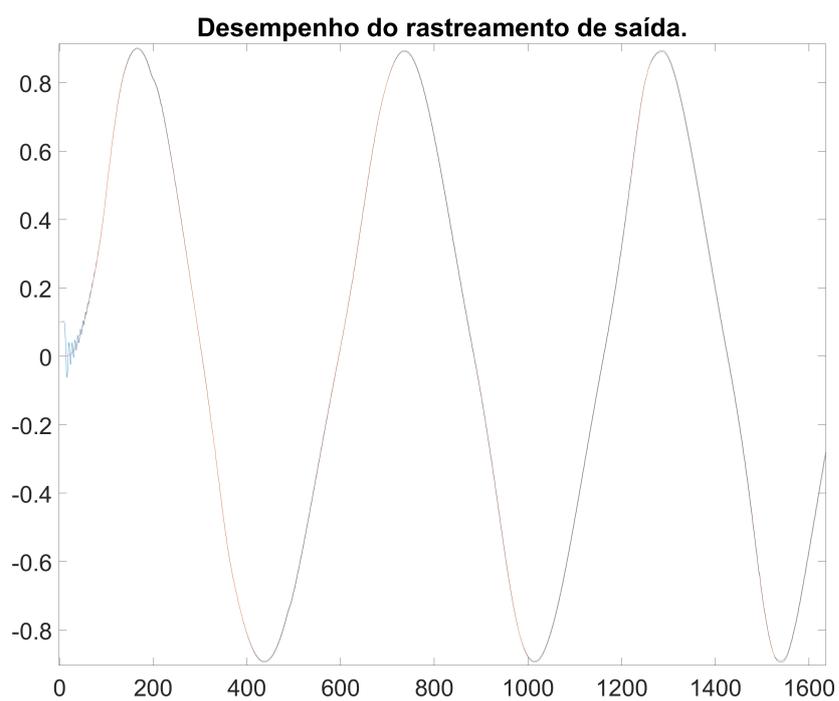


Figura 4 – Saída: Desempenho do rastreamento de saída.

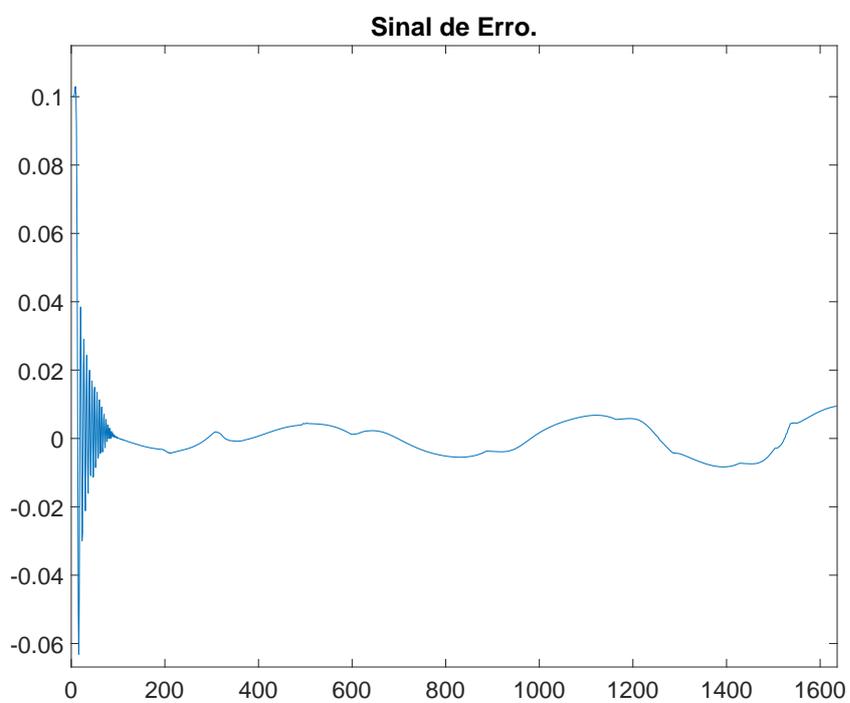


Figura 5 – Sinal de erro.

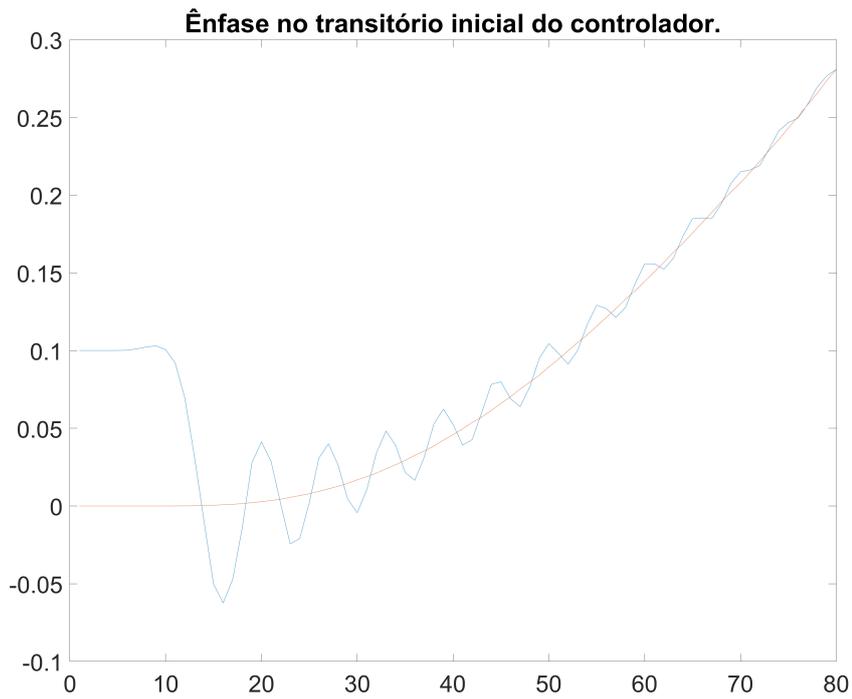


Figura 6 – Saída: Ênfase no transitório inicial do controlador.

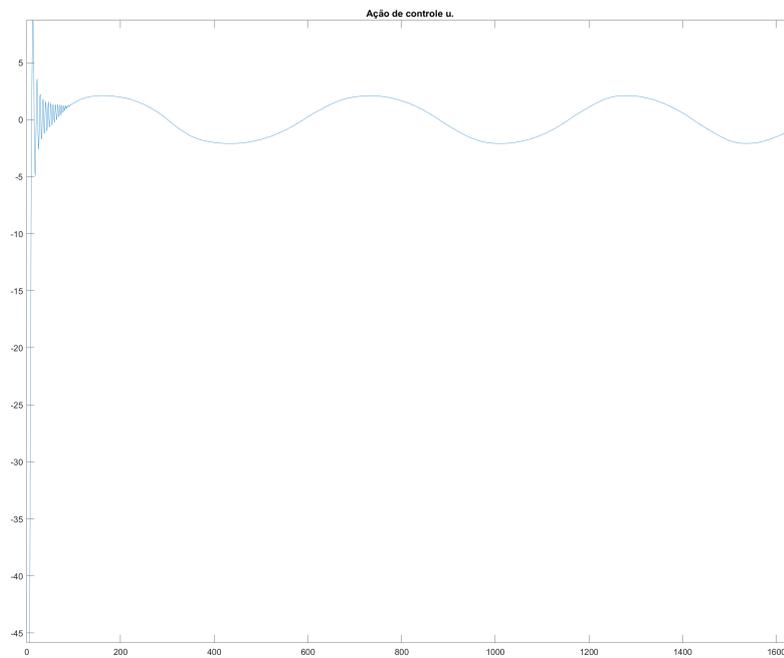
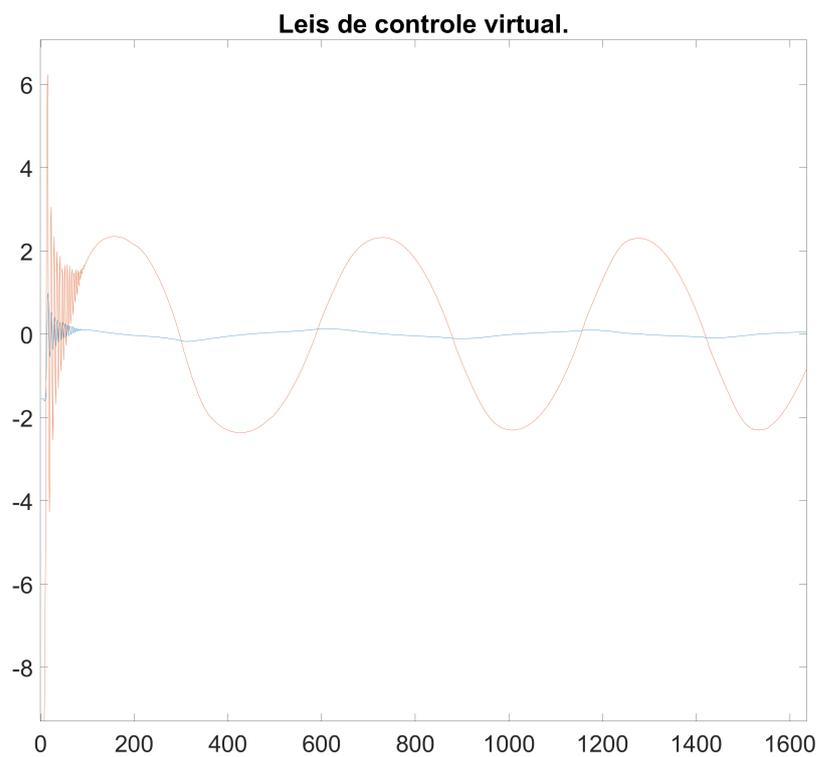
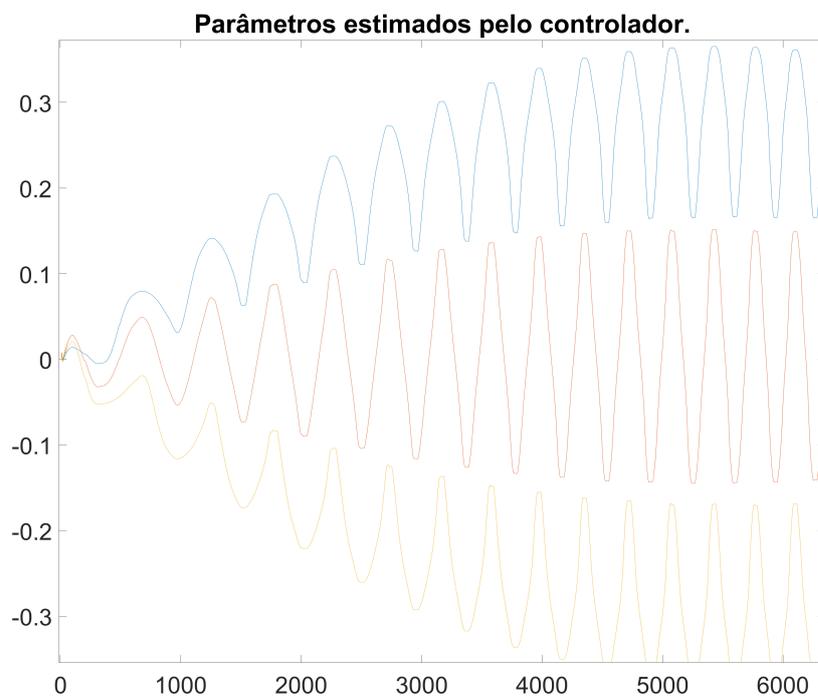
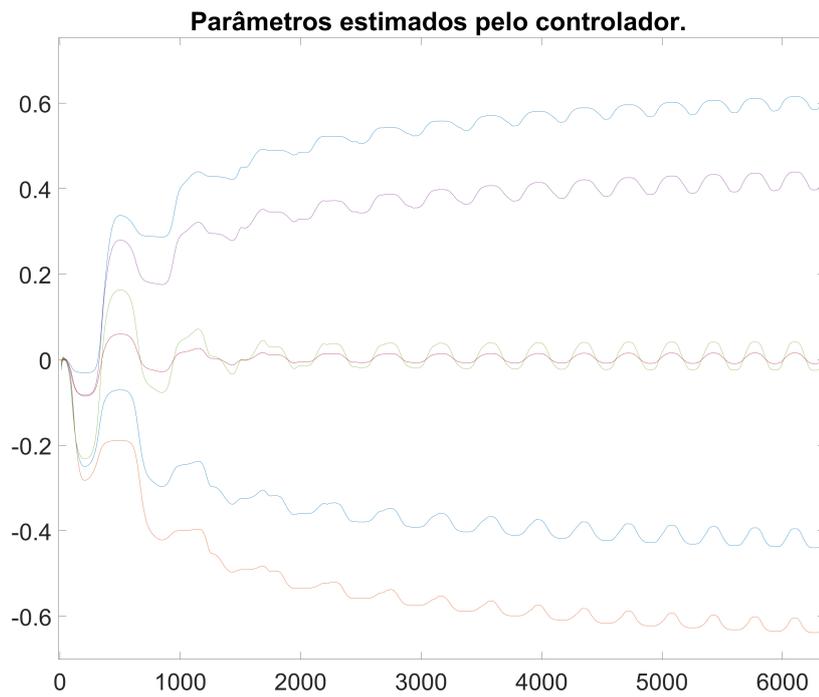
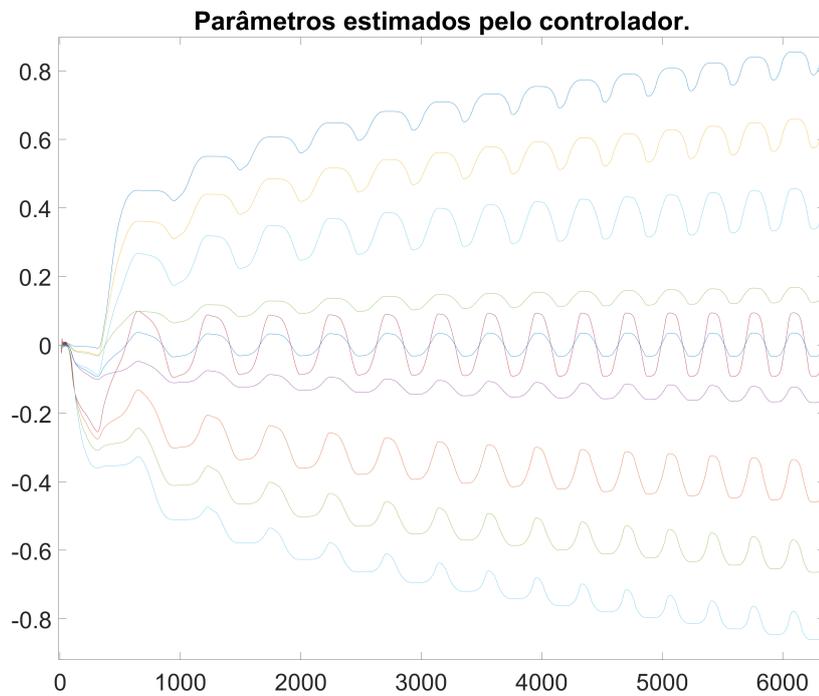
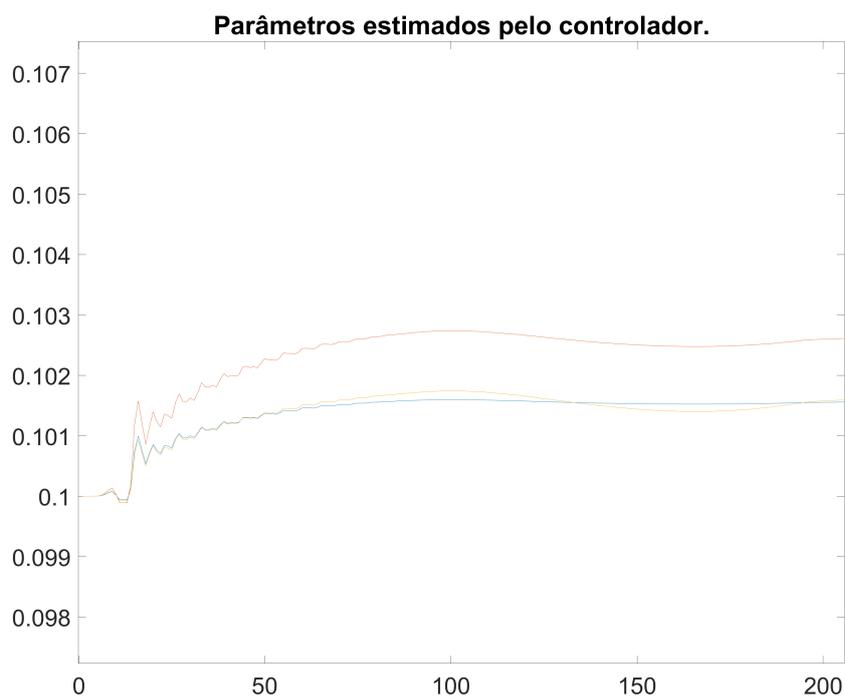
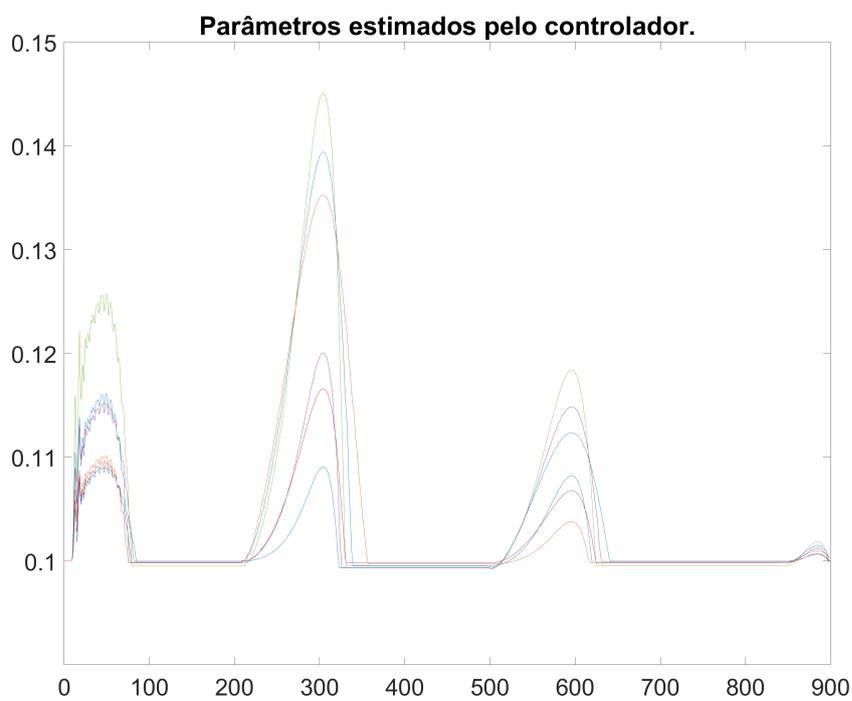


Figura 7 – Ação de controle u.

Figura 8 – Leis de controle virtual  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .Figura 9 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{f1}$

Figura 10 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{f2}$ Figura 11 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{f3}$

Figura 12 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{g1}$ Figura 13 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{g2}$

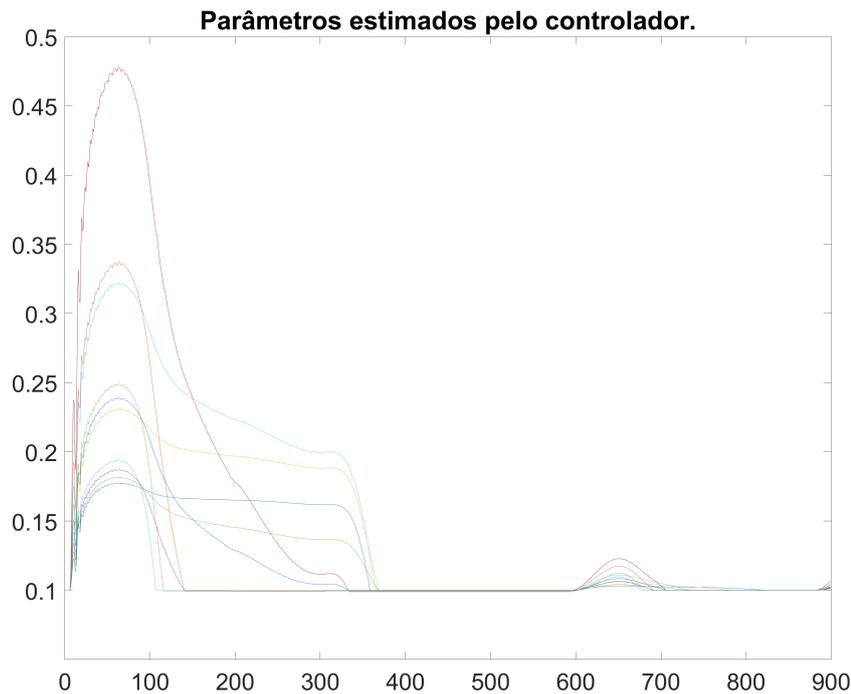


Figura 14 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{g3}$

### 4.3 Conclusão

Um projeto de controlador baseado *backstepping* com aproximação adaptativa é proposto para o sistema de rotor duplo com incertezas. Se, por um lado, usando esta metodologia não há necessidade de lidar diretamente com a dinâmica do sistema, por outro, o conhecimento humano do comportamento do sistema se faz necessário através das funções de pertinência escolhidas para aproximar o sistema com base nos valores de saída que o mesmo deve apresentar.

Os sinais ficaram limitados em malha fechada, erros de trajetória, erros de trajetória compensados, erros de adaptação e parâmetros de adaptação, o que é garantido pela lei de controle proposta em conjunto com as leis de atualização correspondentes. Finalmente, a simulação também mostra a eficácia desse esquema de controle adaptativo para o caso de controle de rastreamento de trajetória do TRMS. A abordagem seguindo a metodologia proposta por (FARRELL; POLYCARPOU, 2006) estimou um total de 78 parâmetros.

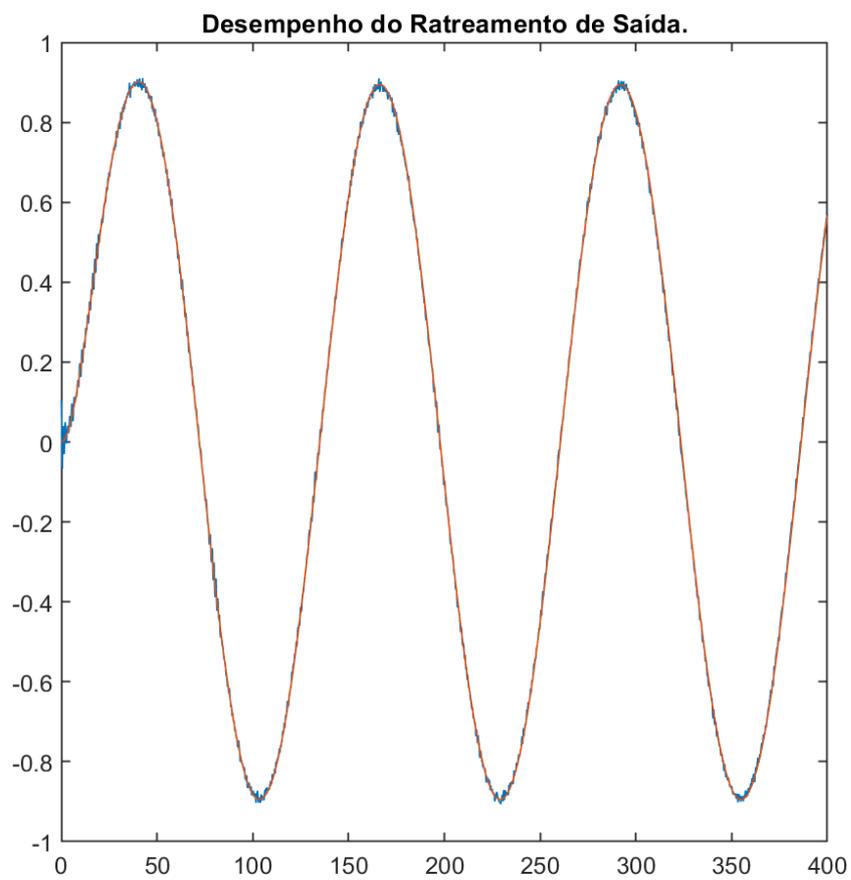


Figura 15 – Rastreamento de saída.

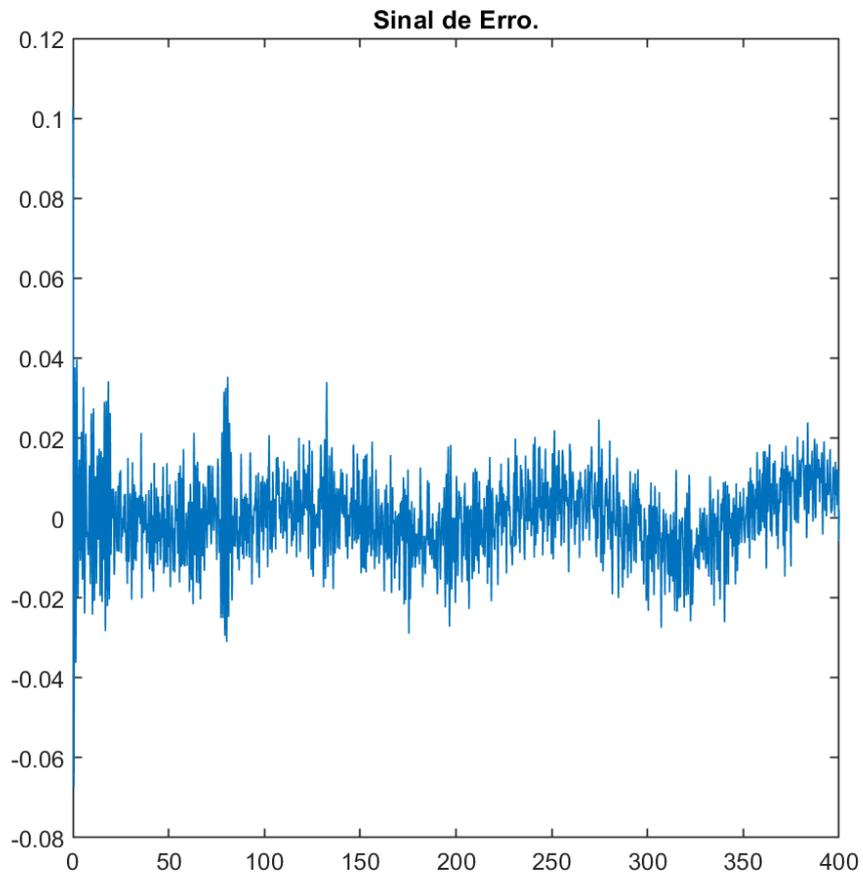


Figura 16 – Sinal de Erro.

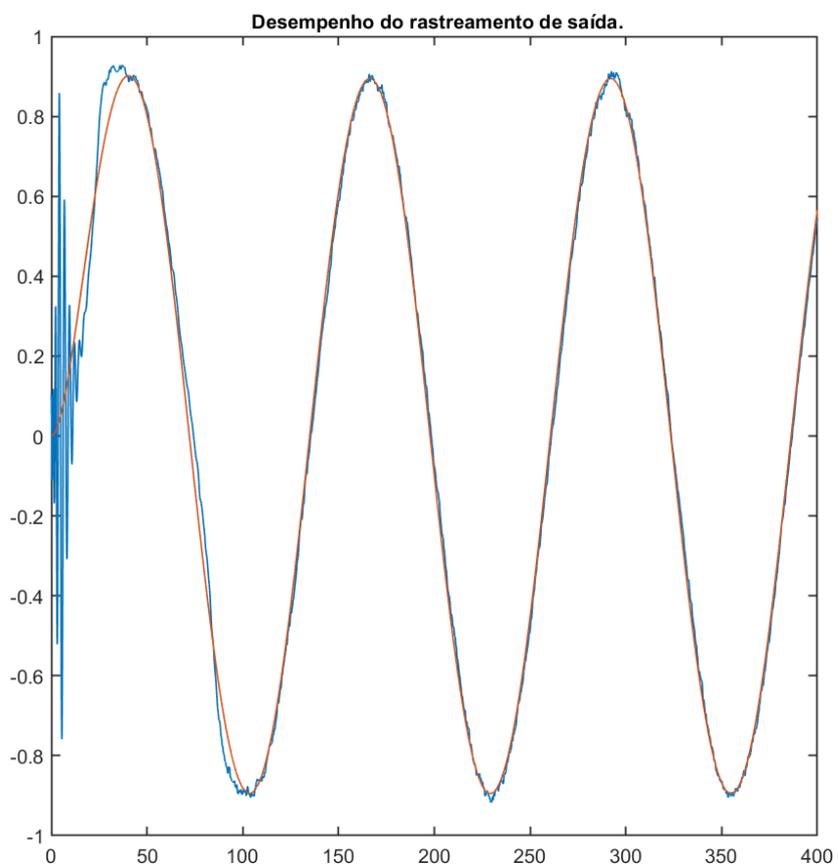


Figura 17 – Rastreamento de saída.

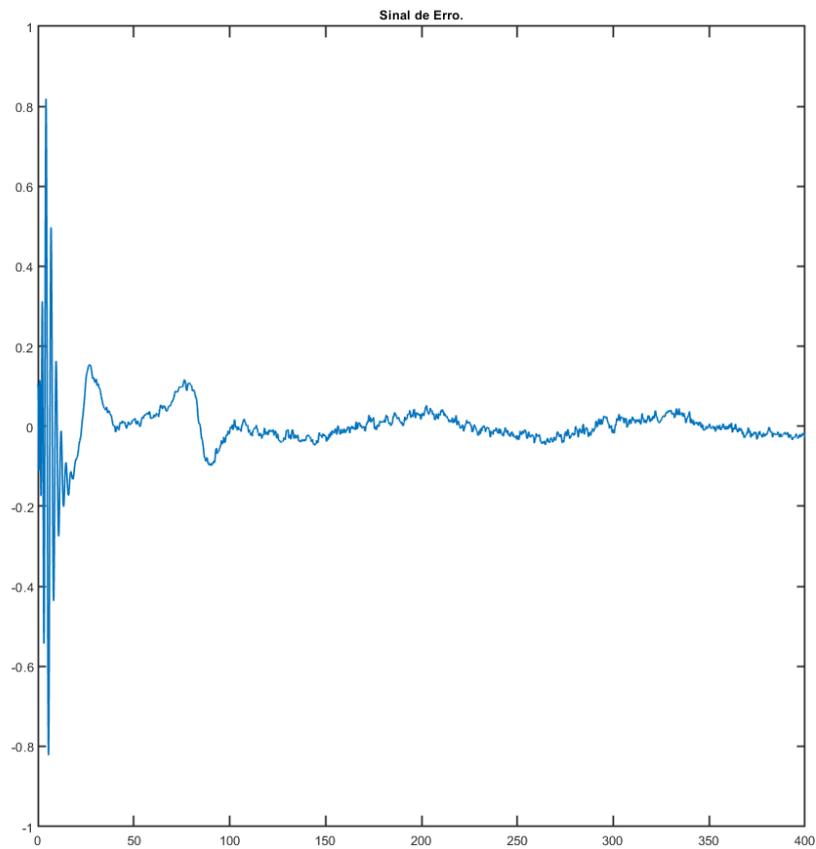


Figura 18 – Sinal de Erro.

## 5 *Backstepping* com Aproximação Adaptativa e Redução de Complexidade

Nota-se que na abordagem apresentada no capítulo anterior acaba-se estimando muitos parâmetros. Dessa forma, neste capítulo o projeto faz uso de um modelo que considera um conhecimento melhor da estrutura do sistema, além de utilizar a abordagem proposta em [Chen et al. \(2012\)](#) que permite que a norma dos vetores de parâmetros seja estimada em alguns casos, no lugar da estimação dos parâmetros.

### 5.1 Projeto de Controlador Adaptativo *backstepping*

**Etapa 1:** De forma a utilizarmos uma abordagem de *backstepping* por filtro de comando apresentada por [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#), consideramos, para o projeto do controlador, que o nosso sistema é descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_3)x_3, \\ \dot{x}_3 &= \theta_{f3}x_3 + \theta_{g3}u.\end{aligned}\tag{5.1}$$

em que as funções  $f_2(x_1, x_2)$  e  $g_2(x_3)$ , assim como os parâmetros  $\theta_{f3}$  e  $\theta_{g3}$  são desconhecidos. As variáveis de erro de rastreamento são definidas como

$$z_1 = x_1 - y_d, \quad z_2 = x_2 - x_{2d}, \quad z_3 = x_3 - x_{3d};$$

em que  $x_{2d}$  e  $x_{3d}$  serão determinados pelo controlador *backstepping*, regulando  $z = [z_1, z_2, z_3]^T$  a zero. E os erros de rastreamento compensados são definidos como

$$s_1 = z_1 - \xi_1, \quad s_2 = z_2 - \xi_2, \quad s_3 = z_3;$$

com  $\xi_1, \xi_2$  representando os erros filtrados entre os estados desejados e suas filtragens, que serão determinados pelo controlador. No projeto usando filtro de comando as variáveis que o controlador realmente leva para zero são os erros compensados  $s$ , diferentemente de um controlador *backstepping* tradicional que leva  $z$  para zero. Com uma boa escolha de filtros de comando, a diferença entre estes sinais se torna pequena.

**Etapa 2:** Definimos a lei de controle virtual para o primeiro subsistema como

$$\alpha_1 = -k_1 z_1 + \dot{y}_d\tag{5.2}$$

sendo  $k_1$  uma constante positiva.

Definimos o estado desejado não filtrado

$$x_{2d}^0 = \alpha_1 - \xi_2 \quad (5.3)$$

e o estado desejado filtrado por meio do filtro de comando

$$\dot{x}_{2d} = -ax_{2d} + ax_{2d}^0 \quad (5.4)$$

O filtro de erro entre o estado desejado e o estado desejado filtrado, é dado por

$$\dot{\xi}_1 = -k_1 \xi_1 + (x_{2d} - x_{2d}^0) \quad (5.5)$$

A dinâmica do primeiro erro compensado passa a ser dada por

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{z}_1 - \dot{\xi}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_d - \dot{\xi}_1 \\ \dot{s}_1 &= x_2 - \dot{y}_d + k_1 \xi_1 - (x_{2d} - x_{2d}^0) \\ \dot{s}_1 &= x_2 - x_{2d} + x_{2d}^0 - \dot{y}_d + k_1 \xi_1 \\ \dot{s}_1 &= z_2 - k_1 z_1 + \dot{y}_d - \dot{\xi}_2 - \dot{y}_d + k_1 \xi_1 \\ \dot{s}_1 &= -k_1 s_1 + s_2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Selecionamos a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} s_1^2 \quad (5.7)$$

onde  $V > 0, \forall x \neq 0$  e  $V(0) = 0$ .

De modo que sua derivada temporal será dada por

$$\dot{V}_1 = s_1 \dot{s}_1 = -k_1 s_1^2 + s_1 s_2 \quad (5.8)$$

o primeiro termo,  $-k_1 s_1^2$ , é definido negativo. Já o segundo pode assumir qualquer sinal. Por isso, vamos tratar dele com a ação de controle virtual/função de Lyapunov do próximo estado.

**Etapa 3:** Prosseguimos com a equação diferencial do segundo estado em (3.7). Aproximamos a dinâmica desconhecida utilizando modelos Takagi-Sugeno (como aproximadores universais) de modo que

$$\dot{x}_2 = h_2(x_1, x_2)^T \theta_{f2} + \varepsilon_{f2}(x_1, x_2) + h_3(x_3)^T \theta_{g2} x_3 + \varepsilon_{g2}(x_3) x_3 \quad (5.9)$$

com  $h_2(x_1, x_2)$  e  $h_3(x_3)$  as funções de pertinência normalizadas dos aproximadores  $\theta_{f2}$  e  $\theta_{g2}$  os parâmetros dos modelos TS, e  $\varepsilon_{f2}(x_1, x_2)$  e  $\varepsilon_{g2}(x_3)$  os erros de aproximação entre as funções originais e os aproximadores. Podemos considerar um único erro de aproximação conjunto

$$\delta = \varepsilon_{f2}(x_1, x_2) + \varepsilon_{g2}(x_3) x_3 \quad (5.10)$$

De forma a reduzir o número de parâmetros estimados pelo controlador adaptativo, fazemos uso da abordagem apresentada em [Chen et al. \(2012\)](#) e propomos o uso de um controlador que faça uso apenas da norma dos parâmetros  $\theta_{f2}$  na lei de controle.

Definimos a lei de controle virtual  $\alpha_2$  como

$$\alpha_2 = \frac{-s_1 - k_2 z_2 + \dot{x}_{2d} - \frac{1}{2\nu} s_2 \hat{\gamma} h_2^T h_2}{h_{g3}^T \hat{\theta}_{g2}} \quad (5.11)$$

em que  $\hat{\gamma}$  é uma estimativa para a norma ao quadrado dos parâmetros  $\theta_{f2}$ ,  $\hat{\theta}_{g2}$  é uma estimativa para os parâmetros  $\theta_{g2}$ ,  $\nu$  é um parâmetro positivo de sintonia do controlador. Definimos o estado desejado

$$x_{3d}^0 = \alpha_2. \quad (5.12)$$

Note que, diferentemente de como definimos  $x_{2d}^0$  não utilizamos um filtro de erro (porque  $x_3$  é o nosso último estado e, portanto, temos que  $\xi_3 = 0$ ). Sendo assim, definimos o estado desejado  $x_{3d}$  por meio de uma filtragem, que pode ser por exemplo

$$\dot{x}_{3d} = -a x_{3d} + a x_{3d}^0 \quad (5.13)$$

que é nosso filtro de comando. Definimos também nosso filtro de erro (entre o estado desejado e o estado desejado filtrado), dado por

$$\dot{\xi}_2 = -k_2 \xi_2 + h_3^T \hat{\theta}_{g2} (x_{3d} - x_{3d}^0) \quad (5.14)$$

Dessa forma, a dinâmica do segundo erro compensado passa a ser dada por

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= \dot{z}_2 - \dot{\xi}_2 \\ \dot{s}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} - \dot{\xi}_2 \\ \dot{s}_2 &= h_2^T \theta_{f2} + h_3^T \theta_{g2} x_3 + \delta - \dot{x}_{2d} + k_2 \xi_2 - h_3^T \hat{\theta}_{g2} (x_{3d} - x_{3d}^0) + h_3^T \hat{\theta}_{g2} x_3 - h_3^T \hat{\theta}_{g2} x_3 \\ \dot{s}_2 &= -s_1 - k_2 s_2 + h_3^T \hat{\theta}_{g2} s_3 + h_3^T \tilde{\theta}_{g2} x_3 + h_2^T \theta_{f2} - \frac{1}{2\nu} s_2 \hat{\gamma} h_2^T h_2 + \delta \end{aligned} \quad (5.15)$$

com  $\tilde{\theta}_{g2} = \theta_{g2} - \hat{\theta}_{g2}$ . Para a segunda dinâmica consideramos a função de Lyapunov da forma

$$V_2 = \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{1}{2\Gamma_\gamma} \tilde{\gamma}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{g2}^T \Gamma_{g2}^{-1} \tilde{\theta}_{g2} \quad (5.16)$$

com  $\tilde{\gamma} = \gamma - \hat{\gamma}$ .

A derivada temporal deste termo será dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= s_2 \dot{s}_2 - \frac{1}{\Gamma_\gamma} \tilde{\gamma} \dot{\hat{\gamma}} - \tilde{\theta}_{g2}^T \Gamma_{g2}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{g2} \\ \dot{V}_2 &= -k_2 s_2^2 - s_1 s_2 + h_3^T \hat{\theta}_{g2} s_2 s_3 + s_2 (h_3^T \tilde{\theta}_{g2} x_3 + h_2^T \theta_{f2} - \frac{1}{2\nu} s_2 \hat{\gamma} h_2^T h_2 + \delta) - \frac{1}{\Gamma_\gamma} \tilde{\gamma} \dot{\hat{\gamma}} - \tilde{\theta}_{g2}^T \Gamma_{g2}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{g2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Adaptando a abordagem apresentada em [Chen et al. \(2012\)](#), temos que

$$s_2 h_2^T \theta_{f2} \leq \frac{1}{2} \left( v + \frac{1}{v} s_2^2 \theta_{f2}^T \theta_{f2} h_2^T h_2 \right) = \frac{1}{2} v + \frac{1}{2v} s_2^2 \gamma h_2^T h_2 \quad (5.18)$$

com  $\gamma = \theta_{f2}^T \theta_{f2}$ .

Dessa forma, temos que a derivada temporal do segundo termo da função de Lyapunov pode ser limitada por

$$\dot{V}_2 \leq -k_2 s_2^2 - s_1 s_2 + h_3^T \hat{\theta}_{g2} s_2 s_3 + \tilde{\theta}_{g2}^T h_3 x_3 s_2 + \frac{1}{2v} s_2^2 \tilde{\gamma} h_2^T h_2 + \left( \frac{1}{2} v + s_2 \delta \right) - \frac{1}{\Gamma_\gamma} \tilde{\gamma} \dot{\gamma} - \tilde{\theta}_{g2}^T \Gamma_{g2}^{-1} \dot{\hat{\theta}}_{g2} \quad (5.19)$$

Escolhendo as leis de adaptação

$$\dot{\hat{\gamma}} = \frac{\Gamma_\gamma}{2v} s_2^2 h_2^T h_2, \quad (5.20)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{g2} = \Gamma_{g2} h_3 x_3 s_2, \quad (5.21)$$

o limitante superior para a derivada temporal do segundo termo da função de Lyapunov se torna

$$\dot{V}_2 \leq -k_2 s_2^2 - s_1 s_2 + h_3^T \hat{\theta}_{g2} s_2 s_3 + \left( \frac{1}{2} v + s_2 \delta \right) \quad (5.22)$$

O primeiro termo,  $-k_2 s_2^2$ , é definido negativo, como queremos. O segundo termo, será responsável por cancelar o termo que sobrou da parte da função de Lyapunov da primeira dinâmica. O terceiro, porém, pode assumir qualquer tipo de sinal e será tratado pela ação de controle/função de Lyapunov do último estado. O último termo, porém, é resultado do uso dos aproximadores universais, e da simplificação para estimação em norma, e pode causar dificuldades em nossa análise. Portanto, uma modificação robusta na lei de controle será realizada de forma a limitar os efeitos causados por esse termo.

**Etapa 4:** Para o terceiro estado, temos a ação de controle

$$u = \frac{-\hat{\theta}_{f3} x_3 - k_3 z_3 + \dot{x}_{3d} - h_3^T \hat{\theta}_{g2} s_2}{\hat{\theta}_{g3}} \quad (5.23)$$

Para esse estado, não precisamos definir um filtro de comando, uma vez que a equação acima já representa a ação de controle que será aplicada sobre o sistema. Por conta disso, também não precisamos definir um filtro de erro (e temos que  $\xi_3 = 0$ ). Dessa forma, a dinâmica do terceiro erro compensado, passa a ser dada por

$$\begin{aligned} \dot{s}_3 &= \dot{z}_3 = \dot{x}_3 - \dot{x}_{3d} \\ \dot{s}_3 &= \theta_{f3} x_3 + \theta_{g3} u - \dot{x}_{3d} + \hat{\theta}_{g3} u - \dot{\hat{\theta}}_{g3} u \\ \dot{s}_3 &= -k_3 s_3 - h_3^T \hat{\theta}_{g2} s_2 + \tilde{\theta}_{f3} x_3 + \tilde{\theta}_{g3} u \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para a terceira dinâmica consideramos a função de Lyapunov da forma

$$V_3 = \frac{1}{2}s_3^2 + \frac{1}{2\Gamma_{f3}}\tilde{\theta}_{f3}^2 + \frac{1}{2\Gamma_{g3}}\tilde{\theta}_{g3}^2 \quad (5.25)$$

De modo que sua derivada temporal será dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= s_3\dot{s}_3 - \frac{1}{\Gamma_{f3}}\tilde{\theta}_{f3}\dot{\tilde{\theta}}_{f3} - \frac{1}{\Gamma_{g3}}\tilde{\theta}_{g3}\dot{\tilde{\theta}}_{g3} \\ \dot{V}_3 &= -k_3s_3^2 - h_3^T\hat{\theta}_{g2}s_2s_3 + \tilde{\theta}_{f3}x_3s_3 + \tilde{\theta}_{g3}us_3 - \frac{1}{\Gamma_{f3}}\tilde{\theta}_{f3}\dot{\tilde{\theta}}_{f3} - \frac{1}{\Gamma_{g3}}\tilde{\theta}_{g3}\dot{\tilde{\theta}}_{g3} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Escolhendo as leis de adaptação

$$\dot{\tilde{\theta}}_{f3} = \Gamma_{f3}x_3s_3, \quad (5.27)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_{g3} = \Gamma_{g3}s_3u, \quad (5.28)$$

A derivada temporal seria dada por

$$\dot{V}_3 = -k_3s_3^2 - h_3^T\hat{\theta}_{g2}s_2s_3 \quad (5.29)$$

O primeiro termo,  $-k_3s_3^2$ , é definido negativo, como queremos. O segundo termo, será responsável por cancelar o termo que sobrou da parte da função de Lyapunov da segunda dinâmica.

**Etapa 5:** Dessa forma, se escolhermos a função de Lyapunov para o sistema em malha fechada como um todo

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (5.30)$$

teremos

$$\dot{V} \leq -k_1s_1^2 - k_2s_2^2 - k_3s_3^2 + \delta s_2 + \frac{1}{2}v \quad (5.31)$$

É possível mostrar que nossa lei de controle garante apenas que o erro de rastreamento compensado será uniformemente finalmente limitado. Além disso, note que, devido a  $\delta$  e  $v$  serem diferentes de zero, na região

$$-k_2s_2^2 + \delta s_2 + \frac{1}{2}v > 0 \quad (5.32)$$

não temos garantia de convergência dos parâmetros estimados do controlador, e devemos “desligar” as leis de adaptação apresentadas. Como não conhecemos exatamente o tamanho dessa região, fazemos uso de uma modificação de zona morta (que deve ser ajustada de forma que a região de não convergência dos parâmetros esteja incluída dentro dela). Além disso, utilizamos

uma projeção nas leis de adaptação de  $\hat{\theta}_{g2}$  e  $\hat{\theta}_{g3}$  para garantir que os parâmetros são sempre ligeiramente positivos e evitar problemas na implementação da lei de controle.

**Etapa 6:** Por fim, empregamos a zona morta para evitar a deriva dos parâmetros e uma projeção para garantir que os parâmetros se mantenham na região desejada. Dessa forma, as leis de adaptação com as modificações robustas passam a ser dadas por

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} \frac{\Gamma_{\gamma}}{2\nu} s_2^2 h_2^T h_2, & |s_2| \geq \bar{\delta} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\hat{\theta}_{f3} = \begin{cases} P(\Gamma_{g3} x_3 s_3), & |s_2| \geq \bar{\delta} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\hat{\theta}_{g3} = \begin{cases} P(\Gamma_{g3} s_3 u), & |s_2| \geq \bar{\delta} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.35)$$

em que  $P(\cdot)$  é um operador de projeção da lei de adaptação para garantir que os parâmetros de  $\hat{\theta}_{g2}$  e  $\hat{\theta}_{g3}$  se mantenham sempre positivos [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#). A modificação de projeção não modifica as propriedades de estabilidade do sistema, porém garante que o erro de adaptação será sempre limitado.

**Etapa 7:** De forma a implementarmos nosso controlador por aproximação adaptativa sistemas nebulosos serão utilizados para aproximar as funções desconhecidas. O sistema de lógica difusa  $W_i^T S_i(Z_i)$  é utilizado com o intuito de aproximar a função desconhecida  $\bar{f}_i$  tal que para qualquer dado  $\varepsilon_i > 0$ , têm-se:

$$\bar{f}_i = h_i^T \theta_i^* + \varepsilon_i \quad (5.36)$$

onde

$$\begin{aligned} h_1(x_1) &= w_1(x_1) \\ h_2(x_1, x_2) &= w_1(x_1) \otimes w_2(x_2) \\ h_3(x_1, x_2, x_3) &= w_1(x_1) \otimes w_2(x_2) \otimes w_3(x_3) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Portanto, três conjuntos fuzzy são definidos sobre o intervalo  $[-1, 1]$  para todas as variáveis de estado, escolhendo os pontos de particionamento como  $[-1, 0, 1]$ . As funções de pertinência fuzzy são escolhidas como funções gaussianas

$$\omega_{i,j}(x) = \exp \left[ \frac{-(x - \mu_{i,j})^T (x - \mu_{i,j})}{\eta_i^2} \right] \quad (5.38)$$

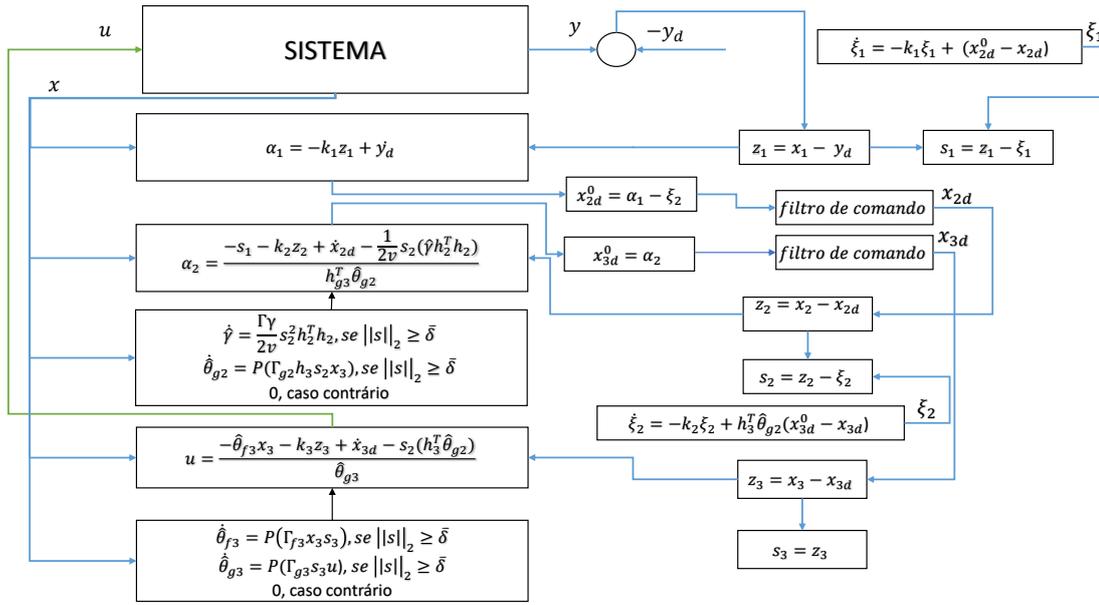


Figura 19 – Diagrama de blocos do sistema de controle.

onde  $\mu_{i,j}$  são os valores centrais e  $\eta_i$  é a largura da função gaussiana, com  $\eta_i = \sqrt{2}$ , temos que

$$\begin{bmatrix} \omega_{i,1}(x) = \exp[-0.5(x_i + 1)^2] \\ \omega_{i,2}(x) = \exp[-0.5(x_i)^2] \\ \omega_{i,3}(x) = \exp[-0.5(x_i - 1)^2] \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

onde  $\otimes$  é o produto de kronecker, com  $i = 1, 2, 3$  e  $w_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{\sum_{k=1}^3 \omega_{ik}}$ .

O procedimento do projeto do controlador pode ser visto no diagrama de blocos mostrado na Figura 5.1.

### 5.1.1 Estudo de Caso

Nesta seção, o sistema de rotor duplo é usado para testar o controlador apresentado. Definiu-se a referência desejada como  $y_d = \sin(0.05t)$ . Os parâmetros de controle são escolhidos como  $\bar{\delta} = 0.05$ ,  $\Gamma_{g2} = \Gamma_{f3} = \Gamma_{g3} = \Gamma_{\gamma} = 1$ ,  $v = 1$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 10$ ,  $a = 1$  e a simulação é executada sob as condições iniciais  $x(0) = [0.1; 0.1; 0]^T$ , mediante a integração das equações diferenciais usando método Runge-Kutta de 4ª ordem com passo fixo de 10ms. A Figura 20 mostra a saída do sistema e o sinal de referência, a Figura 22 enfatiza o transitório inicial do sistema em malha fechada e a Figura 21 mostra o sinal de erro entre a saída do sistema e o sinal de referência. As Figuras 23, 24, 25, 26, 27, 28 mostram que todos os sinais de malha fechada estão limitados. A partir da simulação vê-se que sob a ação da lei de controle proposta, a saída do sistema segue de perto o sinal de referência dado e os outros sinais de malha fechada permanecem limitados. É importante notar que uma abordagem ingênua seguindo a metodologia proposta por Farrell e Polycarpou (2006) estimaria um total de 78 parâmetros,

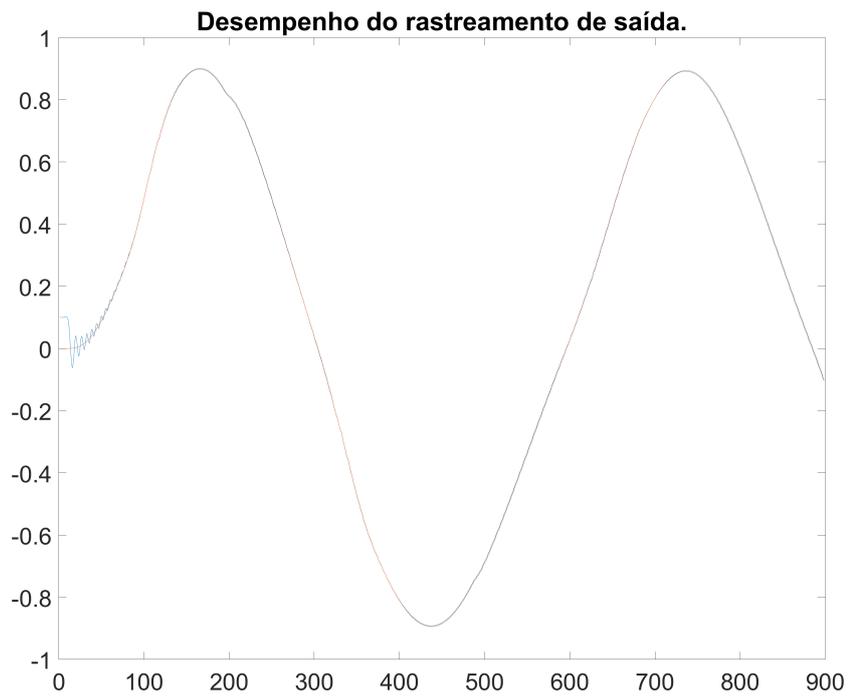


Figura 20 – Saída: Desempenho do rastreamento de saída.

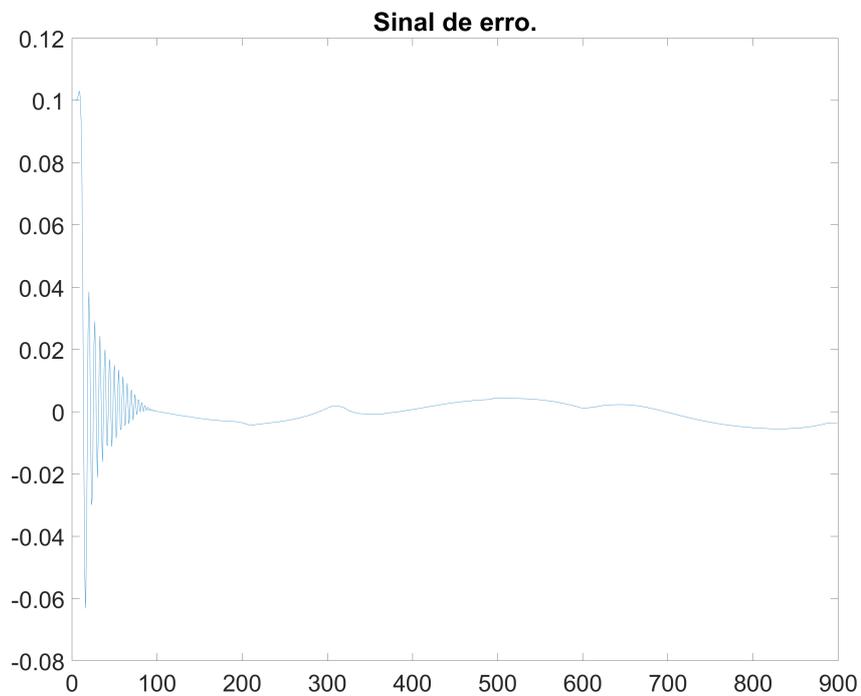


Figura 21 – Sinal de erro.

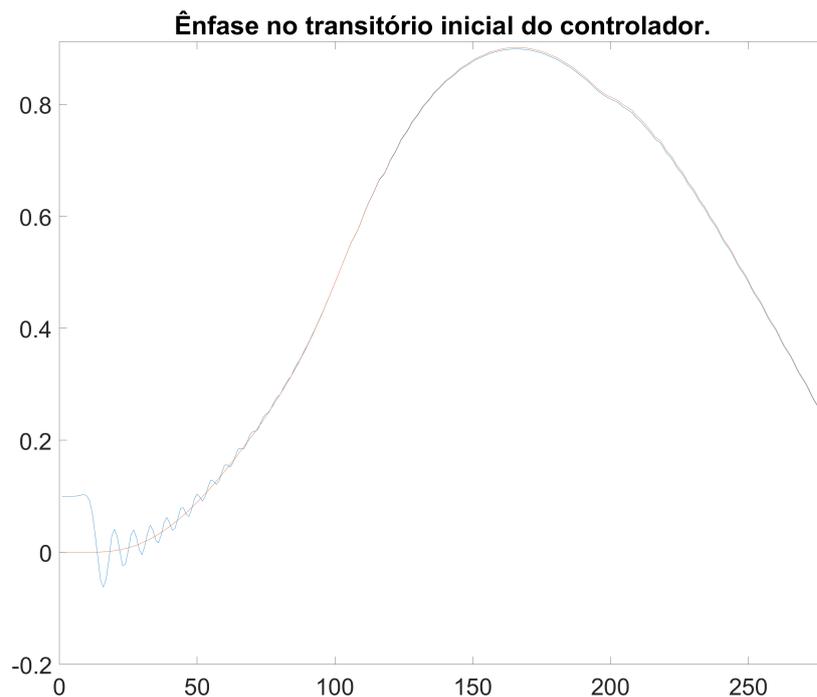


Figura 22 – Saída: Ênfase no transiente inicial do controlador.

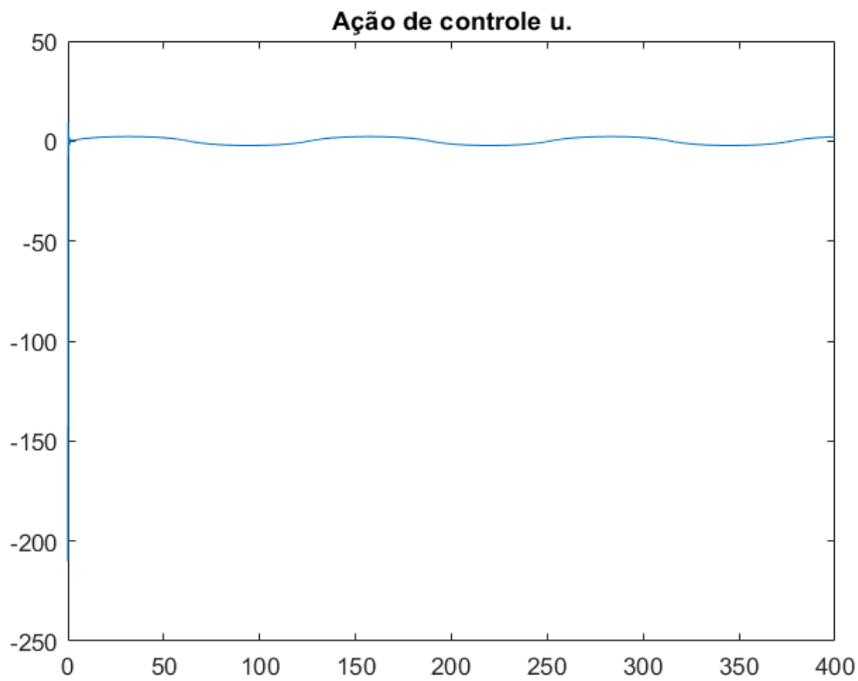
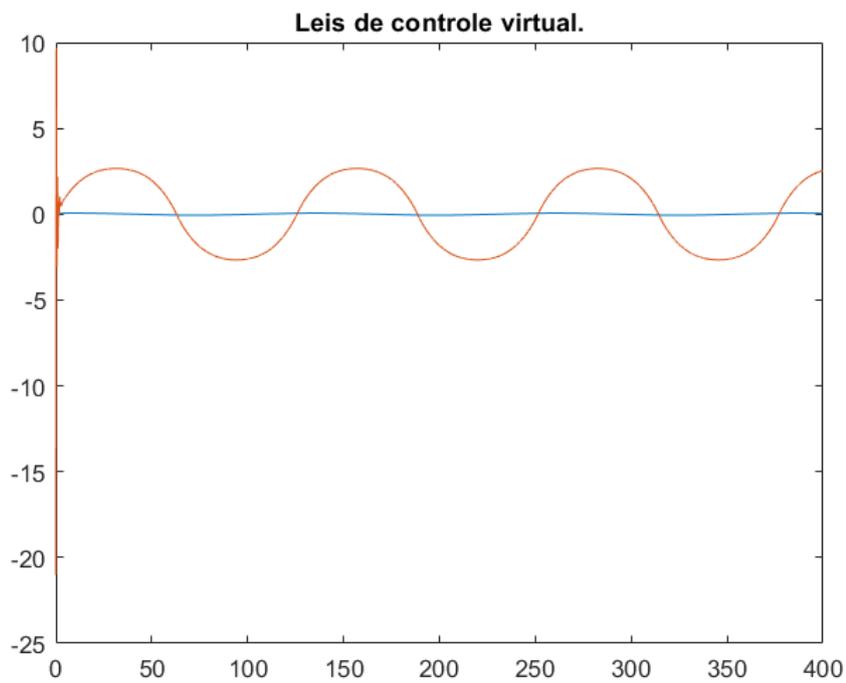
enquanto a abordagem proposta estima 6 parâmetros, considerando os conjuntos nebulosos selecionados para os aproximadores universais. Isso simplifica o procedimento de projeto e reduz consideravelmente o custo computacional.

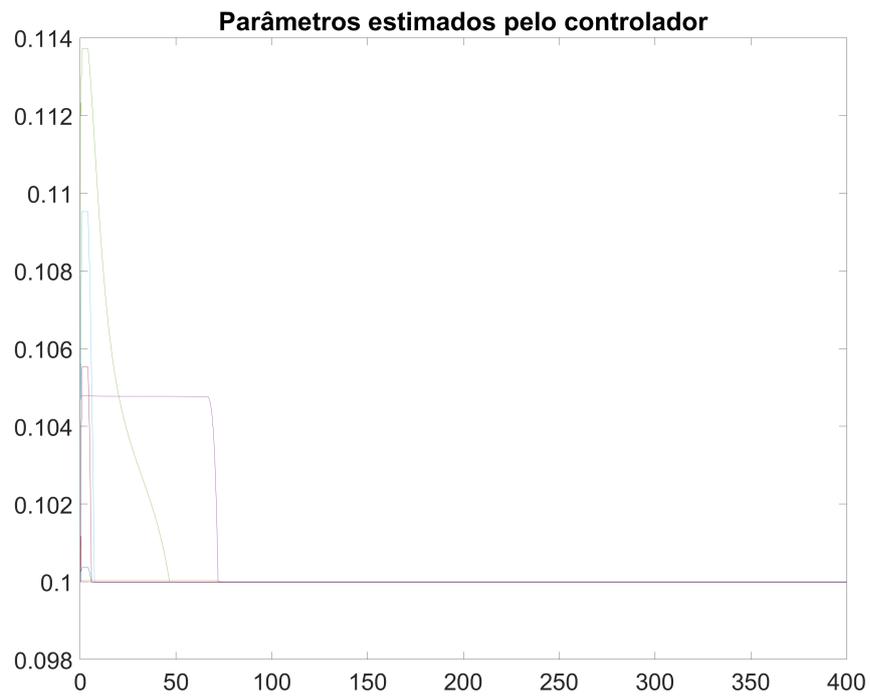
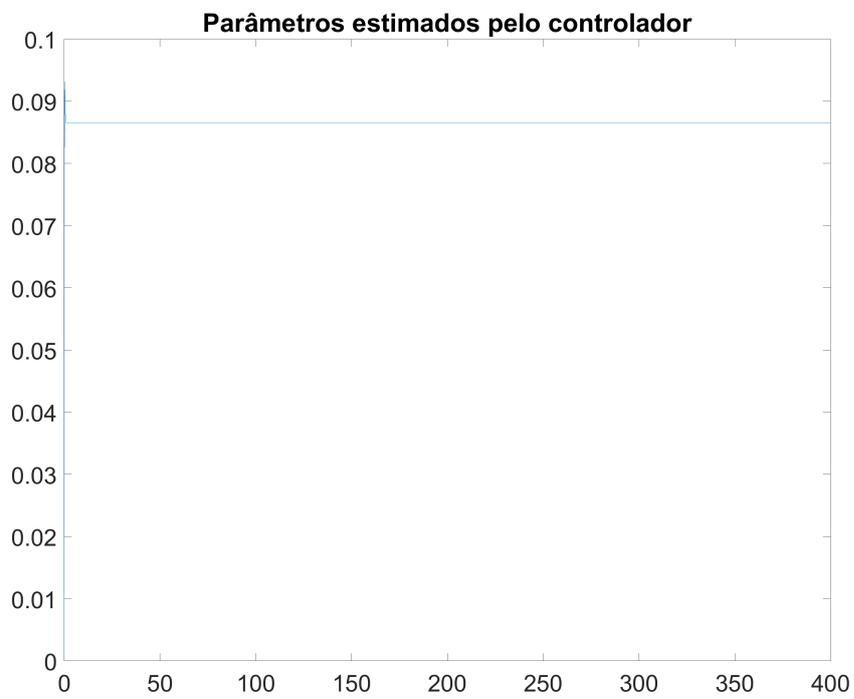
## 5.2 Conclusão

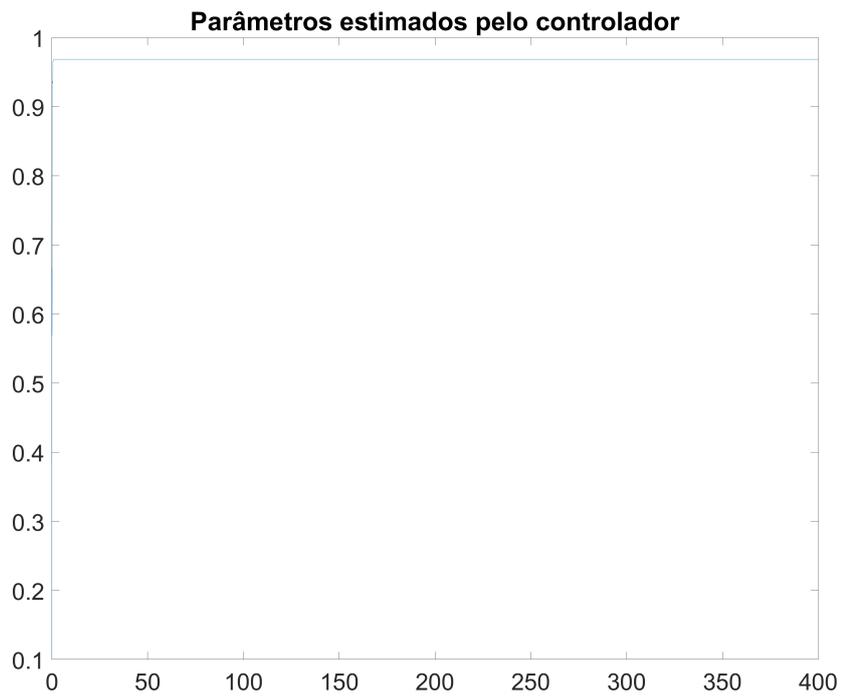
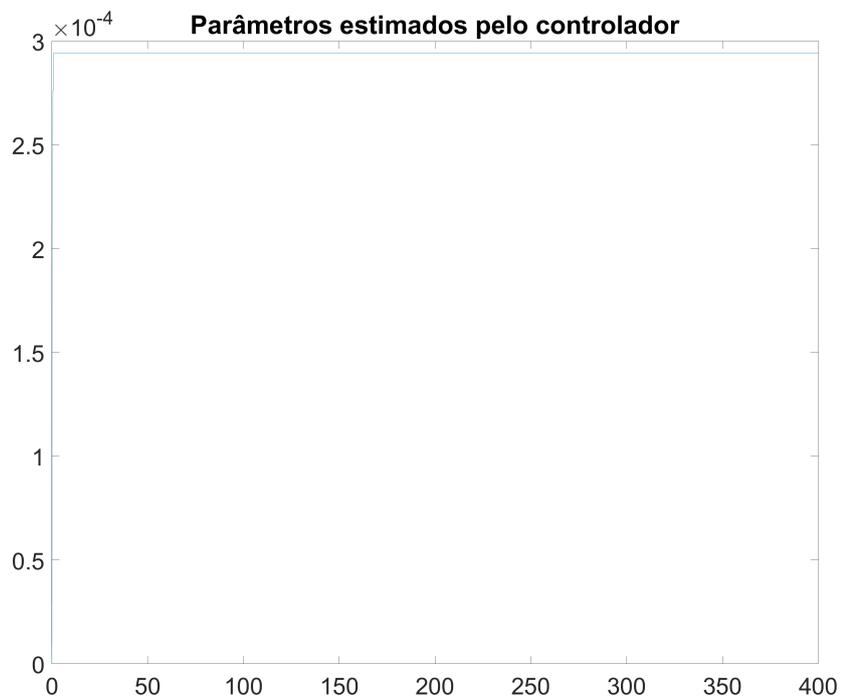
Um projeto de controle adaptativo é proposto usando técnicas de *backstepping* para o TRMS com incertezas. Os sinais ficaram limitados em malha fechada, o que é garantido pela lei de controle proposta em conjunto com as leis de atualização correspondentes. Finalmente, a simulação também mostra a eficácia desse esquema de controle adaptativo para o caso de controle de rastreamento de trajetória do TRMS.

A metodologia aqui descrita se destaca pela significativa redução no número de parâmetros a serem estimados, se comparada à estratégia de *backstepping* adaptativo com filtro de comando proposta em [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#), estimou um total de 6 parâmetros.

Uma possível perspectiva futura é investigar o uso do controlador proposto no eixo de guinada em conjunto com o eixo de arfagem, em uma abordagem multivariável. Além disso, como uma implementação real desta lei de controle seria realizada de forma digital, o projeto da lei de controle diretamente para um sistema em tempo discreto seria uma direção futura interessante.

Figura 23 – Ação de controle  $u$ .Figura 24 – Leis de controle virtual  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

Figura 25 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{g2}$ Figura 26 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{f3}$

Figura 27 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{g3}$ .Figura 28 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\gamma}$ .

## 6 *Backstepping* com Aproximação Adaptativa e usando Observador de Estados Nebuloso

Esse capítulo apresenta o projeto e análise do controle por *backstepping* utilizando a abordagem de aproximação adaptativa aplicado ao sistema de rotor duplo, considerando que o estado  $x_3$  não é medido. Para tanto sistemas de lógicas nebulosas são utilizados para aproximar as funções não lineares desconhecidas e o observador de estado nebuloso é construído para estimar o estado não medido (BORGES et al., 2008; CHONG et al., 2015; XIE; YANG; ZHU, 2014).

### 6.1 Descrições e Suposições do Sistema

Consideramos os sistemas não lineares de *feedback* não estrito da seguinte forma, conforme em (LI; LI; TONG, 2018)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_3)x_3, \\ \dot{x}_3 = \theta_{f_3}x_3 + \theta_{g_3}u \end{cases} \quad (6.1)$$

Manipulando o sistema para que fique da forma usada no artigo base para  $\dot{x}_3$ , temos que como o estado  $x_3$  não é medido considera-se um estado transformado  $\bar{x}_3$ , cuja dinâmica pode ser escrita como  $\dot{\bar{x}}_3 = f_3(\bar{x}_3) + u$ ,  $\theta_{g_3} = 1$  e temos também que  $f_3 = \theta_{f_3}(x_3)$ . Por conveniência, considera-se  $x_3$  no lugar de  $\bar{x}_3$  no desenvolvimento do restante do capítulo. Com isso, o sistema do terceiro estado é reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + u \end{cases} \quad (6.2)$$

Manipulando o sistema para que fique da forma usada no artigo base para  $\dot{x}_2$ , temos:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_3)x_3 + x_3 - x_3 \\ \dot{x}_2 = [f_2(x_1, x_2) + x_3(-1 + g_2(x_3))] + x_3 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) + x_3 \end{cases} \quad (6.3)$$

Portanto, o sistema não linear de *feedback* considerado no projeto, tem a seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) + x_3, \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + u \end{cases} \quad (6.4)$$

## 6.2 Projeto do Observador de Estados *Fuzzy*

A única variável disponível no sistema considerado é a saída  $y = x_1$ . Assim, o observador de estados precisa ser construído para estimar os estados incomensuráveis (LI; LI; TONG, 2018). Segundo Li, Li e Tong (2018), podemos supor que as funções suaves  $f_2$  e  $f_3$  podem ser estimadas pelo seguinte sistema de lógica *fuzzy*

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(x_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) &= \hat{\theta}_2^T \varphi_{f_2} \\ \hat{f}_3(\hat{x}_3) &= \hat{\theta}_3^T \varphi_{f_3}\end{aligned}\quad (6.5)$$

onde  $\hat{x}_2$  e  $\hat{x}_3$  são as estimações para os estados  $x_2$  e  $x_3$ .

O vetor de parâmetros ótimos  $\theta^*$  pode ser definido da seguinte forma (LI; LI; TONG, 2018)

$$\theta_i^* = \arg_{\theta_i \in \Omega_i} \min \left[ \sup_{(x, \hat{x}) \in U} |f_i(x) - \hat{f}_i(\hat{x} | \hat{\theta})| \right] \quad (6.6)$$

onde  $\Omega$  e  $U$  são regiões compactas para  $\hat{\theta}$  e  $\hat{x}$  respectivamente.

Definimos então, de acordo com Li, Li e Tong (2018), o erro mínimo de aproximação  $\varepsilon_i$  como

$$\varepsilon_i = f_i(x) - \hat{f}_i(\hat{x} | \theta^*) \quad (6.7)$$

onde  $\varepsilon_i$  satisfaz as condições  $|\varepsilon_i| \leq \delta_i$ , com  $\delta_i$  uma constante positiva.

Reescrevemos o sistema inicial (6.1), de acordo com Li, Li e Tong (2018), da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Ky + \sum_{j=1}^m B_j f_j(x) + Bu \\ y = \bar{C}x \end{cases} \quad (6.8)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}; \bar{C} = [1 \ 0 \ 0]; B_2 = [0 \ 1 \ 0]^T; \quad (6.9)$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Portanto, temos que

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Ky + B_2 f_2(x_1, x_2, x_3) + B_3 f_3(x_1, x_2, x_3) + B_u u \\ y = \bar{C}x \end{cases} \quad (6.10)$$

O vetor  $K$  é escolhido de modo que  $A$  seja uma matriz Hurwitz estrita, portanto, para qualquer matriz  $Q = Q^T > 0$ , existe uma matriz definida positiva  $P = P^T > 0$  que satisfaz

$$A^T P + PA = -Q \quad (6.11)$$

A fim de estimar os estados não medidos do sistema, projetamos o seguinte observador de estados como

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Ky + B_2\hat{f}_2 + B_3\hat{f}_3 + B_u u \\ \hat{y} = \bar{C}(\hat{x}) \end{cases} \quad (6.12)$$

Definimos o vetor de erro de observação virtual como  $e = x - \hat{x}$ , então temos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Ky + B_{2f_2}(x_1, x_2, x_3) + B_{3f_3}(x_1, x_2, x_3) + B_u u \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} - Ky + B_{2\hat{f}_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + B_{3\hat{f}_3}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) + B_u u \\ \dot{e} &= Ae + B_2\tilde{\theta}_{f_2}^T \varphi_{f_2}(\hat{x}) + B_{2f_2}\delta_2 + B_3\tilde{\theta}_{f_3}^T \varphi_{f_3}(\hat{x}) + B_3\delta_3 \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde  $\tilde{\theta}_f = \theta_{f_i}^* - \hat{\theta}_{f_i}$  é o vetor de erro de parâmetro adaptativo,  $\delta_2$  e  $\delta_3$  são os erros de aproximação de  $f_2$  e  $f_3$ .

Considere a função candidata de Lyapunov como

$$v = e^T P e \quad (6.14)$$

Temos a derivada no tempo de (6.14)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ \dot{v} &= -e^T Q e + 2e^T P (B_2\tilde{\theta}_{f_2}^T \varphi_2(\hat{x}) + B_2\delta_2 + B_3\tilde{\theta}_{f_3}^T \varphi_3(\hat{x}) + B_3\delta_3) \leq \\ & 2e^T P (B_2\tilde{\theta}_{f_2}^T \varphi_2(\hat{x}) + B_2\delta_2 + B_3\tilde{\theta}_{f_3}^T \varphi_3(\hat{x}) + B_3\delta_3) - \lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Usando a desigualdade de Young's, temos

$$2e^T P (B_2\tilde{\theta}_{f_2}^T \varphi_2 + B_3\tilde{\theta}_{f_3}^T \varphi_3) \leq 2m\|e\|^2 + 2\frac{\|P\|^2}{m} (B_2\tilde{\theta}_{f_2}^T \varphi_2 \varphi_2^T \tilde{\theta}_{f_2} B_2^T + B_3\tilde{\theta}_{f_3}^T \varphi_3 \varphi_3^T \tilde{\theta}_{f_3} B_3^T) \quad (6.16)$$

onde  $\|P\|$  é a norma de  $P$ . Como  $\varphi_2^T \varphi_2 \leq 1$ ,  $\varphi_3^T \varphi_3 \leq 1$  por serem funções de pertinência,  $B_2^T B_2 = 1$  e  $B_3^T B_3 = 1$ , temos que

$$\begin{aligned} 2e^T P (B_2\tilde{\theta}_{f_2}^T \varphi_2 + B_3\tilde{\theta}_{f_3}^T \varphi_3) &\leq 2m\|e\|^2 + 2\frac{\|P\|^2}{m} (\tilde{\theta}_{f_2}^T \tilde{\theta}_{f_2} + \tilde{\theta}_{f_3}^T \tilde{\theta}_{f_3}) \\ 2e^T P \delta^* &\leq \|e\|^2 + \|P\|^2 \|\delta\|^{*2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Considerando  $\delta^* = B_2\delta_2 + B_3\delta_3$ , e usando a desigualdade de Young, temos

$$\dot{V} \leq -\lambda \|e\|^2 + \frac{2\|P\|^2}{m} (\tilde{\theta}_2^T \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_3^T \tilde{\theta}_3) + M \quad (6.18)$$

onde  $\lambda = \lambda_{\min} Q - 2m - 1$  e  $M = \|P\|^2 \|\delta^*\|$ . Observando a equação (6.18), temos que o observador de estado fuzzy projetado não pode garantir a convergência dos erros do observador (LI; LI; TONG, 2018). Estes termos que sobraram relativos aos erros de aproximação devem ser compensados pelo controle adaptativo e pela lei de adaptação, de modo que o sistema em malha fechada como um todo possa funcionar.

### 6.3 Análise de Estabilidade e Projeto Adaptativo

Nesta seção, uma estratégia de controle de *feedback* de saída adaptativa nebulosa baseada no observador será apresentada usando a técnica adaptativa, adaptando a metodologia proposta por Li, Li e Tong (2018). As etapas do projeto são descritas a seguir.

**Etapa 1:** Definimos as variáveis de erro de rastreamento como

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - y_d \\ z_2 = x_2 - x_{2d} \\ z_3 = x_3 - x_{3d} \end{cases} \quad (6.19)$$

Os erros de rastreamento compensados são definidos como

$$\begin{cases} s_1 = z_1 - \xi_1 \\ s_2 = z_2 - \xi_2 \\ s_3 = z_3 \end{cases} \quad (6.20)$$

A dinâmica do erro de trajetória compensado é dado por

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{z}_1 - \dot{\xi}_1 \\ \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_d - \dot{\xi}_1 \end{aligned} \quad (6.21)$$

como  $\dot{x}_1 = x_2$  e definindo  $\dot{\xi}_1 = -l_1 \xi_1 + (x_{2d} - x_{2d}^0)$ , temos que

$$\dot{s}_1 = x_2 - \dot{y}_d - l_1 \xi_1 - (x_{2d} - x_{2d}^0) + e_2 \quad (6.22)$$

onde  $x_{2d}^0 = \alpha_1 - \xi_2$ . Portanto, temos que

$$\dot{s}_1 = \hat{x}_2 - x_{2d} - \xi_2 + e_2 - \dot{y}_d + l_1 \xi_1 + \alpha_1 - l_1 \xi_1 \quad (6.23)$$

Definimos a lei de controle virtual para o primeiro subsistema,  $\alpha_1$ , como

$$\alpha_1 = -l_1 z_1 + \dot{y}_d \quad (6.24)$$

substituindo na dinâmica do erro da trajetória compensado do primeiro estado, equação (6.23), temos que

$$\dot{s}_1 = s_2 - l_1 s_1 + e_2 \quad (6.25)$$

Consideramos a função de Lyapunov, dada por

$$V_1 = \frac{1}{2} s_1^2 \quad (6.26)$$

e a derivada temporal da função de Lyapunov

$$\dot{V}_1 = -l_1 s_1^2 + s_1 s_2 + s_1 e_2 \quad (6.27)$$

Pela desigualdade de Young, temos

$$2s_1e_2 \leq \gamma_1 s_1^2 + \frac{1}{\gamma_1} e_2^2 \quad (6.28)$$

Portanto, substituindo na Equação (4.15), temos

$$\dot{V}_1 \leq -(l_1 - \frac{\gamma_1}{2})s_1^2 + \frac{1}{2\gamma_1}e_2^2 + s_1s_2 \quad (6.29)$$

**Etapa 2:** Para a segunda dinâmica temos a variável de erro de rastreamento  $z_2$  definida na Equação (6.19). A dinâmica do erro de trajetória compensado é dado por

$$\begin{cases} \dot{s}_2 = \dot{z}_2 - \dot{\xi}_2 \\ \dot{s}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} - \dot{\xi}_2 \\ \dot{s}_2 = x_3 + \theta_{f_2}^T \varphi_{f_2} \hat{x} + \delta_2 - \dot{x}_{2d} + l_2 \xi_2 - (x_{3d} - x_{3d}^0) \end{cases} \quad (6.30)$$

pois  $\dot{\xi}_2 = -l_2 \xi_2 + (x_{3d} - x_{3d}^0)$ .

O valor desejado para  $x_3$  é dado por  $x_{3d}^0 = \alpha_2$  e definimos a lei de controle virtual para o segundo subsistema,  $\alpha_2$ , como

$$\alpha_2 = -l_2(\hat{x}_2 - x_{2d}) - \hat{\theta}_{f_2}^T \varphi_{f_2}(\hat{x}) - s_1 + \dot{x}_{2d} \quad (6.31)$$

fazendo as substituições pertinentes, como  $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$ , temos que

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= x_3 - x_{3d} + \theta_{f_2}^T \varphi_{f_2}(\hat{x}) + \delta_2 - \dot{x}_{2d} + l_2 \xi_2 + \alpha_2 \\ \dot{s}_2 &= s_3 + \tilde{\theta}_{f_2}^T \varphi_{f_2}(\hat{x}) + \delta_2 - l_2(x_2 - x_{2d} - \xi_2) - l_2(\hat{x}_2 - x_2) - s_1 \\ \dot{s}_2 &= -l_2 s_2 + s_3 - s_1 + \tilde{\theta}_{f_2}^T \varphi_{f_2}(\hat{x}) + l_2 e_2 + \delta_2 \end{aligned} \quad (6.32)$$

Considere a candidata a função de Lyapunov

$$V_2 = \frac{1}{2}s_2^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{f_2}^T \Gamma_{f_2}^{-1} \tilde{\theta}_{f_2} \quad (6.33)$$

Têm-se a derivada no tempo de  $V_2$  como

$$\dot{V}_2 = l_2 s_2^2 + s_2 s_3 - s_1 s_2 + \tilde{\theta}_{f_2}^T \varphi_{f_2}(\hat{x}) s_2 + l_2 e_2 s_2 + s_2 \delta_2 - \tilde{\theta}_{f_2}^T \Gamma_{f_2}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{f_2} \quad (6.34)$$

Pela desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} -l_2 e_2 s_2 &\leq \frac{1}{2}\gamma_2 s_2^2 + \frac{1}{2\gamma_2} l_2^2 e_2^2 \\ l_2 &> \frac{1}{2}\gamma_2 \\ s_2 \delta_2 &\leq \frac{1}{2}\gamma_3 s_2^2 + \frac{1}{2\gamma_3} \delta_2^2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Escolhendo a lei de adaptação como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_{f_2} &= \Gamma_{f_2} \varphi_{f_2}(\hat{x}_2 - x_{2d} - \xi_2) - \sigma_{f_2} \Gamma_{f_2} (\hat{\theta}_{f_2} - \bar{\theta}_{f_2}) \\ \dot{\hat{\theta}}_{f_2} &= \Gamma_{f_2} \varphi_{f_2}(\hat{x}_2 - x_{2d} - \xi_2 + x_2 - x_2) - \sigma_{f_2} \Gamma_{f_2} (\hat{\theta}_{f_2} - \bar{\theta}_{f_2}) \\ \dot{\hat{\theta}}_{f_2} &= \Gamma_{f_2} \varphi_{f_2} s_2 - \Gamma_{f_2} \varphi_{f_2} e_2 + \sigma_{f_2} \Gamma_{f_2} \tilde{\theta}_{f_2} - \sigma_{f_2} \Gamma_{f_2} (\theta_{f_2} - \bar{\theta}_{f_2}) \end{aligned} \quad (6.36)$$

Substituindo as leis de adaptação (6.36) na Equação (6.34), como  $\phi_2 = \theta_{f2} - \bar{\theta}_{f2}$ , temos a derivada no tempo da função de Lyapunov como

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -(l_2 - \frac{\gamma_2}{2} - \frac{\gamma_3}{2})s_2^2 - (\frac{\sigma_{f2}}{2} - \frac{\gamma_4}{2})\tilde{\theta}_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2} + \frac{1}{2\gamma_3}\delta_2^2 + \frac{\sigma_{f2}}{2}\phi_2^T \phi_2 + (\frac{l_2^2}{2\gamma_2} + \frac{1}{2\gamma_4})e_2^2 + s_2s_3 \\ & -s_1s_2 \end{aligned} \quad (6.37)$$

Pois pela desigualdade de Young, temos que

$$-\tilde{\theta}_{f2}^T \phi_{f2}(\hat{x}_2)e_2 \leq \frac{1}{2}\gamma_4\tilde{\theta}_{f2}^T \phi_{f2}(\hat{x})\phi_{f2}^T(\hat{x})\tilde{\theta}_{f2} + \frac{1}{2\gamma_4}e_2^2 \quad (6.38)$$

**Etapa 3:** Para a terceira dinâmica temos a variável de erro de rastreamento  $z_3$  definida na Equação (6.19). A dinâmica do erro de trajetória compensado é dado por

$$\begin{aligned} \dot{s}_3 &= \dot{z}_3 \\ \dot{s}_3 &= \dot{x}_3 - \dot{x}_{3d} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Temos que  $\dot{x}_3$  é dado por

$$\dot{x}_3 = \delta_3 + \theta_{f3}^T \phi_{f3} + u \quad (6.40)$$

A ação de controle, é dada por

$$\begin{aligned} u &= -l_3(-x_{3d} + \hat{x}_3) - \hat{\theta}_{f3}^T \phi_{f3} - (\hat{x}_2 - x_{2d} - \xi_2) + \dot{x}_{3d} \\ u &= -l_3(x_3 - x_{3d} + \hat{x}_3 - x_3) - \hat{\theta}_{f3}^T \phi_{f3} - s_2 + e_2 + \dot{x}_{3d} \end{aligned} \quad (6.41)$$

substituindo a ação de controle,  $u$  (6.41), na Equação (6.40) temos

$$\dot{s}_3 = \theta_{f3}^T \phi_{f3} - l_3(x_3 - x_{3d}) + l_3(x_3 - \hat{x}_3) - \hat{\theta}_{f3}^T \phi_{f3} - s_2 + e_2 + \dot{x}_{3d} - \dot{x}_{3d} + \delta_3 \quad (6.42)$$

como,  $\tilde{\theta}_{f3}^T = \theta_{f3}^T - \hat{\theta}_{f3}^T$ , temos então que

$$\begin{aligned} \dot{s}_3 &= e_2 - l_3s_3 + l_3e_3 + \tilde{\theta}_{f3}^T \phi_{f3} - s_2 + \delta_3 \\ V_3 &= \frac{1}{2}s_3^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{f3}^T \phi_{f3}^{-1} \tilde{\theta}_{f3} \\ \dot{V}_3 &= -l_3s_3^2 - s_3s_2 + l_3e_3s_3 + \tilde{\theta}_{f3}^T \phi_{f3}s_3 - \tilde{\theta}_{f3}^T \Gamma_3^{-1} \hat{\theta}_{f3} + s_3e_2 \end{aligned} \quad (6.43)$$

Escolhendo a lei de adaptação como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_{f3} &= \Gamma_{f3} \phi_{f3}(\hat{x}_3 - x_{3d}) - \sigma_3 \Gamma_{f3}(\hat{\theta}_{f3} - \bar{\theta}_{f3}) \\ \dot{\hat{\theta}}_{f3} &= \Gamma_{f3} \phi_{f3}(\hat{x}_3 - x_{3d} + x_3 - x_3) - \sigma_3 \Gamma_{f3}(\hat{\theta}_{f3} - \bar{\theta}_{f3}) \\ \dot{\hat{\theta}}_{f3} &= \Gamma_{f3} \phi_{f3}s_3 - \Gamma_{f3} \phi_{f3}e_3 + \sigma_3 \Gamma_{f3} \tilde{\theta}_{f3} - \sigma_3 \Gamma_{f3}(\theta_{f3} - \bar{\theta}_{f3}) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Considerando que  $\theta_{f3} - \bar{\theta}_{f3} = \phi_{f3}$ , portanto

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -l_3s_3^2 + l_3e_3s_3 + \tilde{\theta}_{f3}^T \phi_{f3}s_3 + \delta_3s_3 - \tilde{\theta}_{f3}^T \phi_{f3}s_3 \\ &+ \tilde{\theta}_{f3}^T \phi_{f3}e_3 - \sigma_3 \tilde{\theta}_{f3}^T \tilde{\theta}_{f3} + \sigma_3 \tilde{\theta}_{f3}^T \phi_{f3} - s_3e_2 - s_2s_3 \end{aligned} \quad (6.45)$$

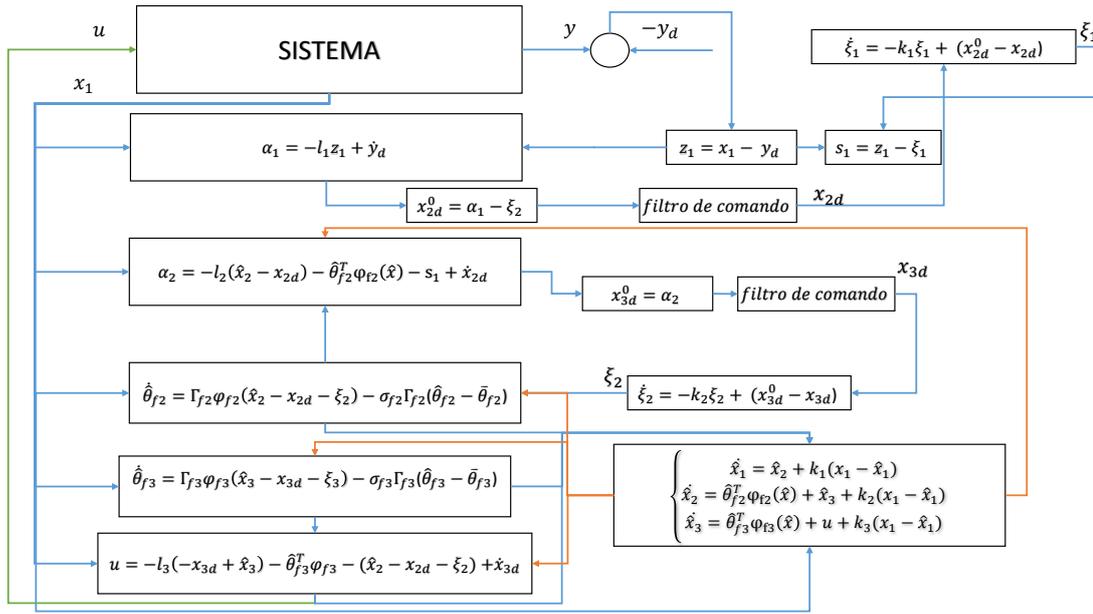


Figura 29 – Diagrama de blocos do sistema de controle.

Temos as seguintes desigualdades de Young

$$\begin{aligned}
 l_3 s_3 e_3 &\leq \frac{1}{2} \gamma_5 s_3^2 + \frac{1}{2\gamma_5} l_3^2 e_3^2 \\
 s_3 e_2 &\leq \frac{1}{2} \gamma_6 s_3^2 + \frac{1}{2\gamma_6} e_2^2 \\
 \delta_3 s_3 &\leq \frac{1}{2} \gamma_8 s_3^2 + \frac{1}{2\gamma_8} \delta_3^2 \leq \frac{1}{2} \gamma_8 \tilde{\theta}_{f3}^T \phi_3 \phi_3^T \tilde{\theta}_{f3} + \frac{1}{2\gamma_8} e_3^2 \\
 \sigma_3 \tilde{\theta}_{f3}^T \phi_3 &\leq \frac{\sigma_3}{2} \tilde{\phi}_3^T \tilde{\phi}_3 + \frac{\sigma_3}{2} \phi_3^T \phi_3
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

**Etapa 4:** As derivadas das funções de Lyapunov para  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  são

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &\leq -(l_1 - \frac{\gamma_1}{2}) s_1^2 + \frac{1}{2\gamma_1} e_2^2 + s_1 s_2 \\
 \dot{V}_2 &\leq -(l_2 - \frac{\gamma_2}{2} - \frac{\gamma_3}{2}) s_2^2 - (\frac{\sigma_{f2}}{2} - \frac{\gamma_4}{2}) \tilde{\theta}_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2} + \frac{1}{2\gamma_3} \delta_2^2 + \frac{\sigma_2}{2} \phi_2^T \phi_2 + (\frac{l_2^2}{2\gamma_2} + \frac{1}{2\gamma_4}) e_2^2 - s_1 s_2 + s_2 s_3 \\
 \dot{V}_3 &\leq -(l_3 - \frac{\gamma_5}{2} - \frac{\gamma_6}{2} - \frac{\gamma_7}{2}) s_3^2 - (\frac{\sigma_3}{2} - \frac{\gamma_8}{2}) \tilde{\theta}_{f3}^T \tilde{\theta}_{f3} + \frac{1}{2\gamma_7} \delta_3^2 + \frac{\sigma_3}{2} \phi_3^T \phi_3 + \frac{1}{2\gamma_6} e_2^2 + (\frac{l_3^2}{2\gamma_5} + \frac{1}{2\gamma_8}) e_3^2 - s_2 s_3
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Portanto somando  $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3$ , temos

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 &\leq -(l_1 - \frac{\gamma_1}{2}) s_1^2 - (l_2 - \frac{\gamma_2}{2} - \frac{\gamma_3}{2}) s_2^2 \\
 &- (l_3 - \frac{\gamma_5}{2} - \frac{\gamma_6}{2} - \frac{\gamma_7}{2}) s_3^2 - (\frac{\sigma_8}{2} - \frac{\gamma_4}{2}) \tilde{\theta}_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2} - (\frac{\sigma_3}{2} - \frac{\gamma_8}{2}) \tilde{\theta}_{f3}^T \tilde{\theta}_{f3} \\
 &+ (\frac{1}{2\gamma_1} + \frac{l_2^2}{2\gamma_2} + \frac{1}{2\gamma_4} + \frac{1}{2\gamma_6}) e_2^2 + (\frac{l_3^2}{2\gamma_5} + \frac{1}{2\gamma_8}) e_3^2 + N
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

com  $N = \frac{\delta_2^2}{2\gamma_4} + \frac{\sigma_2 \phi_2^T \phi_2}{2} + \frac{\delta_3^2}{2\gamma_6} + \frac{\sigma_3 \phi_3^T \phi_3}{2}$ . Como  $\|e\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ .

O procedimento do projeto do controlador pode ser visto no diagrama de blocos mostrado na Figura 6.3.

### 6.3.1 Análise Completa

Podemos analisar os termos da equação (6.18) e da equação (6.48) e mostrar que todos os sinais de malha fechada são limitados.

Considere o erro do observador como

$$\dot{V} \leq -\lambda \|e\|^2 + \frac{2\|P\|^2}{m} + (\tilde{\theta}_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2} + \tilde{\theta}_{f3}^T \tilde{\theta}_{f3}) + M \quad (6.49)$$

onde o controlador adaptativo é dado por

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \leq & -(l_1 - \frac{\gamma_1}{2})s_1^2 - (l_2 - \frac{\gamma_2}{2} - \frac{\gamma_3}{2})s_2^2 - (l_3 - \frac{\gamma_5}{2} - \frac{\gamma_6}{2} - \frac{\gamma_7}{2})s_3^2 \\ & - (\frac{\sigma_2 - \gamma_4}{2})\tilde{\theta}_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2} - (\frac{\sigma_3 - \gamma_8}{2})\tilde{\theta}_{f3}^T \tilde{\theta}_{f3} + (\frac{1}{2\gamma_1} + \frac{l_2^2}{2\gamma_2} + \frac{1}{2\gamma_4} + \frac{1}{2\gamma_6})e_2^2 + (\frac{l_3^2}{2\gamma_4} + \frac{1}{2\gamma_7})e_3^2 + N \end{aligned} \quad (6.50)$$

considerando  $\bar{V} = V + V_1 + V_2 + V_3$  e  $\|e\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ , temos que

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} \leq & -(l_1 - \frac{\gamma_1}{2})s_1^2 - (l_2 - \frac{\gamma_2}{2} - \frac{\gamma_3}{2})s_2^2 - (l_3 - \frac{\gamma_5}{2} - \frac{\gamma_6}{2} - \frac{\gamma_7}{2})s_3^2 \\ & - (\frac{\sigma_2 - \gamma_4}{2})\tilde{\theta}_{f2}^T \tilde{\theta}_{f2} - (\frac{\sigma_3 - \gamma_8}{2})\tilde{\theta}_{f3}^T \tilde{\theta}_{f3} - \lambda e_1^2 \\ & - (\lambda - \frac{1}{2\gamma_1} - \frac{l_2^2}{2\gamma_2} - \frac{1}{2\gamma_4} - \frac{1}{2\gamma_6})e_2^2 - (\lambda - \frac{l_3^2}{2\gamma_4} - \frac{1}{2\gamma_7})e_3^2 + N + m \end{aligned} \quad (6.51)$$

As condições de projeto para garantir que os sinais fiquem limitados em malha fechada são

$$\begin{aligned} l_1 > \frac{\gamma_1}{2} > 0; l_2 > \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{2} > 0; l_3 > \frac{\gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7}{2} > 0 \\ \sigma_2 > \frac{\gamma_4}{2} + \frac{2\|P\|^2}{m} > 0; \sigma_3 > \frac{\gamma_8}{2} + \frac{2\|P\|^2}{m} > 0 \\ \lambda > 0; \lambda > \frac{1}{2\gamma_1} + \frac{l_2^2}{2\gamma_2} + \frac{1}{2\gamma_4} + \frac{1}{2\gamma_6}; \lambda > \frac{l_3^2}{2\gamma_4} + \frac{1}{2\gamma_7} \end{aligned} \quad (6.52)$$

Se todas as desigualdades são satisfeitas, existe um  $\beta > 0$  tal que

$$\dot{\bar{V}} \leq -\beta(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + e^T P e + \tilde{\theta}_{f2}^T \Gamma_{f2}^{-1} \tilde{\theta}_{f2} + \tilde{\theta}_{f3}^T \Gamma_{f3}^{-1} \tilde{\theta}_{f3}) + \bar{N} \quad (6.53)$$

de modo que  $\dot{\bar{V}} \leq -\beta \bar{V} + \bar{N}$ . Pela desigualdade de Gronwall-Bellman

$$\bar{V}(t) \leq e^{-\beta t} \bar{V}(0) + (1 - e^{-\beta t}) \frac{\bar{N}}{\beta} \quad (6.54)$$

De modo que a função de Lyapunov converge para a região  $\bar{V}(e, s, \tilde{\theta}) \leq \frac{\bar{N}}{\beta}$  e os sinais de malha fechada são finalmente uniformemente limitados.

## 6.4 Estudo de Caso

Nesta seção, o TRMS é usado para testar o controlador apresentado. Definiu-se a referência desejada como  $y_d = \text{sen}(0.05t)$ . Os parâmetros de controle são escolhidos como  $\Gamma_{f2} = \Gamma_{f3} = 4.5$ ,  $l_1 = l_2 = l_3 = 3$ ,  $k_1 = 33$ ,  $k_2 = 362$ ,  $k_3 = 1320$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.05$  e a simulação é executada sob as condições iniciais  $x(0) = [0.1; 0.1; 0.1]^T$ , mediante a integração das equações diferenciais usando método Runge-Kutta de 4ª ordem com passo fixo de 10ms. A Figura 30 mostra a saída do sistema e o sinal de referência, a Figura 32 enfatiza o transitório inicial do

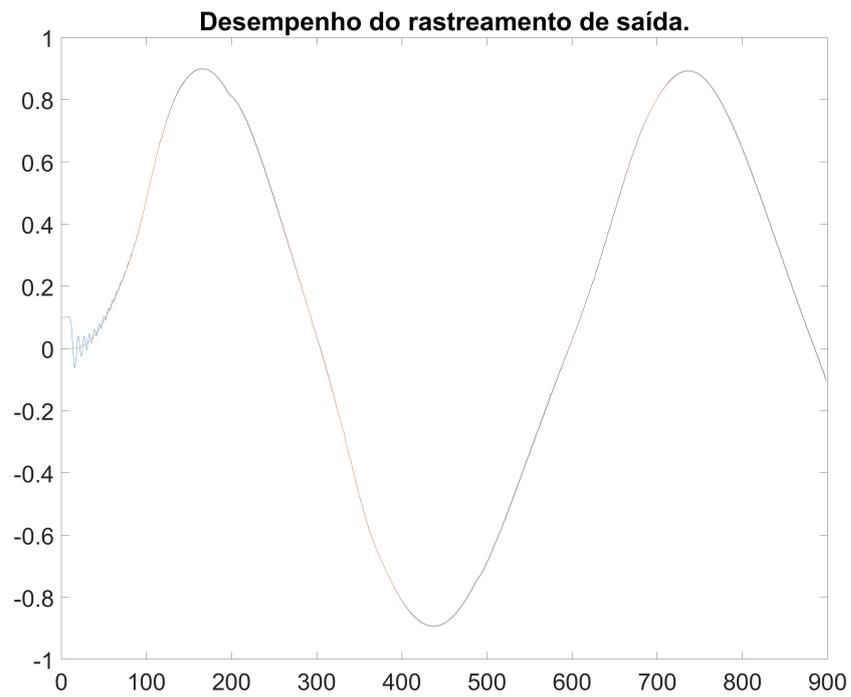


Figura 30 – Saída: Desempenho do rastreamento de saída.

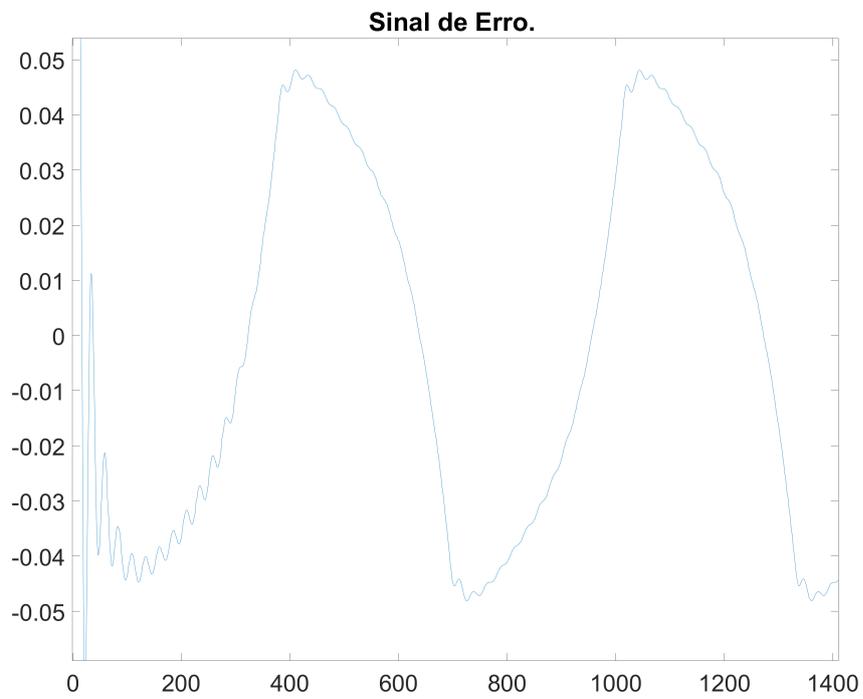


Figura 31 – Sinal de erro.

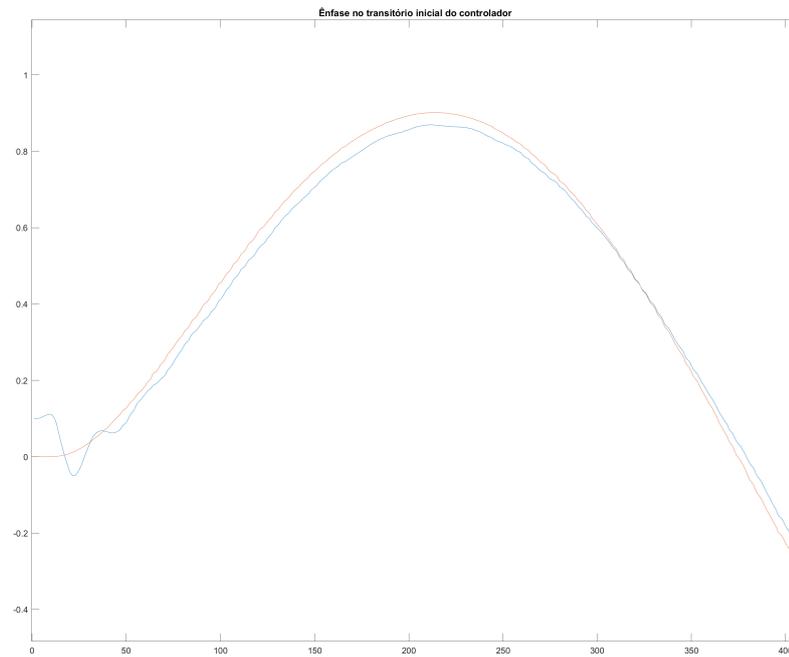


Figura 32 – Saída: Ênfase no transitório inicial do controlador.

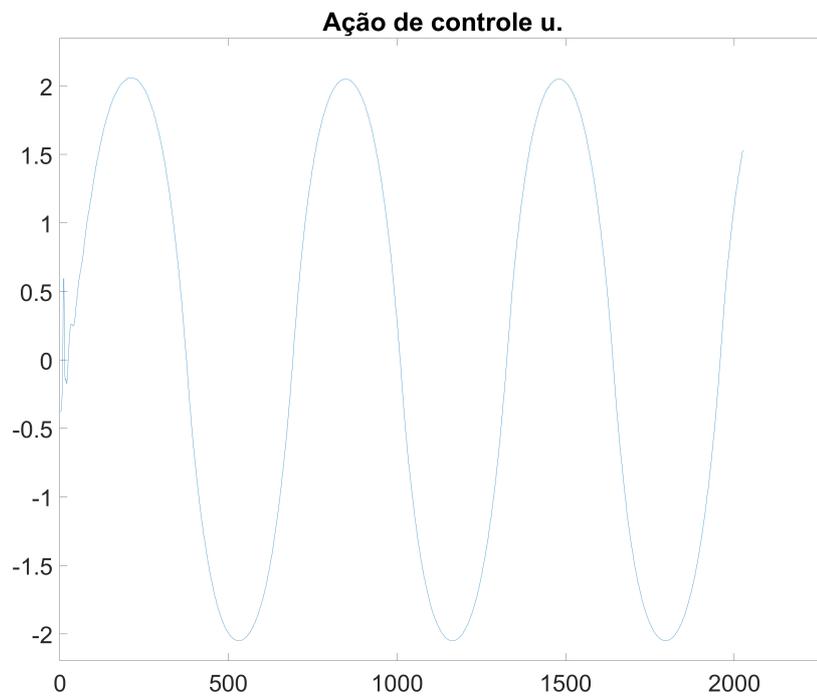
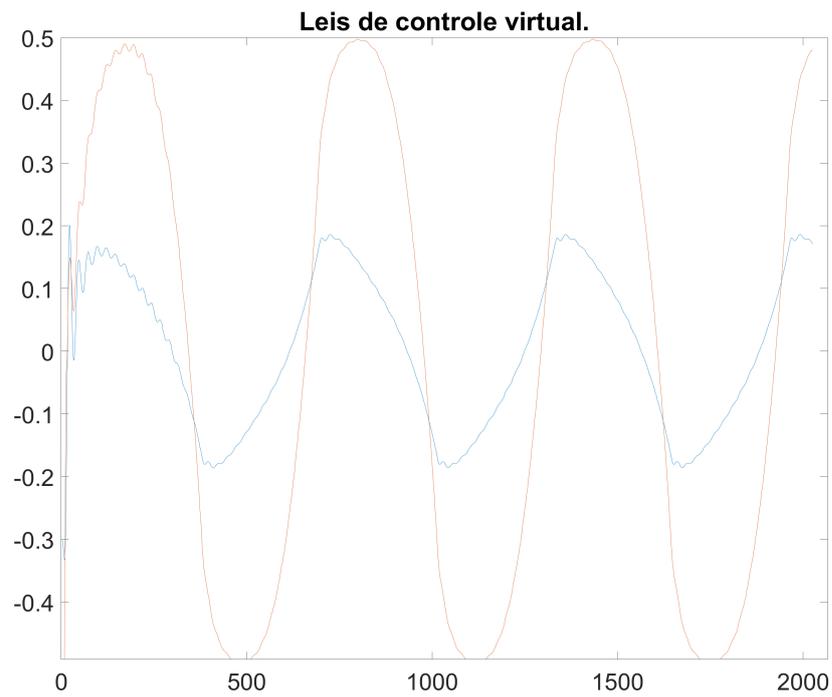
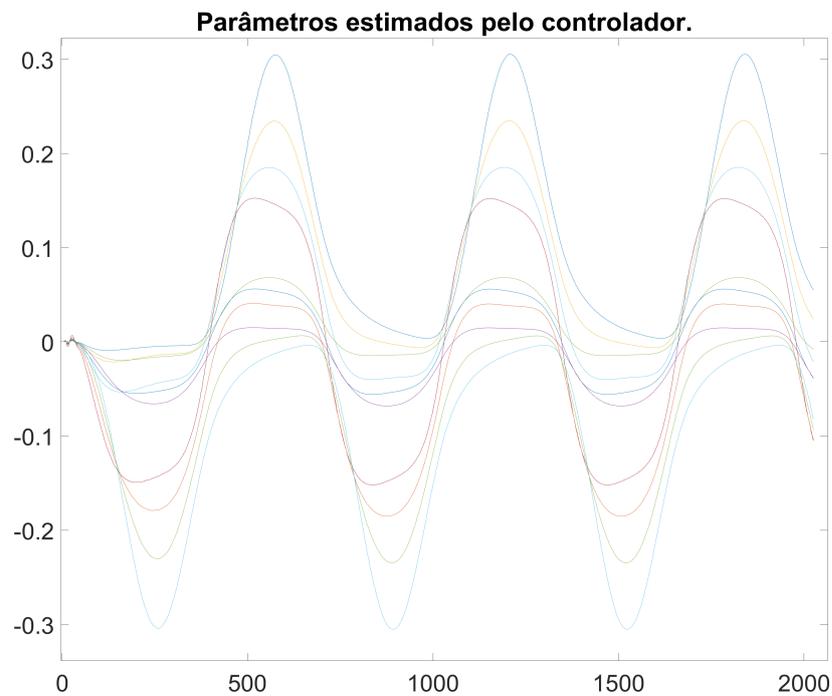


Figura 33 – Ação de controle u.

Figura 34 – Leis de controle virtual  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .Figura 35 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{f2}$

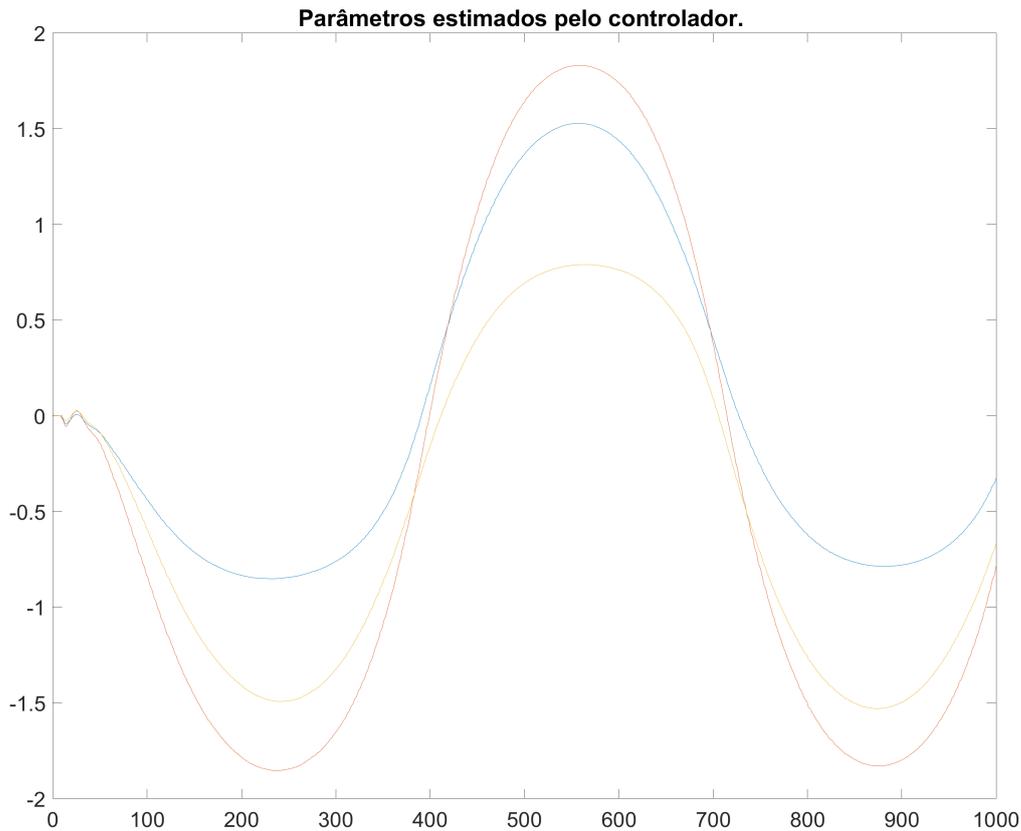


Figura 36 – Parâmetros estimados pelo controlador:  $\hat{\theta}_{f3}$

sistema em malha fechada e a Figura 31 mostra o sinal de erro entre a saída do sistema e o sinal de referência. As Figuras 33, 34, 35,36 mostram que todos os sinais de malha fechada estão limitados.

É importante notar que a abordagem proposta por Li, Li e Tong (2018) estima um total de 30 parâmetros. Além disso, o método de controle apresentado não requer que os estados dos sistemas controlados sejam medidos diretamente.

## 6.5 Conclusão

Um projeto e análise do controle por *Backstepping* com Aproximação Adaptativa usando Observador de Estados Nebuloso aplicado ao sistema de rotor duplo, considerando que apenas o estado  $x_1$  é medido, para tanto sistemas de lógicas nebulosas são utilizados para aproximar as funções não lineares desconhecidas e o observador de estado nebuloso é construído para estimar o estado não medido (BORGES et al., 2008); (CHONG et al., 2015); (XIE; YANG; ZHU, 2014).

Os sinais ficaram limitados em malha fechada, erros de trajetória, erros de trajetória

---

compensados, erros de adaptação e parâmetros de adaptação, o que é garantido pela lei de controle proposta em conjunto com as leis de atualização correspondentes. Finalmente, a simulação também mostra a eficácia desse esquema de controle adaptativo para o caso de controle de rastreamento de trajetória do TRMS. A abordagem estimou um total de 30 parâmetros e neste caso não é possível utilizar a estimação de norma dos parâmetros.



## 7 Conclusões e Trabalhos Futuros

Este capítulo apresenta as conclusões retiradas do trabalho e algumas direções possíveis para trabalhos futuros.

Neste trabalho propôs-se aplicar três metodologias para controle fuzzy TS baseado em um filtro de referência desejado utilizando abordagens diferentes em cada uma delas. Sendo elas *backstepping* com aproximação adaptativa, *backstepping* com aproximação adaptativa e redução de complexidade e projeto do observador de estado *fuzzy*, todas aplicadas ao sistema de rotor duplo.

A metodologia descrita utilizando a abordagem *Backstepping* com Aproximação Adaptativa e Redução de Complexidade, se destaca pela significativa redução no número de parâmetros a serem estimados, se comparada à estratégia de *backstepping* adaptativo com filtro de comando proposta em [Farrell e Polycarpou \(2006\)](#), estimou um total de 6 parâmetros. No projeto e análise do controle por *Backstepping* com Aproximação Adaptativa usando Observador de Estados Nebuloso, a abordagem estimou um total de 30 parâmetros e neste caso não é possível utilizar a estimação de norma dos parâmetros.

Em relação aos desempenhos entre as metodologias pode-se dizer que a abordagem usando *backstepping* com aproximação adaptativa e redução de complexidade se destaca em relação à abordagem *backstepping* com aproximação adaptativa pela significativa redução no número de parâmetros a serem estimados. A metodologia usando observador de estados nebulosos teve a vantagem de o único sinal do sistema utilizado pelo controlador ser o ângulo que ele está controlando, e a desvantagem é que não existe forma de se utilizar a abordagem de estimar a norma dos parâmetros para a redução da complexidade.

Uma possível perspectiva futura é investigar o uso do controlador proposto no eixo de guinada em conjunto com o eixo de arfagem, em uma abordagem multivariável. Além disso, como uma implementação real desta lei de controle seria realizada de forma digital, o projeto da lei de controle diretamente para um sistema em tempo discreto seria uma direção futura interessante. Bem como a utilização da estimação de norma dos parâmetros.

### 7.1 Artigo Publicado

Um artigo sobre a aplicação da segunda metodologia ao problema de controle do sistema de rotor duplo, chamado "Backstepping com aproximação adaptativa e redução de complexidade para um sistema rotor duplo" foi apresentado no XXIII Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2020) ([MACEDO; TÔRRES; CAMPOS, 2020](#)).



## Referências

- AGUIRRE, L. A.; BILLINGS, S. Validating identified nonlinear models with chaotic dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 4, n. 01, p. 109–125, 1994. Citado na página 5.
- AHMAD, S.; CHIPPERFIELD, A.; TOKHI, M. Modelling and control of a twin rotor multi-input multi-output system. In: IEEE. *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No. 00CH36334)*. [S.l.], 2000. v. 3, p. 1720–1724. Citado na página 1.
- BILLINGS, S. A. Identification of nonlinear systems—a survey. In: IET. *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*. [S.l.], 1980. v. 127, n. 6, p. 272–285. Citado na página 5.
- BORGES, R. A. et al. Parameter-dependent  $h_2$  and  $h_\infty$  filter design for linear systems with arbitrarily time-varying parameters in polytopic domains. *Signal Processing*, Elsevier, v. 88, n. 7, p. 1801–1816, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 70.
- CHALUPA, P.; PŘIKRYL, J.; NOVÁK, J. Modelling of twin rotor MIMO system. *Procedia Engineering*, Elsevier, v. 100, p. 249–258, 2015. Citado na página 1.
- CHEN, B. et al. Adaptive fuzzy control of a class of nonlinear systems by fuzzy approximation approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 20, n. 6, p. 1012–1021, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 5, 47, 49 e 50.
- CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design*. [S.l.]: Oxford University Press, 1998. Citado na página 25.
- CHEN, S. Representation of nonlinear systems: the narmax model. *International Journal of Control*, v. 49, n. 3, p. 303–344, 1985. Citado na página 5.
- CHEN, S. S. G. M.; HOW, B. V. E. Robust adaptive neural network control for a class of uncertain MIMO nonlinear systems with input nonlinearities. *IEEE Transactions on Neural Networks*, IEEE, v. 21, n. 5, p. 796–812, 2010. Citado na página 5.
- CHONG, M. S. et al. Parameter and state estimation of nonlinear systems using a multi-observer under the supervisory framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 60, n. 9, p. 2336–2349, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 70.
- FARRELL, J. A.; POLYCARPOU, M. M. *Adaptive approximation based control: unifying neural, fuzzy and traditional adaptive approximation approaches*. [S.l.]: John Wiley e Sons, 2006. v. 48. Citado 18 vezes nas páginas 5, 6, 9, 13, 14, 15, 16, 19, 21, 31, 32, 35, 42, 47, 52, 53, 55 e 73.
- Feedback Instruments. *Twin Rotor MIMO System: Control Experiments (33-949S)*. [S.l.], 2006. Citado 3 vezes nas páginas 1, 27 e 28.
- FENG, G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, IEEE, v. 14, n. 5, p. 676–697, 2006. Citado na página 6.

- GALINDO, J. A. D. Active disturbance rejection control applied to a twin-rotor system. Universidade Federal de Minas Gerais, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- GALINDO, J. A. D.; TORRES, L. A. B.; RAFFO, G. V. A modified active disturbance rejection control applied to the twin-rotor system with output quantization. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMÁTICA. *XXI Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.], 2016. p. 3422–3427. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- HUMAIDI, A. J. Experimental design and verification of extended state observers for magnetic levitation system based on pso. *The Open Electrical & Electronic Engineering Journal*, v. 12, n. 1, 2018. Citado na página 2.
- KANELLAPOULOS, I.; KOKOTOVIC, P. V.; MORSE, A. S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. In: IEEE. *1991 American control conference*. [S.l.], 1991. p. 649–654. Citado na página 16.
- KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. W. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002. v. 3. Citado 3 vezes nas páginas 9, 10 e 16.
- KOKOTOVIC, P.; SUSSMANN, H. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 125–133, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 16.
- KRSTIC, M.; KOKOTOVIC, P.; KANELLAPOULOS, I. *Nonlinear and adaptive control design*. [S.l.]: John Wiley e Sons, Inc., 1995. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 16.
- LEVINE, W. S. *The control systems handbook: control system advanced methods*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado na página 25.
- LI, Y.; LI, K.; TONG, S. Finite-time adaptive fuzzy output feedback dynamic surface control for MIMO nonstrict feedback systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 27, n. 1, p. 96–110, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 59, 60, 61, 62 e 70.
- LI, Z.; YANG, C. Neural-adaptive output feedback control of a class of transportation vehicles based on wheeled inverted pendulum models. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 20, n. 6, p. 1583–1591, 2011. Citado na página 2.
- LUENBERGER, D. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 11, n. 2, p. 190–197, 1966. Citado na página 25.
- MACEDO, F. R.; TÔRRES, L. A.; CAMPOS, V. C. Backstepping com aproximação adaptativa e redução de complexidade para um sistema de rotor duplo. In: *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*. (Congresso Virtual): Sociedade Brasileira de Automática (SBA), 2020. v. 2, n. 1. Citado na página 73.
- OGATA, K. *Ingeniería de control moderna*. [S.l.]: Pearson Educación, 2003. Citado na página 25.
- RAHIDEH, A.; SHAHEED, H. M.; BAJODAH, A. H. Adaptive non-linear model inversion control of a twin rotor multi-input multi-output system using artificial intelligence. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 221, n. 3, p. 343–351, 2007. Citado na página 2.

RODRIGUES, G. G. Identificação de sistemas dinâmicos não-lineares utilizando modelos narmax polinomiais: aplicação a sistemas reais. Universidade Federal de Minas Gerais, 1996. Citado na página 5.

SAROJ, D. K.; KAR, I.; PANDEY, V. K. Sliding mode controller design for twin rotor MIMO system with a nonlinear state observer. In: IEEE. *2013 International Mutli-Conference on Automation, Computing, Communication, Control and Compressed Sensing (iMac4s)*. [S.l.], 2013. p. 668–673. Citado na página 1.

SHAIK, F. A.; PURWAR, S.; PRATAP, B. Real-time implementation of chebyshev neural network observer for twin rotor control system. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 38, n. 10, p. 13043–13049, 2011. Citado na página 2.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, IEEE, n. 1, p. 116–132, 1985. Citado na página 6.

TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. Citado na página 6.

TANSCHKEIT, R. et al. Modelagem e controle nebuloso. *Enciclopédia de Automática: Controle & Automação*, Blucher São Paulo, Brazil, v. 3, p. 283–324, 2007. Citado na página 6.

TAO, C. W.; TAUR, J. S.; CHEN, Y. C. Design of a parallel distributed fuzzy lqr controller for the twin rotor multi-input multi-output system. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 161, n. 15, p. 2081–2103, 2010. Citado na página 1.

TOHA, S. F.; TOKHI, M. O. Anfis modelling of a twin rotor system using particle swarm optimisation and rls. In: IEEE. *2010 IEEE 9th International Conference on Cybernetic Intelligent Systems*. [S.l.], 2010. p. 1–6. Citado na página 2.

WANG, L.-X. *A course in fuzzy systems and control*. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1996. Citado na página 7.

WANG, T.; TONG, S.; LI, Y. Robust adaptive fuzzy control for nonlinear system with dynamic uncertainties based on backstepping. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, v. 5, n. 9, p. 2675–2688, 2009. Citado na página 5.

WEN, P.; LU, T. W. Decoupling control of a twin rotor MIMO system using robust deadbeat control technique. *IET Control Theory e Applications*, IET, v. 2, n. 11, p. 999–1007, 2008. Citado na página 1.

XIE, X.-P.; YANG, D.-S.; ZHU, X.-L. Relaxed observer design of discrete-time t–s fuzzy systems via a novel multi-instant fuzzy observer. *Signal processing*, Elsevier, v. 102, p. 296–303, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 70.

YANG, J. H.; HSU, W. C. Adaptive backstepping control for electrically driven unmanned helicopter. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 17, n. 8, p. 903–913, 2009. Citado na página 2.

YING, H. General siso takagi-sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, IEEE, v. 6, n. 4, p. 582–587, 1998. Citado na página 6.

ZENG, K.; ZHANG, N.-Y.; XU, W.-L. A comparative study on sufficient conditions for takagi-sugeno fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, IEEE, v. 8, n. 6, p. 773–780, 2000. Citado na página 6.

ZHANG, F.; LIU, G.; FANG, L. A battery state of charge estimation method using sliding mode observer. In: IEEE. *2008 7th world congress on intelligent control and automation*. [S.l.], 2008. p. 989–994. Citado na página 2.